高等学校试用教材

微积分

管九锡　胡以永　王者冠
杨学忠　王奠华　郭金锥
编著

中国商业出版社

经济数学基础（一）

微　积　分

管九锡　胡以永　王者冠

杨学忠　王[illegible]　[illegible]　编著

中国商业出版社

经济数学基础之一

微 积 分

管九锡　胡以永　杨学忠
王者冠　王蕙华　郭金锥　编　著

※

中国商业出版社　中南发行站发行
湖南商业专科学校印刷厂印刷

※

850×1168　32开　11.75印张　300千字
1988年7月第1版　1988年7月长沙第1次印刷
印数1——5,000册
统一书号：9237·004　定价：3.40元

《经济数学基础》

编　委（以姓氏笔划为序）

王者冠　何　青　易鹏异　周晓三

胡以永　杨学忠　管九锡

主　编　管九锡

副主编　胡以永　王者冠　杨学忠

前　　言

一九八五年十一日在扬州召开的全国商业专科学校数学教学研究会上，决定编写一套体现经济类专科学校特色的《经济数学基础》教材。内容力求简明扼要，通俗易懂，编选了数学在经济中应用的实例。每章都附有一定数量的习题，在附录中给出了部分习题答案和提示。带※号的章节为选学内容，删舍后不影响全书的连贯性。本书可作为经济类专科学校各专业的教材，也可供电大、职大作教学参考书，亦可作经济管理部门的职工数学教学和自学使用。

全书共分四册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》，全部讲完约需200个学时。参加本册编写的有管九锡、胡以永、王者冠、杨学忠、王奠华、郭金锥同志，由管九锡任主编、胡以永、王者冠、杨学忠任副主编。

本书在编写和成稿过程中，得到全国各商业专科学校数学教研室老师们的大力支持。初稿完成后，充分听取了兄弟学校老师们的意见和建议，使本书增色不少，在此，向他们表示衷心的感谢。

本书还得到湖南大学应用数学副教授胡锡炎、郭忠两位先生的热情关心和指导。湖南商业专科学校数学教研室的同志们为本书做了许多技术性的工作，谨在此致谢。

由于编者水平有限，加上编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

《经济数学基础》编委会

一九八七年六月

目　录

第一章 函数 极限与连续

本章作为微积分的基础知识，主要介绍函数、极限和连续等基本概念，着重阐述极限的意义和方法。

§1.1 实数与绝对值

在研究某些问题时，经常要用到实数与绝对值。本节将简要介绍它们的基本概念及其性质。

一、实数

实数是有理数和无理数的总称。数轴是具有方向、原点和单位长度的直线。任何实数均可用数轴上的一个点表示，反之，数轴上任何一点都表示一个实数，这就是实数和数轴上的点的一一对应关系。全体实数所组成的集合称为实数集。本书中今后研究的数都是实数。为了简单起见，我们常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示，如点 a 和实数 a 是相同的意思。

二、绝对值

一个实数x的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

由此可知 $|x| \geqslant 0$，且有

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上点x到原点之间的距离。

根据绝对值的定义，容易得到下面关系式

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$$

因为若$x\geqslant 0$，则$-|x|\leqslant x=|x|$；若$x<0$，则$-|x|=x<|x|$。

关于绝对值的运算，有以下四个性质：

①和的绝对值不大于各项绝对值的和。

即 $\quad |x+y|\leqslant|x|+|y|$

因为 $\quad -|x|\leqslant x\leqslant|x|$

$\qquad -|y|\leqslant y\leqslant|y|$

将上面两式相加，得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|)$$

所以

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

应用数学归纳法，可以证明有限项和的绝对值，不大于各项绝对值的和。

②差的绝对值不小于各项绝对值的差。即

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

因为$|x|=|(x-y)+y|$，由性质①，得

$$|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$$

于是 $\quad |x|\leqslant|x-y|+|y|$

移项后就可得到所要证明的不等式。

③乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积。即

$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$$

④商的绝对值等于被除数和除数绝对值的商。即

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\qquad y\neq 0$$

以上两个性质，根据乘法和除法的定义是显然的，故不赘述。

三、区间与邻域

设a、b是两个实数，且$a<b$，那么，满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b$$

一切实数x的全体称为闭区间，记作〔a，b〕；满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数x的全体称为开区间，记作（a，b）；满足不等式

$$a \leqslant x<b \text{或} a<x \leqslant b$$

的一切实数x的全体称为半开区间，分别记作〔a，b）或（a，b〕。以上各种区间中，a和b称为区间的端点，而（b－a）称为区间的长度。

根据实数与数轴上的点的一一对应关系，那么区间是数轴上介于两点之间的线段上的全体实数，这两个点就是区间的端点。闭区间〔a，b〕，开区间（a，b）、半开区间〔a，b）、（a，b〕在数轴上表示出来，分别如图1.1中的（a）、（b）、（c）、（d）所示。

上述区间均为有限区间，还有一类区间称为无限区间，如区间〔a，＋∞）表示不小于a的实数的全体，有时也记作$a \leqslant x<+\infty$，如图1.2（a）；区间（－∞，b〕表示不大于b的实数的全体，有时也记作$-\infty<x \leqslant b$，如图

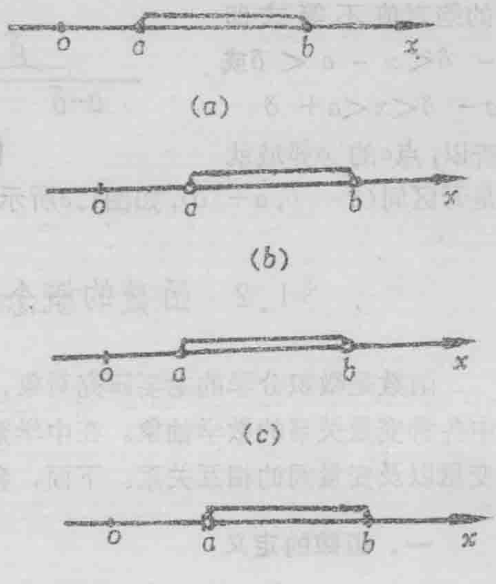


图 1.1

1.2（b）；区间$(-\infty, +\infty)$表示全体实数，有时也记作$-\infty<x<+\infty$。

设a和δ是两个实数，且$\delta>0$，则满足不等式

$$|x-a|<\delta \quad ①$$

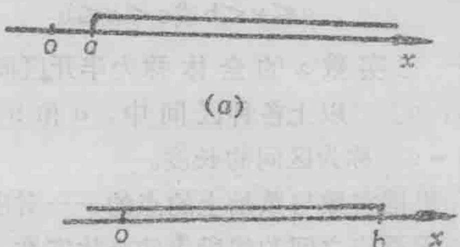
的实数x的全体称为点a的δ邻域，满足不等式

$$0<|x-a|<\delta \quad ②$$

的实数x的全体称为点a的δ空心邻域。其中点a称为该邻域的中心，δ称为该邻域的半径。①式的绝对值不等式即

$$-\delta<x-a<\delta$$
或
$$a-\delta<x<a+\delta$$

所以，点a的δ邻域就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$，如图1.3所示。



(a)

(b)

图 1.2

图 1.3

§1.2 函数的概念及其性质

函数是微积分学的主要研究对象，函数的概念是现实世界中各种变量关系的数学抽象。在中学数学中，已经学过常量、变量以及变量间的相互关系。下面，我们给出函数的定义。

一、函数的定义

定义　在某一变化过程中，如果对于变量x在某个范围D内的每一个值，按照某一对应法则，变量y都有唯一确定的值和它对应，那么变量y称为变量x的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中x称为自变量，y称为因变量，D称为函数的定义域。

例如，工厂生产某种产品，最高日产量为100吨，固定成本为1800元，每生产一吨产品的成本为115元。那么，日产量为x吨时的总成本

$$C=C(x)=115x+1800\text{（元）}$$

根据这一对应法则，对于0到100吨之间每一个x的值就有1800到13300元之间唯一确定的一个总成本C与之对应。

在函数的定义中，用何种方法表示函数，并没有加以限制，常用的有三种方法：（一）表格法，将自变量的一系列值与对应的函数值列成表格，如平方表、立方表，常用对数表等等；（二）图示法，在直角坐标系中用刻划自变量x和因变量y之间的对应法则的曲线来表示函数；（三）公式法，就是用数学表达式来表示自变量x和因变量y之间对应法则的方法，例如：$C=C(x)=115x+1800$，$y=\sqrt{16-x^2}$等。

今后，我们所讨论的函数，一般都是用公式法表示的。

二、分段函数

用公式法表示函数时，有时需要考虑自变量在不同的范围内用不同的数学式子表示同一个函数，用这种方法表示的函数称为分段函数。分段函数有着广泛的应用，现举例如下：

例1　某运输公司规定货物的吨公里运价为：若不超过100公里，每公里k元；100公里以上又不超过200公里，每增加1公里为$\frac{4}{5}$k元；超过200公里，每增加1公里为$\frac{3}{5}$k元。试把运价M和里程S之间的关系用公式法表示出来。

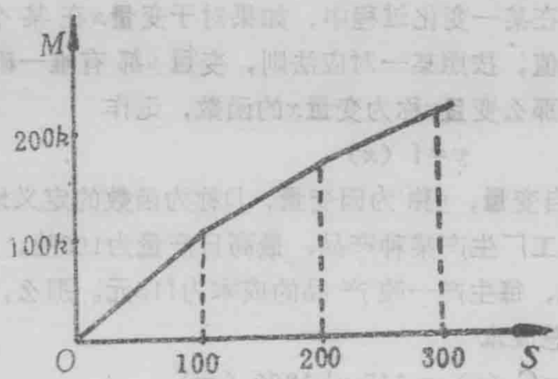


图 1.4

解：依题意，货物运价M和里程 S 之间的函数关系为：

$$M=\begin{cases} kS & 0<S\leqslant 100 \\ 100k+(S-100)\dfrac{4}{5}k & 100<S\leqslant 200 \\ 100k+100\times\dfrac{4}{5}k+(S-200)\dfrac{3}{5}k & S>200 \end{cases}$$

即

$$M=\begin{cases} kS & 0\leqslant S\leqslant 100 \\ 100k+(S-100)\dfrac{4}{5}k & 100<S\leqslant 200 \\ 180k+(S-200)\dfrac{3}{5}k & S>200 \end{cases}$$

这是一个分段函数，其图形如图1.4所示。

例 2　作出下面函数的图形：

$$y=\begin{cases} -x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -x+1, & x>0 \end{cases}$$

解：当 $x<0$ 时，是直线 $y=-x-1$；当 $x=0$ 时，是原

点；当 $x>0$ 时，是直线 $y=-x+1$。如图1.5所示。

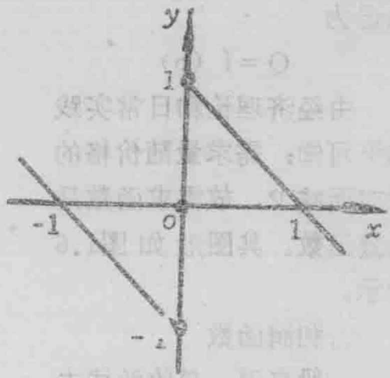


图 1.5

以上两例说明，在定义域的不同范围内用不同的数学表达式表示一个函数，不仅与函数的定义没有矛盾，而且有着现实意义。如果已知自变量的值，欲求函数值时，只需将自变量的值代入该值所对应的数学表达式进行计算即可。如例1中，若里程 $S=150$ 公里，则货物运价

$$M=100k+(150-100)\frac{4}{5}k=140k\text{（元）}。$$

三、经济现象中的函数关系

在社会济济现象中，也存在很多变量，如产量、价格、利润、成本、收入，投资、消费等等。不难发现，一个经济问题中的量是和多种因素相关的，在经济问题的研究过程中，对大量的经济活动要一下子掌握其内在联系是相当困难的。但是，对一个经济问题，当我们用抽象的数学方法来研究它的数量关系时，在分析问题的基础上，从实际出发进行调查，找出其主要因素，而对次要因素或略去不计，或者将它们假定为常数，从而便可得到该问题简化的分析模型。下面介绍几个经济现象中的常用函数关系。

1.需求函数

需求关系在经济理论中相当重要。消费者需要某种商品，在一定价格下，又有购买的支付能力，于是就产生该商品的需求量和价格的关系。

设Q表示某商品的需求量，P表示该商品的价格，需求函数记为

$$Q = f(p)$$

由经济理论和日常实践知识可知：需求量随价格的增加而减少，故需求函数是递减函数。其图形如图1.6所示。

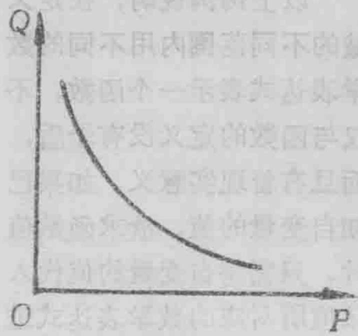


图 1.6

2.利润函数

一般来说，总收益减去总成本就是利润。因此，利润函数L通常表示为：

$$L = R - C$$

其中C表示总成本，是产量Q的函数，总成本函数包括两个部分：固定成本和可变成本。固定成本是在一定限度内不随产量的变化而变化的费用，通常用常数表示，又称间接费用；可变成本是随产量Q的变化而发生变化的费用，如原材料费、燃料和劳动力支出费等，又称直接费用。所以，总成本函数 $C = C(Q)$ 是产量Q的递增函数。

R表示总收益，它也是产量Q的函数，且等于单价P与产量Q的乘积，即 $R = PQ$。

在经济理论中，通常认为企业是以利润最大为其目标的。因此，利润函数 $L = R(Q) - C(Q)$ 被称为企业的目标函数。

此外，还有生产函数、效用函数等等，不再一一赘述。

例3　某服装厂生产连衣裙，每件售价为12元，每天可售出100件。如果每件售价每降低0.2元，则可多售出20件。试求售出件数与价格的函数关系。

解：设售出件数为Q，单价为P。根据题意可知：售出件

数的增加量与售价的降低成比例。因此，便得到Q与P的关系如下：

P：12，11.8，11.6，11.4，11.2，……

Q：100，120，140，160，180，……

由此分析可得：

$$Q=100+\frac{12-P}{0.2}\times 20$$

所以

$$Q=1300-100P$$

例4 某工厂生产某种产品Q个单位的总成本为 $C=C(Q)$，而单位产品的出厂价格为 a 元。试求该工厂生产量为Q个单位时的总利润？

解：当生产量为Q单位时，其收益函数为 $R(Q)=aQ$。那么，根据总收益减去总成本即为总利润。设总利润为L，于是

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=aQ-C(Q)$$

四、函数的几种特性

（1）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在X（为函数定义域的全部或部分）内有定义，如果存在一个正数M，对于任一 $x\in X$，能使对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在X内有界；反之，如果这样的M不存在，则称函数 $f(x)$ 在X内无界。

例如，函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant 1$，直观地说，$y=\sin x$ 的图形介于直线 $y=-1$ 与 $y=1$ 这两条平行线之间；而函数 $y=(1+x)^{-2}$ 在开区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 内都是无界的。

（2）函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于 (a,b)