世纪云图

理工社®

2016【张宇考研数学系列丛书】

9 LECTURES
ON PROBABILITY
AND STATISTICS
□ Mr. Zhang

张宇

概率论与数理统计 9 讲

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图

理工社®

[张

9 LECTURES
ON PROBABILITY
AND STATISTICS
□ Mr. Zhang

张宇

概率论与数理统计9讲

主编：张宇
副主编：朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇概率论与数理统计 9 讲 / 张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.1
ISBN 978－7－5682－0086－8

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料　②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 312871 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 /787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 /14.25
字　　数 /385 千字
版　　次 /2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 /28.80 元

责任编辑 /高　芳
文案编辑 /胡　莹
责任校对 /周瑞红
责任印制 /边心超

· 总序 ·

PREFACE

摆在读者面前的这套“张宇考研数学系列丛书”(详细目录与使用说明请见总序后的列表)是经过时间检验的，她们再一次在2015年考研中被证明是正确的备考指导教材——不论是复习思路，还是题目类型，甚至有原题被考中——我和我的作者团队感到欣慰.

2016年考研已经开始.以往来说，考研应该是大三学生的话题；如今而言，现在的考研课堂里，竟坐着很多大二的学生，还有一些大一新生(也许他们还听不懂什么是二重积分).我称这些同学是“未雨绸缪”型的选手，是考上研究生的“苗子”. 现在考研竞争之激烈，日趋白热化，年轻的学子们，想考上一个更好的学校，更有前途的专业，为实现自己的人生价值而迈上一个更高的台阶，确实不容易，需要下苦功夫.

一方面，我很体谅甚至心疼他们，这么早就要承担起考研的任务；另一方面，我更支持并且敬佩他们，因为他们清楚地知道前方的道路荆棘丛生、绝不平坦，因为他们清楚地知道自己肩上的责任，因为他们清楚地知道什么叫“十年磨一剑”.

而在这条拼搏之路上，最让人头疼的，往往就是数学.正所谓：对于考研，得考研数学者得天下.考研数学在所有的考研公共科目中，分值最高，难度最大，特别能够区分考生.所以，想要考研成功者，必须啃下考研数学这块“硬骨头”.

思考再三，本想给同学们写几句体己话，却总是写着写着，便落了俗套，正当一筹莫展时，脑子里突然闪现出我曾经写过的一篇随笔，叫《用心听者，学到灵魂》，稍作修改，转在这里.

用心听者　学到灵魂

——致2016年考研的同学们

0.1　关于爱的函数

首先我们来制造一个有趣的函数并认真研究它.

世界著名的心理学家罗伯特·斯滕伯格(Robert Sternberg)曾经提出了一个令人着迷的关于“爱”的定义：完美之爱＝亲密＋激情＋承诺(consummate love＝intimacy＋passion＋commitment).其中，intimacy是亲密、亲切的感觉，passion是激情，commitment是承诺.他认为，必须同时具备这三种因素才是完美之爱(consummate love)，并且他在这个定义后给出了一些特别有趣的结果：只含其中一种或者两种因素的不同组合的爱.

我们根据斯滕伯格的这个理论，写出“爱的函数表达式”：

$$\text{love}=f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment}).$$

这里，intimacy，passion和commitment是三个自变量，love是因变量，f是关于爱的对应法则.多么给力的函数！三种因素兼备的爱，是多么令人憧憬，可是我们更会对以下由自变量的不同组合所得到的不同的爱产生强烈的共鸣：

(1)若只有passion和commitment，则

$$f(\text{passion},\text{commitment})=\text{fatuous love}(\text{愚昧的爱}).$$

想想看，刚认识不久的一对恋人，彼此没有深入的相处，对性格、脾气、生活习惯统统不了解，只是一时冲动(passion)，便要私订终身(commitment)，这叫什么？这叫闪婚.我们说，大多数情况下，这种承诺是没

有用的，这样的爱是不能长久的.

(2)若只有 commitment，则

$$f(\text{commitment})=\text{empty love}(\text{空洞的爱}).$$

要么是父母之命，媒妁之言；要么是坐在宝马车里哭泣，只有面包的爱情.如此这般冷冰冰的爱，空有承诺(commitment)，饱受煎熬，何谈幸福？

(3)若只有 passion，则

$$f(\text{passion})=\text{infatuation}(\text{迷恋}).$$

这个函数所创造的过程是疯狂的，可是却毫无结果.真的，不要迷恋哥，哥只是个传说.

0.2 关于考研之爱的函数

走在考研路上的各位考生，你们与考研之间是什么样的爱呢？

从考研的角度上，让我们把 intimacy，passion 和 commitment 作新的解释：

① intimacy——对事物本身的亲密感；

② passion——对成功的欲望；

③ commitment——对坚持不懈的承诺.

根据 0.1 的分析，我们可以很顺利地讨论你与考研之爱，写出“爱的函数表达式”：

$$\text{love of kaoyan}=f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment}).$$

多么惊人相似地可以得到如下结果(请你比照自己，对号入座)：

(1)若只有 passion 和 commitment，则

$$f(\text{passion},\text{commitment})=\text{fatuous love of kaoyan}(\text{对考研愚昧的爱}).$$

有一类考研的学生，对考研本身并不了解，看到身边很多人都去考了，看到这个社会考研的氛围很浓，于是不管三七二十一，凭着对成功的憧憬(passion)，便立下壮志(commitment)，大声宣告：我要考研了！此人，有勇无谋，此志，恐难长久.是你吗？

(2)若只有 commitment，则

$$f(\text{commitment})=\text{empty love of kaoyan}(\text{对考研空洞的爱}).$$

这类考生往往被家庭或者社会所逼迫，成为“被考研”(commitment)一族.试想，假如我们如此冷漠无奈地对待考研，考研会如何对待我们？是你吗？

(3)若只有 passion，则

$$f(\text{passion})=\text{infatuation}(\text{迷恋}).$$

空想主义者，只有一番豪情壮语，从不付诸行动，我们只能说：不要迷恋考研，考研对你，只是个传说.是你吗？

0.3 你与考研的完美之爱

你是否发现，在 0.2 中所叙述的种种令人遗憾的爱的函数中，都缺乏了一个共同的因素，那就是“亲密感”(intimacy)，这才是我们要说的关键.

什么是对一个人的亲密感？你了解他，信任他，理解并包容他，和他在一起，无论是苦是甜，都愿共同承担，都始终有一种亲切温暖的感受…这才是

$$f(\text{intimacy},\text{passion},\text{commitment})=\text{consummate love}.$$

那么，你对考研呢？我们绝不是强求所有人一开始就对考研有一种亲密无间的感觉，那不可能！可是，你愿意去了解它、信任它、理解并包容它吗？你愿意在今后的道路上，不论是一片坦途，还是荆棘丛生，不论是顺风顺水，还是步履蹒跚，都和考研一起同甘苦共患难吗？

聪明、有上进心的同学们，你应该读懂了这个函数：当你选择了考研，就请你郑重地担起这份责任，在踌躇满志、持之以恒的条件下，用心去做，爱上考研.我坚信，像呵护爱情一样去经营考研，你就一定能够收

获成功，收获那份只属于你自己的奋斗之幸福！

请你在纸上认真地、郑重地写下这些字：

$$f(\text{intimacy}, \text{passion}, \text{commitment}) = \text{consummate love of kaoyan.}$$

能不能实现你的愿望，取决于你想不想，你有多想.

祝福所有为了梦想而努力拼搏的人，有一句我很欣赏的话送给大家：生活不是等待风暴过去，而是要学会在雨中翩翩起舞.

以上所言，发自肺腑；用耳听者，学到皮肤；用心听者，学到灵魂.

张宇

2015年1月　于北京

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	拟出版时间	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2015 年 3 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了超过 1000 道高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，知识相对混编，难易变化无常，利于考生复习过程中保持实战演练的状态. 原命题组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2015 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题(1987—2015)，给读者提供原汁原味的实考题. 原命题组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2015 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2015 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组长与命题成员参与.

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

·前言·

FOREWORD

——如何探究随机现象背后的客观规律

本书是继《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》之后的第三本教材，至此，我写给读者朋友们的考研数学 36 讲已经齐全了.

一提到概率论与数理统计，很多读者以为是研究随机现象的，正如读者所熟知的——概率论起源于赌博——帕斯卡和费马绞尽脑汁去帮助人们思考如何研究赌博中的赌金分配问题；还有读者干脆更加具体化地把这门课看做是玩排列组合的智力游戏. 以上认识，都没有抓住这门学问的核心——诚然，赌金分配也好，排列组合也罢，都是概率统计中的内容，但是它们都不是核心——**如何利用微积分工具研究随机现象背后的客观规律性，才是这门课程的核心.**

以上所述，道出了这门课的**两大关键：一是概率统计的研究思想；二是研究概率统计的工具——微积分.**

一、概率统计的研究思想

何谓概率统计的研究思想？本书中将会讲到众多概率论、统计学的思想方法，这些思想方法是这门课程的灵魂，读者一定要认真学习、体会并将它们内化为自己的能力. 在此我仅举一个简单但是重要的例子——**天上掉馅饼**——希望读者对于这门课里的知识，不仅要知其然，更要知其所以然.

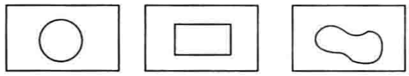
假设明天早上 9:00，天上会掉一个馅饼（当做质点）到你所在学校的操场上，请你用食堂的饭盆去接（如下图所示）.

请问两个问题：一是你站在哪里接呢？二是你要带多大的饭盆和什么形状的饭盆呢？认真思考后，不难得出如下结论.

第一个问题的答案是：站在何处去接馅饼都可以. 这里就要求读者懂得一个重要思想——**等可能性思想——我们没有任何理由认为这个馅饼更有可能落在操场区域中的哪个位置，只好认为它落在此区域中的任何位置都具有相等的可能性.** 这个思想在很多问题中都有重要应用，比如说：一个袋子中有 10 个同质球，其中有 1 个白球，9 个黑球，现在请你从该袋子中随机取出一球，请问取出的球是白球的概率. 我们会毫不犹豫地回答：十分之一. 这里用到的就是这个思想：由于球是同质的，我们没有任何理由认为取到某一个球更具有可能性，只好认为取到 10 个球中任何一球都具有等可能性，所以取到白球的概率自然是十分

之一.

第二个问题的答案是：你所带的饭盆大小至关重要，但是是什么形状却无关紧要. 为什么？因为馅饼落在操场区域的任何位置都具有等可能性，于是，读者容易想到，如果饭盆的面积是操场面积的千分之一，那么你接到馅饼的概率就是千分之一；如果饭盆的面积是操场面积的二分之一，那么你接到馅饼的概率也就是二分之一；如果，我是说如果，你的饭盆面积和操场面积一样大，那么毫无疑问，馅饼就是你的了. 至于你是用圆形、还是矩形、甚至是奇形怪状的(如图所示)，真是随你了(这里要注意一点：如果你的饭盆面积和操场面积一样大，你的饭盆和操场形状自然是一样的，这是特殊情况). 这里又可以把第一个问题所述的等可能性等价地，或者说更加专业地描述为：**馅饼落到操场区域中的任意子区域上的概率与该子区域的面积大小成正比.**



以上所述涉及**求概率的几何概型**这一重要知识点.

于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**，如果：

(1)样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域；

(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比，而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 A="样本点落入区域 S_A"的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}.$$

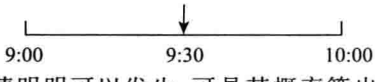
由上式计算的概率称为 A 的**几何概率**.

需要指出的是，上述问题是考研重点，是命题人手里的"香饽饽".

二、研究概率统计的工具——微积分

当然，不要以为只懂了概率统计的思想，就能够游刃有余，畅通无阻. 这里还涉及计算的问题——大多数数学问题是要算出来的——微积分在概率统计的发展过程中起到了极为重要的作用.

接着"一"那里的例子，我再提一个"类似"的问题. 假如给出一个信息：明天我会在 9:00—10:00 之间到达教室. 读者马上要将其理解为"我在 9:00—10:00 之间的任意时刻到达教室是等可能的"，很好. 那么，请问我在 9:00—9:30 之间到达教室的概率是多少？答案是二分之一，也很好. 那么，请问我在 9:30 这个时刻正好到达教室的概率是多少？答案是？读者可能会发现一个奇怪的答案：概率是 0. 是的，你回答的没有错. 假设 9:00—10:00 的时刻为一个时间轴，这可以看做一个有长度的数轴，如下图所示. 但是 9:30 这个时刻是一个点——一个点是没有长度的——所以，由上面提供的几何概率的公式计算得到答案 0.



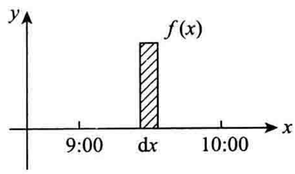
"我在 9:30 到达教室"这件事情明明可以发生，可是其概率算出来竟然是 0，这不能不说是一种遗憾——这是数学上的遗憾——通俗说来，按照我们上面讲的几何概型的方法，这个事件的概率是"**测不出来的**".

测不出来可不行，非得测怎么办？微积分前来施以援手了.

将 9:30 这个点再往下走一个增量——9:30＋dx，于是，我们就可以用 $f(x)\mathrm{d}x$ 这个面积的大小来表示这件事情发生的概率了. 这涉及随机变量的**均匀分布**这个重要知识点.

于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

如果 X 的概率密度或分布函数为



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \quad 或 \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x,\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$.

【注】 区间 (a,b)，可以是闭区间 $[a,b]$；几何概型是均匀分布的实际背景. 用几何概率计算事件概率时已假设点在区域内服从均匀分布. 几何概率可以用均匀分布计算.

同样需要指出，我在前言中所讲到的这个直观且深刻的知识点是考研重点.

我认为，读者若能贯彻以上两大关键——既能够学懂概率统计的思想方法，又能够熟练使用微积分工具，这门课程一定可以学好.

三、关于本书

本书是由各位作者在多年讲授概率论与数理统计课程和考研辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题、中国人民大学相关教材、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》概率论与数理统计部分的编写、浙江大学《概率论与数理统计（第四版）》的《习题全解与考研指导》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义. 期间，清华大学谭泽光教授与作者进行了很多交流、给予作者很多帮助，特别表示感谢.

现在，在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将概率论与数理统计课程按照考研数学考试大纲的要求，细分为 9 讲，称为《张宇概率论与数理统计 9 讲》，奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高概率论与数理统计学习水平的读者们参考.

本书每一讲由“内容精讲”“例题精解”“习题精练”三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

“内容精讲”全面准确地阐述了本科教学基本要求和考研数学大纲中概率论与数理统计所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

“例题精解”通过精心挑选或者编制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

“习题精练”给读者留下了作业：独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢？我提四个建议.

（1）坚持不懈，细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲：“一天不练功，只有我知道；三天不练功，同行也知道；一月不练功，观众全知道.”复习数学，我们建议读者也一定要这样，捧着这本书，每天都要看内容，每天都要做题目，坚持不懈，细水长流，便可水到渠成.

（2）不求初速，但求加速

一开始读数学书，总会吃力一些，遇到的困难多一些，这很正常，我们不要畏难，应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂，把每一个难点攻克，这样，开始复习的速度就会慢一些. 但是，只要能够坚持，复习了一定的内容之后，你便会发现，复习速度不断提高，理解能力和解题能力都会显著增强. 这符合数学学习的

规律，请读者把握住.

(3)独立思考，定期检验

复习一个知识，先要读基本的概念、定理和公式，然后看例题，再去做习题. 只有通过做题，才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 一定不要翻着答案做题，稍有不会就看答案，这样效果不好. 读者先不要看答案，自己独立地去做，调动起自己所有的知识储备，看能不能做出来，做出来了，自然很好，即使做不出，时间也没有白费，其他的知识在你脑子里过了一遍，也是一种复习. 只是要注意，如果全力以赴也未做出题目，看完答案后要好好总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段，都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)吸取教训，善于总结

人没有不犯错误的，尤其在学习数学的过程中，做错题，不会做题，是再平常不过的了. 人们常说："失败是成功之母"，就是这个意思. 我们常告诉学生：如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题，可能会有两种态度，一种态度是消极的，题目不会做，心情不好，自暴自弃，复习效率大打折扣；一种态度是积极的，题目做不出，正是找到了自己复习的薄弱环节，找到了自己的不足之处，正是遇到了自己提高、进步的机会，我们当然支持后面一种态度，这才是正确的态度. 所以，希望在考研复习的过程中，读者准备一个笔记本，通过不会做或者做错的题目，认真分析自己到底问题出在哪里，哪些知识还复习不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

我要再次感谢前考研数学命题组的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予本书很大的支持和帮助. 我无意用"水平有限"作为遁词，诚心接受读者和同行专家的批评指正.

作为考研数学 36 讲的最后一本书，我把在微博上的一段话作为结尾送给读者：只有你真心实意对待数学，数学才会真心实意回报于你. 万不要虚情假意，万不要急功近利，数学很聪明，不会被骗到. 对人、对事，均应如此.

张宇

2015 年 1 月　于北京

目录

CONTENTS

第 1 讲　随机事件与概率

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一 数学三	样本空间(基本事件空间)的概念
理解	数学一 数学三	随机事件的概念　概率、条件概率的概念 事件独立性的概念　独立重复试验的概念
会	数学一 数学三	计算古典型概率和几何型概率
掌握	数学一 数学三	事件的关系及运算　概率的基本性质 概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式 用事件独立性进行概率计算　计算有关事件概率的方法

内容精讲

一、随机事件与样本空间

1. 随机试验

我们称一个试验为**随机试验**,如果它满足以下三个条件:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)试验所有可能结果是明确可知道的,并且不止一个;

(3)每一次试验会出现哪一个结果,事先不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,为方便起见,将随机试验简称为**试验**,并用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$表示.

【注】 在不少情况下,我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果,但可以知道它不超出某个范围.这时,也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果.例如,我们需要记录某个城市一天的交通事故数量,则试验结果将是非负数 x.我们无法确定 x 的可能取值的确切范围,但可以把这范围取为$[0,+\infty)$,它总能包含一切可能的试验结果,尽管我们明知某些结果,如 $x>10\ 000$,是不会出现的.我们甚至可以把这范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨.这里就有了一定的数学抽象,它可以带来很大的方便.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为**随机事件**,简称为**事件**,并用大写字母 A,B,C 等表示.为讨论需要,将每次试验一定发生的事件称为**必然事件**,记为 Ω.每次试验一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

【注】 随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定,但是在大量重复试验的情况下,它的发生呈现出一定的规律性,这门学问正是要研究这种规律性,读者应在研究这门课程后,对此有较为深刻的认识.

3. 样本空间

随机试验每一最简单、最基本的结果称为**基本事件或样本点**,记为 ω.基本事件(或样本点)的全体称为**基本事件空间(或样本空间)**,记为 Ω,即 $\Omega=\{\omega\}$,随机事件 A 总是由若干个基本事件组成,即 A 是Ω 的

子集,$A\subset\Omega$. 事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件有一个发生.

二、事件的关系与运算

1. 定义(**关系**:包含,相等,相容,对立;**运算**:和(并)、差、交(积))

(1)如果事件 A 发生必导致事件 B 发生,则称事件 B **包含**事件 A(或 A 被 B 包含),记为 $A\subset B$.

(2)如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**,记为 $A=B$. A 与 B 相等,事实上也就是说,A 与 B 由完全同样的一些试验结果构成,它不过是同一件事表面上看来不同的两个说法而已.

(3)称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的**交**(**或积**),记为 $A\cap B$ 或 AB.

【注】 称"有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 同时发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 的交(或积),记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcap\limits_{i}A_i$).

(4)若 $AB\neq\varnothing$,则称事件"A 和 B **相容**";若 $AB=\varnothing$,则称"事件 A 与 B 不相容",也叫**互斥**. 如果一些事件中任意两个事件都互斥,则称这些事件是**两两互斥**的,或简称**互斥**的.

(5)称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 的**并**(**或和**),记为 $A\cup B$.

【注】 称"有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 至少有一个发生"的事件为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 的并(或和),记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i}A_i$).

(6)称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$;称"事件 A 不发生"的事件为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**,记为 $\overline{A}$.

由定义易知

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\quad B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing\text{且}A\cup B=\Omega.$$

(7)称有限个(或可列个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$ 构成**一个完备事件组**,如果 $\bigcup\limits_{i}A_i=\Omega$, $A_iA_j=\varnothing$(对一切 $i\neq j$).

(8)事件的关系和运算可以用所谓**文氏图**形象地表示出来(见图 1-1,题中的矩形表示必然事件 Ω).

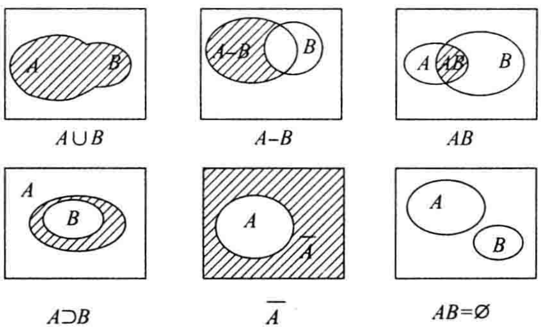


图 1-1 文氏图

2. 事件的关系和运算法则:

(1)吸收律 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B, AB=A$;

(2)交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(3)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(4)分配律 $A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C), A(B-C)=AB-AC$;

(5)对偶律(德摩根律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【注】 (1)事件运算顺序约定为先进行逆运算,而后交运算,最后并或差.

(2)事件的关系、运算与集合的关系、运算相当,且具有相同的运算法则,所以我们可以对比着理解记忆,并要学会用集合关系去思考事件关系.

三、概率的概念和基本性质

1. 概率的三种定义

(1)概率的描述性定义：

通常我们将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值)，称为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$.

(2)概率的统计性定义：

在相同条件下做重复试验，事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**. 当试验次数 n 充分大时，频率将“稳定”于某常数 p 的“附近”. n 越大，频率偏离这个常数 p 的可能性越小. 这个常数 p 就称为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)概率的统计性定义实质上是说，用频率 $\frac{k}{n}$ 作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的估计. 其直观背景为：某事件出现的可能性大小，可由其在多次重复试验中出现的频率去刻画.

(2)从上述(1)可以看出，频率只是概率的估计，而非概率本身. 也就是说，概率的统计性定义是无法准确给出某事件的概率的. 其重要性主要基于以下两点：

一，它提供了估计概率的方法，比如在一批产品中抽取样品，来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据，抽取样品计算出来的合格率，只是一种估计)；二，它提供了一种检验某结论是否正确的准则，比如，你说某批产品的合格率是95%，我们做实验，抽取样品进行计算，得出的结果，合格率是20%，远远低于你所说的95%这个数据，于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

(3)概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，如果对每一个事件 A 都赋一个确定的实数 $P(A)$，且事件函数 $P(\cdot)$ 满足：

① 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：对任意可列个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$(即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$)，有

$$P\left(\bigcup_{i} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(\cdot)$ 为**概率**，$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)数学上所说的“公理”，就是一些不加证明而承认的前提，上述公理化定义只是界定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质，它不解决具体场合下的概率计算；

(2)概率 $P(\cdot)$ 是事件的函数；

(3)虽然它不解决具体场合下的概率计算，但是我们却常常用它来判断某事件函数 $P(\cdot)$ 是否是概率，这种题型在考研试题中也是经常遇到的.

2. 概率的基本性质

由概率的公理化定义，我们可以得到如下的一些重要性质.

性质1 $P(\varnothing)=0$.

性质2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质3(单调性) 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质4(有界性) 对于任一事件 A，

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

【注】 $P(A)=0$，不能断言 $A=\varnothing$；$P(A)=1$，不能断言 $A=\Omega$. 其中道理可从前言中悟出.

性质5(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质6(加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

【注】 上式还能推广到多个事件的情况.

(1)设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2)对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用数学归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质7(减法公式) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

四、古典型概率和几何型概率

下面研究两种非常重要的概率类型:古典型概率和几何型概率.

1. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**古典概型**,如果其基本事件空间(样本空间)满足:

(1)只有有限个基本事件(样本点);

(2)每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.

如果古典概型的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,也叫做有利于 A 的基本事件为 k 个,则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件}A\text{所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**古典概型**.

2. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**,如果:

(1)样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域;

(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样,即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比,而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中,如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域,则事件 A="样本点落入区域 S_A"的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**几何概率**.

【注】 古典概型与几何概型的区别是:基本事件有限、等可能的随机试验为古典概型;基本事件无限且具有几何度量、等可能的随机试验为几何概型.

五、条件概率及与其有关的三个概率公式:乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1. 条件概率

设 A,B 为任意两个事件,若 $P(A)>0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为条件概率,记为 $P(B|A)$,并定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad(P(A)>0).$$

【注】 (1)条件概率 $P(\cdot|A)$是概率,概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用.

例如:

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A),$$

$$P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A),$$