矩阵分析学习指导

孟品超　姜志侠　编著

清华大学出版社

矩阵分析学习指导

孟品超　姜志侠　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是与姜志侠、孟品超、李延忠编著的《矩阵分析》(清华大学出版社,2015)配套的辅导教材,包含了线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵分解、矩阵分析、矩阵函数等内容的基本要求、基本内容、典型例题和习题解析.

本书可作为理工类院校硕士研究生和高年级本科生学习矩阵论、矩阵分析课程的同步辅导书,也可供自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析学习指导/孟品超,姜志侠编著. --北京:清华大学出版社,2015

ISBN 978-7-302-37303-2

Ⅰ.①矩…　Ⅱ.①孟…②姜…　Ⅲ.①矩阵分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 159950 号

责任编辑: 陈　明
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 王淑云
责任印制: 宋　林

出版发行: 清华大学出版社
　　网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址: 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编:** 100084
　　社 总 机: 010-62770175　　**邮　　购:** 010-62786544
　　投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京嘉实印刷有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185mm×260mm　　**印　张:** 10.25　　**字　　数:** 249 千字
版　　次: 2015 年 1 月第 1 版　　**印　　次:** 2015 年 1 月第1 次印刷
印　　数: 1～2500
定　　价: 22.00 元

产品编号:060035-01

FOREWORD

前 言

本书是姜志侠、孟品超、李延忠编著的《矩阵分析》教材的配套辅导书，是为指导理工科研究生更好地学习“矩阵论”课程而编写．全书力求使学生进一步加深对课程内容的理解，扩大课堂信息量，为研究生阶段的后续课程学习和论文写作打好坚实的数学基础．

作为数学的一个重要分支，矩阵理论具有极为丰富的内容；作为一种基本工具，矩阵理论在数学学科以及其他科学技术领域都有非常广泛的应用．本书对于学习矩阵论课程的研究生以及参加博士生入学考试中的“矩阵论”科目考试的学生会起到很好的辅助作用，对于从事“矩阵论”课程教学工作的教师也有一定的参考价值．

本书由与教材各章内容同步的基本要求、基本内容、典型例题和习题解析四部分组成．基本要求部分主要针对教学大纲中要求学生对各章节知识的掌握程度编写；基本内容部分概述了各章节的主要定义、定理、解题方法，有助于学生对主要知识系统的把握；典型例题部分是通过作者多年从事“矩阵论”课程、“高等代数”课程和“数值分析”课程教学所积累的宝贵经验，同时借鉴了大量的参考文献，精选了大量相关的典型题编写而成，所有题目都给出了详细求解过程，重点题目还给出了分析过程和评注，借此来引导读者掌握并归纳解题技巧，拓宽数学思维，提高应试能力；习题解析部分给出了《矩阵分析》教材中每章末的习题详细解答，便于读者自学．

衷心感谢长春理工大学李延忠教授对本书编写的指导和帮助．此外，在多年的教学过程中，许多老师和同学都对本书的原始讲义提出了宝贵意见和建议，在此一并致谢．

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者指正．

编者

2014 年 4 月

CONTENTS

目 录

第1章 线性空间与线性变换

一、基本要求

1. 理解线性空间的概念，掌握向量组的线性表示、线性相关和线性无关的概念与性质.

2. 掌握线性空间的基、维数、向量的坐标的定义及求法，掌握一些常用线性空间的基与维数.

3. 掌握基变换与坐标变换.

4. 理解线性子空间的概念，重点理解生成子空间、矩阵的核(零)空间与值域的概念.理解子空间的交与和，了解子空间的直和.

5. 掌握线性变换的概念、线性变换的矩阵表示以及一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系.

6. 会求线性变换(矩阵)的特征值及特征向量，理解它们的性质.

7. 理解线性变换的不变子空间的定义及性质.

二、基本内容

1. 线性空间

线性空间的概念建立于非空集合 V 与数域 F 之上，其中的加法运算和数乘运算(合称为线性运算)不仅要满足封闭性，即

(1) 对于任意的 $x,y\in V$，有 $x+y\in V$；

(2) 对于任意的 $x\in V$ 及任意的 $k\in F$，有 $kx\in V$.

而且还要满足相应的八条运算律. n 维线性空间可记为 V_n(或 V^n).

常用的线性空间有以下几类：

(1) 数组向量空间：

实行向量空间 $\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in\mathbb{R}\}$；

实列向量空间 $\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\,|\,a_i\in\mathbb{R}\}$；

复行向量空间 $\mathbb{C}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in\mathbb{C}\}$；

复列向量空间 $\mathbb{C}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\,|\,a_i\in\mathbb{C}\}$.

(2) 矩阵空间：

实矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbb{R}\}$；

复矩阵空间$\mathbb{C}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbb{C}\}$.

(3) 多项式空间：

实多项式空间$\mathbb{R}[t]_n=\{a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}\mid a_i\in\mathbb{R}\}$；

复多项式空间$\mathbb{C}[t]_n=\{a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}\mid a_i\in\mathbb{C}\}$.

2. 子空间

设 V 为数域 F 上的线性空间，W 是 V 的非空子集，则 W 是 V 的子空间的充分必要条件是

(1) $\forall\alpha,\beta\in W,\alpha+\beta\in W$（加法运算封闭）；

(2) $\forall\alpha\in W,\forall k\in F,k\alpha\in W$（数乘运算封闭）.

常用的线性子空间有以下几类：

(1) 生成子空间 $L(x_1,x_2,\cdots,x_m)$或记为 $\mathrm{span}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$：设 V 是数域 F 上的线性空间，$x_i\in V(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m\mid k_i\in F\};$$

(2) 矩阵的值域 $R(\boldsymbol{A})$：设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$的列向量组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，则 $R(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\{\boldsymbol{Ax}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\}$；

(3) 矩阵的零空间 $N(\boldsymbol{A})$：设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则

$$N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\},$$

即为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间；

(4) 线性变换的像集（或值域）$\sigma(V)$（或 $R(\sigma)$）：设 σ 是线性空间 V 的线性变换，则 $\sigma(V)=\{\sigma(x)\mid x\in V\}$；

(5) 线性变换的核 $\sigma_{-1}\{0\}$（或 $N(\sigma)$）：设 σ 是线性空间 V 的线性变换，则

$$\sigma_{-1}\{0\}=\{x\mid\sigma(x)=0,x\in V\};$$

(6) 线性变换的特征子空间 V_λ：设 λ 是线性空间 V 中线性变换 σ 的一个特征值，则

$$V_\lambda=\{x\mid\sigma(x)=\lambda x,x\in V\}.$$

线性子空间 V_1 与 V_2 的交与和仍为线性子空间，且有如下结论：

(1) 维数公式

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

(2) 下面四种说法等价：

①V_1+V_2 是直和；

②V_1+V_2 中零元素的分解式唯一；

③$V_1\cap V_2=\{0\}$；

④$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

(3) 若 V_1+V_2 是直和，则将 V_1 的基与 V_2 的基拼接起来可构成 V_1+V_2 的基.

(4) 若 $V_1=L(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$V_2=L(y_1,y_2,\cdots,y_l)$，则

$$V_1+V_2=L(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_l).$$

(5) 设 V 的一个基为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则 $V=L(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

3. 线性空间的基

线性空间的基指线性空间 V 中满足下列条件的向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$：

①$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关；

②任意 $x\in V$ 都可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示.

(1) 向量空间$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$的简单基为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为1，其余分量为0的 n 维向量.

(2) 矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$的简单基为 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$，其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列元素为1，其余元素为0的 $m\times n$ 矩阵.

(3) 多项式空间 $P_n[t]$的简单基为 $1,t,\cdots,t^{n-1}$.

(4) 生成空间 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$中，生成元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 W 的一组基.

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组是 $R(\boldsymbol{A})$的基.

(6) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是 $N(\boldsymbol{A})$的基.

下面是求 $\sigma(V)$，$\sigma_{-1}\{0\}$及 V_λ 的基的方法.

设线性空间 V 的一个基为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，线性变换 σ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，记 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$，则有

(7) 求出 $R(\boldsymbol{A})$的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$(列向量)，那么 $R(\sigma)$的一个基为

$$y_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,y_r=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

(8) 求出 $N(\boldsymbol{A})$的一个基为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$(列向量)，那么 $N(\sigma)$的一个基为

$$z_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,z_{n-r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\beta}_{n-r}.$$

(9) 求出 $N(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的一个基为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_l$(列向量)，那么 V_λ 的一个基为

$$u_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,u_l=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{\gamma}_l.$$

4. 基变换公式和坐标变换公式

过渡矩阵是以线性空间的一个基中各元素在另一个基下的坐标为列向量构成的方阵.

已知 n 维线性空间 V 的两个基为(Ⅰ)$x_1,x_2,\cdots,x_n$；(Ⅱ)$y_1,y_2,\cdots,y_n$. 设 y_i 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$，则由基(Ⅰ)变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，基变换公式为

$$\begin{aligned}(y_1,y_2,\cdots,y_n)&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{C},\\(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=(y_1,y_2,\cdots y_n)\boldsymbol{C}^{-1}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

设线性空间 V 的一个基为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，对于任意 $x\in V$，有 $x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，则 x 在该基下的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

设基变换公式为(1.1)式，$x\in V$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标(列向量)分别为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，则有坐标变换公式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C\beta}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

5. 线性变换的矩阵

线性变换的矩阵是以线性空间的基中各元素在线性变换下的像在该基下的坐标为列向量构成的方阵.

设线性空间 V 的一个基为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，线性变换为 σ，基像组 $\sigma(x_1),\sigma(x_2),\cdots,\sigma(x_n)$ 在该基下的坐标依次为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，则 σ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，且有

$$\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xlongequal{\text{def}}(\sigma(x_1),\sigma(x_2),\cdots,\sigma(x_n))=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}.$$

已知线性空间 V 的两个基分别为(Ⅰ) $x_1,x_2,\cdots,x_n$；(Ⅱ) $y_1,y_2,\cdots,y_n$，且由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，线性变换 σ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$x\in V$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\alpha}$，则有

(1) $\dim\sigma(V)=\text{rank}(\boldsymbol{A})$. $\dim\sigma_{-1}\{0\}=n-\text{rank}(\boldsymbol{A})$.

(2) $\sigma(x)$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{A\alpha}$.

(3) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

(4) σ 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同，σ 的对应于特征值 λ 的特征向量在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，在基(Ⅱ)下的坐标为 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。

(5) 在 V 中存在某个基使 σ 在该基下的矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$. 此时，$\boldsymbol{P}$ 是由基(Ⅰ)变为这个基的过渡矩阵.

设 σ,τ 是 V 上的两个线性变换，$\forall\alpha\in V$，有如下定义：

(1) 两个线性变换之和 $\sigma+\tau$ ：$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$.

(2) 数乘线性变换 $k\sigma$：$(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

(3) 两线性变换之积 $\sigma\tau$ ：$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))$.

(4) σ 与 τ 互为可逆线性变换：$\sigma\tau=\tau\sigma=1^*$（$1^*$ 为恒等变换）.

设线性变换 σ,τ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则

(1) $\sigma+\tau\Leftrightarrow\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；

(2) $k\sigma\Leftrightarrow k\boldsymbol{A}$；

(3) $\sigma\tau\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}$；

(4) $\sigma\tau=\tau\sigma=1^*\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

6. 线性变换的不变子空间

设 σ 是线性空间 V 的线性变换，则有

(1) $\sigma(V)$，$\sigma_{-1}\{0\}$ 及 V_λ 都是 σ 的不变子空间.

(2) 若 V_1 和 V_2 都是 σ 的不变子空间，则 $V_1\cap V_2$ 与 V_1+V_2 也是 σ 的不变子空间.

(3) 若 V 可分解为 σ 的不变子空间 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的直和，则 σ 在由 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的基拼接而构成 V 的基下的矩阵为准对角矩阵.

(4) 若 σ 在 V 的某个基下的矩阵为准对角矩阵 $\text{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m)$，则 V 可分解为 σ 的 m 个不变子空间的直和.

三、典型例题

例 1 设 V 是数域 F 上的线性空间，证明：

(1) 对于任意的 $x\in V$，有 $0x=0$；

(2) 对于任意的 $k\in F$，有 $k0=0$；

(3) 对于任意的 $x\in V$，有 $(-1)x=-x$.

证　根据 V 中的线性运算规则，有

$$\begin{aligned}0x&=0x+[x+(-x)]=(0x+x)+(-x)=(0x+1x)+(-x)\\&=(0+1)x+(-x)=1x+(-x)=x+(-x)=0;\\k0&=k0+[kx+(-kx)]=(k0+kx)+(-kx)=k(0+x)+(-kx)\\&=kx+(-kx)=0;\\(-1)x&=(-1)x+[x+(-x)]=[(-1)x+1x]+(-x)\\&=[(-1)+1]x+(-x)=0x+(-x)=0+(-x)=-x.\end{aligned}$$

例 2　判别下列集合对所指运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(1) 次数等于 $m(m\geqslant 1)$ 的实系数多项式的集合，对于多项式的加法和数与多项式的乘法；

(2) 实对称矩阵的集合，对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法；

(3) 平面上全体向量的集合，对于通常的加法和如下定义的数乘运算 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

解　(1) 否. 因为两个 m 次多项式相加不一定还是 m 次多项式，所以对加法运算不封闭.

(2) 是.

(3) 否. 因为 $x\neq 0$ 时，$1\cdot x=0\neq x$.

例 3　设数域为 $\mathbb{R}$，集合为 $V=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2),\xi_i\in\mathbb{R}\}$，对于 $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_1,\xi_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(\eta_1,\eta_2)$ 及 $k\in\mathbb{R}$，指定线性运算如下：

加法运算　$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)$，

数乘运算　$\boldsymbol{k}\odot\boldsymbol{\alpha}=\left(k\xi_1,k\xi_2+\dfrac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2\right)$，

判断 V 是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

解　易见，$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\in V$，$k\odot\boldsymbol{\alpha}\in V$，即线性运算封闭. 再设 $\boldsymbol{\gamma}=(t_1,t_2)\in V$ 及 $l\in\mathbb{R}$，则有

(1) $$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\oplus(\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\gamma})&=(\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1+t_1,\eta_2+t_2+\eta_1t_1)\\&=(\xi_1+(\eta_1+t_1),\xi_2+(\eta_2+t_2+\eta_1t_1)+\xi_1(\eta_1+t_1))\\&=((\xi_1+\eta_1)+t_1,(\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)+t_2+(\xi_1+\eta_1)t_1))\\&=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)\oplus(t_1,t_2)=(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma};\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=(\eta_1+\xi_1,\eta_2+\xi_2+\eta_1\xi_1)=\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}$；

(3) 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，由 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 可得

$$(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=(\xi_1,\xi_2),$$

即 $\xi_1+\eta_1=\xi_1$，$\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1=\xi_2$，解得 $\eta_1=0$，$\eta_2=0$，于是 $\boldsymbol{0}=(0,0)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) 对于任意给定的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，由 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 可得

$$(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=(0,0),$$

即 $\xi_1+\eta_1=0$，$\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1=0$. 解得 $\eta_1=-\xi_1$，$\eta_2=\xi_1^2-\xi_2$，于是 $-\boldsymbol{\alpha}=(-\xi_1,\xi_1^2-\xi_2)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\oplus(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$；

(5) $$\begin{aligned}(k\odot\boldsymbol{\alpha})\oplus(k\odot\boldsymbol{\beta})&=\left(k\xi_1,k\xi_2+\frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2\right)\oplus\left(k\eta_1,k\eta_2+\frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2\right)\\&=\left(k\xi_1+k\eta_1,k\xi_2+\frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2+k\eta_2+\frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2+(k\xi_1)(k\eta_1)\right)\end{aligned}$$

$$=\left(k(\xi_1+\eta_1),k(\xi_2+\eta_2)+\frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1^2+\eta_1^2)+k^2\xi_1\eta_1\right)$$
$$=\left(k(\xi_1+\eta_1),k(\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)+\frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1+\eta_1)^2\right)$$
$$=k\odot(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2+\xi_1\eta_1)=k\odot(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta});$$

(6) $(k\odot\boldsymbol{\alpha})\oplus(l\odot\boldsymbol{\alpha})=\left(k\xi_1,k\xi_2+\frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2\right)\oplus\left(l\xi_1,l\xi_2+\frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2\right)$

$$=\left(k\xi_1+l\xi_1,k\xi_2+\frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2+l\xi_2+\frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2+(k\xi_1)(l\xi_1)\right)$$
$$=\left((k+l)\xi_1,(k+l)\xi_2+\frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)\xi_1^2\right)=(k+l)\odot\boldsymbol{\alpha};$$

(7) $k\odot(l\odot\boldsymbol{\alpha})=k\odot\left(l\xi_1,l\xi_2+\frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2\right)$

$$=\left((kl\xi_1,kl\xi_2+\frac{1}{2}kl(l-1)\xi_1^2+\frac{1}{2}k(k-1)(l\xi_1)^2\right)$$
$$=\left((kl)\xi_1,(kl)\xi_2+\frac{1}{2}(kl)(kl-1)\xi_1^2\right)=(kl)\odot\boldsymbol{\alpha};$$

(8) $1\odot\boldsymbol{\alpha}=\left(1\xi_1,1\xi_2+\frac{1}{2}\times1\times(1-1)\xi_1^2\right)=(\xi_1,\xi_2)=\boldsymbol{\alpha}.$

综上，八条运算律成立. 故 V 构成$\mathbb{R}$ 上的线性空间，记作$\mathbb{R}^2(\oplus,\odot)$.

评注 给定了数域 F 与集合 V，如果指定的线性运算方式不同，那么 V 可构成 F 上的线性空间，也可能不构成 F 上的线性空间；另外，对于一个具体的线性空间，如果指定的线性运算方式不是通常的，那么相应的零元素和负元素可能与通常的形式不同，例如本题给出的线性空间$\mathbb{R}^2(\oplus,\odot)$中的负元素形式与通常形式不同.

例 4 试证：所有 n 阶实对称矩阵组成$\frac{n(n+1)}{2}$维线性空间；所有 n 阶实反对称矩阵组成$\frac{n(n-1)}{2}$维线性空间.

证 用 $\boldsymbol{E}_{ii}\,(i=1,2,\cdots,n)$表示 n 阶矩阵中除第 i 行，第 i 列的元素为 1 外，其余元素全为 0 的矩阵. 用 $\boldsymbol{E}_{ij}\,(i<j,i=1,2,\cdots,n-1)$表示 n 阶矩阵中除第 i 行第 j 列元素与第 j 行第 i 列元素为 1 外，其余元素全为 0 的矩阵.

显然，$\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 都是对称矩阵，$\boldsymbol{E}_{ii}$ 有 n 个，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 有$\frac{n(n-1)}{2}$个. 不难证明 $\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 是线性无关的，且任何一个对称矩阵都可用这 $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$个矩阵线性表示，即对称矩阵组成$\frac{n(n+1)}{2}$维线性空间.

同样可证所有 n 阶反对称矩阵组成的线性空间的维数为$\frac{n(n+1)}{2}$.

评注 求线性空间(子空间)的基的方法：

(1) 根据线性空间的构成规律，找出其中的一组特殊元素，使得线性空间的一般元素都可由这组元素线性表示.

(2) 若这组元素线性无关，则它就是线性空间的基；若这组元素线性相关，则它的一个极大线性无关组就是线性空间的基.

例 5　(1) $V_1=\{(x_1,x_2,x_3)\mid 2x_1-x_2=0\}$,求 V_1 的基及维数.

(2) $V_2=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{3\times3}\}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,求 V_2 的基及维数.

解　(1) $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\in V_1$,有 $2x_1-x_2=0$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,2x_1,x_3)=x_1(1,2,0)+x_3(0,0,1),$$

这表明 V_1 中任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)$线性表示,且易见 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的一组基,$\dim V_1=2$.

(2) 令

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{bmatrix}x_1+x_4&x_2+x_5&x_3+x_6\\x_4+x_7&x_5+x_8&x_6+x_9\\x_7&x_8&x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_1+x_2&x_2+x_3\\x_4&x_4+x_5&x_5+x_6\\x_7&x_7+x_8&x_8+x_9\end{bmatrix}.$$

由其对应关系解得

$$x_4=x_7=x_8=0,\ x_1=x_5=x_9,\ x_2=x_6,\ x_3\text{ 任意}.$$

令 $x_1=x_5=x_9=a$,$x_2=x_6=b$,$x_3=c$,就有

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

可以证明

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

是线性无关的,故 $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2$,$\boldsymbol{A}_3$ 是 V_2 的基,$\dim V_2=3$.

例 6　设 $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$,$\boldsymbol{x}_3$ 是$\mathbb{R}^3$的一个基,试求由 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3$,$\boldsymbol{y}_2=2\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3$,$\boldsymbol{y}_3=4\boldsymbol{x}_1+13\boldsymbol{x}_2$ 生成的子空间 $L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$的基.

解　$L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$的基为 $\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$,$\boldsymbol{y}_3$ 的一个极大无关组.在基 $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$,$\boldsymbol{x}_3$ 下,$\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$,$\boldsymbol{y}_3$ 的坐标依次为$(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,$(2,3,2)^{\mathrm{T}}$,$(4,13,0)^{\mathrm{T}}$,该列向量组的一个极大无关组为$(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$,$(2,3,2)^{\mathrm{T}}$.因此,$\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$,$\boldsymbol{y}_3$ 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$,即 $L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$的一个基为 $\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$.

例 7　求$\mathbb{R}^4$的子空间

$$V_1=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\mid \xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0\},$$
$$V_2=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\mid \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0\}$$

的交 $V_1\cap V_2$ 的基.

解　设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in V_1\cap V_2$,则 $\boldsymbol{x}$ 的分量满足

$$\begin{cases}\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0,\\ \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0.\end{cases}$$

这一方程组的基础解系为$(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,从而 $V_1\cap V_2$ 的一组基为$(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$.

例 8 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7)^{\mathrm{T}}$,求 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$与 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的和与交的基和维数.

解 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,由于秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=3$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个极大线性无关组,所以和空间的维数是 3,基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$.

下面求交空间的基和维数.

方法一 设 $\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,于是由交空间定义可知

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-l_1\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-l_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}=0,$$

解得

$$k_1=-l_2,k_2=4l_2,l_1=-3l_2(l_2\text{ 为任意数}).$$

于是

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=l_2(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

所以交空间的维数为 1,基为$(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

方法二 不难得知

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2'),\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2'),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_2'=(-2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2'=\left(-\dfrac{13}{3},2,1,0\right)^{\mathrm{T}}$,又 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2')$也是线性方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3-2x_4,\\x_2=2x_3-x_4\end{cases}$$

的解空间. $\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2')$是线性方程组.

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{13}{3}x_3+2x_4,\\x_2=2x_3-x_4\end{cases}$$

的解空间,所以所求的交空间就是线性方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3-2x_4,\\x_2=2x_3-x_4,\\x_1=-\dfrac{13}{3}x_3+2x_4,\\x_2=2x_3-x_4\end{cases}$$

的解空间,容易求出其基础解系为$(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,所以交空间的维数为 1,基为$(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

评注 本题有几个知识点是很重要的.

(1) $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$的基底就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组,其维数等于秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

(2) $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$.

(3) 方法一的思路：求交 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 就是求向量 $\boldsymbol{\xi}$，既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的那部分向量.

(4) 方法二的思路：借用"两个齐次线性方程组解空间的交空间就是联立方程组的解空间"，将本题已知条件改造为齐次线性方程组来求解.

例 9　求$\mathbb{R}^3$中向量 $\boldsymbol{x}=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{x}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标.

解　设 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3$，比较等号两端向量的对应分量可得线性方程组

$$\begin{bmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\\1\end{bmatrix},$$

其唯一解为 $k_1=33$，$k_2=-82$，$k_3=154$. 因此，$\boldsymbol{x}$ 的坐标为$(33,-82,154)^{\mathrm{T}}$.

例 10　求 $P[t]_2$ 中向量 $1+t+t^2$ 在基 $1,t-1,(t-2)(t-1)$下的坐标.

解　设 $1+t+t^2=k_1\cdot1+k_2(t-1)+k_3(t-2)(t-1)$，比较等号两端关于 t 的同次幂的系数可得

$$\begin{cases}k_1-k_2+2k_3=1,\\k_2-3k_3=1,\\k_3=1,\end{cases}$$

解得 $k_3=1$，$k_2=4$，$k_1=3$. 因此，$1+t+t^2$ 的坐标为$(3,4,1)^{\mathrm{T}}$.

例 11　在$\mathbb{R}^{2\times2}$中求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$下的坐标.

解　方法一　设 $\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{E}_1+x_2\boldsymbol{E}_2+x_3\boldsymbol{E}_3+x_4\boldsymbol{E}_4$，即

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4&x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2&x_1\end{bmatrix},$$

于是

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1,\qquad x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_1+x_2=0,\qquad x_1=3,$$

解得

$$x_1=3,\qquad x_2=-3,\qquad x_3=2,\qquad x_4=-1,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为$(3,-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

方法二　应用同构的概念，$\mathbb{R}^{2\times2}$是一个四维空间，并且可将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看作$(1,2,0,3)^{\mathrm{T}}$，将

$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 看作$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,1,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 于是经过初等行变换有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&0&2\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix},$$

因此,$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为$(3,-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

方法三 应用中介基方法,选取$\mathbb{R}^{2\times 2}$的简单基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

则由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为$(1,2,0,3)^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

例 12 设四维线性空间 V 的基(Ⅰ)x_1,x_2,x_3,x_4 和基(Ⅱ)y_1,y_2,y_3,y_4 满足

$$\begin{cases}x_1+2x_2=y_3,\\x_2+2x_3=y_4,\\y_1+2y_2=x_3,\\y_2+2y_3=x_4.\end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

(2) 求向量 $x=2y_1-y_2+y_3+y_4$ 在基(Ⅰ)下的坐标.

解 (1) 解出 y_1,y_2,可得

$$y_1=4x_1+8x_2+x_3-2x_4,\qquad y_2=-2x_1-4x_2+x_4,$$

又因为

$$y_3=x_1+2x_2,\qquad y_4=x_2+2x_3,$$

于是,由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{bmatrix}.$$

(2) x 在基(Ⅱ)下的坐标为$(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,由坐标变换公式计算 x 在基(Ⅰ)下的坐标为

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\23\\4\\-5\end{bmatrix}.$$

评注 设 n 维线性空间 V 的两个基分别为(Ⅰ)$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和(Ⅱ) $y_1,y_2,\cdots,y_n$,由基(Ⅰ)变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,那么求过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有下述方法.

(1) 直接法:

①计算 y_j 在基(Ⅰ)下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$;

②写出 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

(2) 中介法:

①选取 V 的简单基,使 V 的元素在该基下的坐标能够直接写出;

②分别写出由简单基改变为基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$;

③计算 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$.

例 13 (1)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$,证明它们是$\mathbb{R}^4$的基,并求 $\boldsymbol{\beta}=(2,2,4,1)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标.

(2) 证明 $x^3,x^2+x,x^2+1,x+1$ 是多项式空间 $P_4[x]$的一组基,并求 x^3+x^2+2x+3 在此基下的坐标.

解 (1) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的,它们是$\mathbb{R}^4$的基.

令

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4,$$

得非齐次方程组

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\\1\end{bmatrix},$$

解得 $\boldsymbol{X}=(1,2,-3,2)^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4$.

(2) 选取标准基,使得各向量在标准基下用坐标来表示.在标准基 $1,x,x^2,x^3$ 下,向量 $x^3,x^2+x,x^2+1,x+1$ 的坐标分别为 $\boldsymbol{X}_1=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_4=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与(1)的证法一样,易知它们是 $P_4[x]$的一组基. x^3+x^2+2x+3 在 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=(3,2,1,1)^{\mathrm{T}}$,则

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+k_3\boldsymbol{X}_3+k_4\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{Y},$$