高校核心课程学习指导丛书

线性代数学习指导

XIANXING DAISHU
XUEXI ZHIDAO

李尚志/编著

中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

李尚志/编著

线性代数学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是理工科院校本科生学习高等代数和线性代数课程的学习辅导书，也可以作为其他读者学习和应用线性代数知识的参考书.

本书按照编者编写的教材《线性代数(数学专业用)》(北京，高等教育出版社，2006.5)的章节逐一对应编写，也涵盖了《线性代数》(北京，高等教育出版社，2011.6)的全部内容；各节通过知识导航简要地引入主要知识内容，通过对典型例题的分析、解答、点评，介绍线性代数的基本思想方法；通过“借题发挥”围绕若干个专题介绍利用线性代数思想方法解决实际问题和理论问题的生动实例；还包含了一些后续课程的重要思想方法和内容.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/李尚志编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-312-03426-8

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 110602 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷 合肥华星印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm　1/16
印张 33.25
字数 809 千
版次 2015 年 1 月第 1 版
印次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定价 58.00 元

前　言

线性代数是大学数学最重要的基础课程之一. 本书的目的是帮助广大学生和其他读者学好这门课程, 掌握线性代数的思想方法, 提高利用线性代数思想方法解决问题的能力. 本书可以作为编者分别为数学专业和非数学专业编写的教材《线性代数 (数学专业用)》(北京, 高等教育出版社, 2006.5, 书中简称为教材 [1]) 和《线性代数》(北京, 高等教育出版社, 2011.6, 书中简称为教材 [2]) 的配套辅导书, 也可作为学习其他线性代数教材的参考书.

大多数课程的辅导书都由两大部分组成：一部分是对课程各章主要内容的概括性介绍, 包括基本概念、基本理论、运算技巧、重点和难点; 另一部分是具有代表性的大量问题的解答和分析. 本书也包括了这两部分, 但具有如下特色:

在介绍各章主要内容的时候, 除了介绍知识和算法, 还通过通俗易懂、引人入胜的例子, 展现了知识引入和发明的主要思路. 编者在为非数学专业编写的《线性代数》教材的内容提要中强调: “本书不是奉天承运皇帝诏曰从天而降的抽象定义和推理, 而是一部由创造发明的系列故事组成的连续剧.” 这本辅导教材也在一定程度上体现了这种风格. 书中各章节对课程内容的介绍没有采用“学习要点”“解题方法” 等常规标题, 而是采用 “知识引入例”“知识导航” 这样的标题, 不是故意作秀, 而是确实希望起到导航作用. 项羽小时候游手好闲, 长辈让他学剑法, 他不干, 说剑法是 “一人敌”, 他要学 “万人敌”, 于是学了兵法, 后来指挥千军万马灭掉了秦军主力, 成为一代英雄. 兵法就是 “万人敌”. 线性代数的具体知识和算法可以说是 “剑法”, 指导思想才是 “兵法”, 编者希望让读者对线性代数的 “兵法” 有所体会, 让 “剑法” 在 “兵法” 的指挥下发挥巨大威力.

习题解答是大部分辅导教材的主要内容, 也是很多学生和教师需要辅导教材的主要原因. 学生不会做教材上的习题, 完成作业有困难, 考试更有困难, 希望找到习题答案. 有些习题甚至课程的主讲老师和助教也不会做, 影响教学任

务的完成. 教师和学生对习题解答有强烈的需求. 因此, 影响较大的教材, 几乎都有人 (作者本人或其他人) 做出习题解答, 大受欢迎. 然而, 习题解答在很多时候提供的不是正能量而是负能量. 由于有了习题解答, 不少学生懒得花时间和精力独立思考, 做作业就抄习题解答去交差. 做习题是为了熟练掌握知识, 培养灵活运用知识解决问题的能力, 就好比到操场跑圈锻炼身体. 照抄习题解答就好比坐着汽车到操场转圈, 不能起到锻炼身体的作用. 因此, 很多教师不主张出版习题解答. 我本人主编和参加编写的教材也都不编写习题解答. 这确实对那些具有较强的主动学习意愿和能力的老师、学生和其他读者起到了促进其独立思考的作用. 但另一方面, 也有不少人难以通过自己的独立思考解答习题, 因而影响了对教材的使用效果, 甚至因此而放弃了对教材的使用. 很多读者反映, 即使做出了习题也不知道是否正确. 我们不编写习题解答的目的本来是希望读者独立思考, 但如果读者因此干脆不去做那些题, 或者干脆不读我们的书, 岂不是离独立思考更远了? 对于那些愿意独立思考的读者, 即使有了习题解答也仍然可以先自己思考再去看习题解答. 至于那些不愿意自己思考而直接看解答的读者, 看解答虽然不如自己思考, 但看了解答总比不做题目好. 而且如果看懂了这个题目的解答后能够举一反三做出另外的类似的题目, 那就是真正地懂了.

基于这个考虑, 本书将教材的很多习题作为典型例题给出了解答. 但是我们不希望读者将这些解答作为从天而降的圣旨来照抄或者死记硬背, 记住每个题的解答只会做这一个题. 因此, 在其中很多习题的解答之前先给出了"分析", 不是讲这个题怎么做, 而是讲这个题怎么想. 解答经常是繁琐的, 想法却往往是简单的. 解法经常是"莫名其妙"从天而降, 想法却必须是自然而然、顺理成章、水到渠成. 自然而然的想法有时是错的, 最自然的做法也是按这个想法先走几步, 发现这条道路的错误之后再改弦更张走上正确的道路. 习题的解答好比"剑法", 习题的分析就是"兵法", 我们希望读者不要只重视解答而不重视分析, 只重视做法而不重视想法, 只重视"剑法"而不重视"兵法". 解答、做法、"剑法"只能解决一道题, 分析、想法、"兵法"才能帮助你举一反三、触类旁通、解决一大批类似的题. 想法不见得是唯一的, "条条道路通罗马", 我们尽量介绍一种或几种最容易想到又具有推广价值的想法供读者参考. 读者可以采纳, 也可以自己另辟蹊径. 还有些典型例题本来就是教材正文的例题, 特别是教材各章最后一节"更多的例子"中的例题, 本来可以让读者直接去看教材正文中的解答. 但考虑到这些例题太重

要太有用，有些甚至是别的教材中的定理，为了便于那些没有配套教材的读者独立使用本书，我们也将这些问题按典型例题处理，给出了分析、解答、点评.

除了在例题解答之前通过分析来介绍解题思路，本书的另一个特点是习题解答之后的点评和借题发挥. 点评的内容，有的是介绍这个题的背景，说明选用这个题希望达到的目的；有的是对同一个题的各种解法的优缺点进行比较；还有的点评是将这个题的解法推广到更一般的情况，解决更广泛的一类问题. 有的习题用到的解法和知识涉及比较系统的某个专题和知识领域，简短的点评意犹未尽，索性多说些话，扩充成一个专题讲座，称为“借题发挥”. 其中有些专题是利用线性代数的知识和方法来解决某一类应用问题，例如幻方的设计、求解线性递归关系；有些专题则是后续课程的一些内容，例如矩阵论中的广义逆、利用矩阵的指数函数求解常系数常微分方程组，等等. 我曾经学过的两本教材——维诺格拉多夫的《数论基础》、阿蒂亚的《交换代数导引》给我留下了深刻印象. 这两本教材的正文叙述比较简明，但习题很难很多. 其中有些习题其实是更高级的课程例如解析数论、代数几何中的一些基本概念和重要定理. 作者不是直接讲解这些概念和定理，而是设计一系列的习题让读者在做这些习题的过程中不知不觉发现这些概念和定理. 受这两本教材的启发和影响，我在线性代数教材中也围绕一些不便于直接讲述的相关知识设计了一系列习题，让读者在做这些习题的过程中不知不觉发现这些知识. 但是，我自己在一开始做《数论基础》和《交换代数导引》的习题的时候并不知道其中暗藏着相关课程的知识，只是就事论事将题目做出来，并没有领会到其中的奥妙. 在北京大学听了丁石孙先生主讲的“交换代数”课，丁先生一语道破了习题中暗藏的代数几何知识，才恍然大悟，豁然开朗. 如果自己不去做这些题，当然不会豁然开朗. 只是自己去做而没有老师指点，也不会豁然开朗. 有鉴于此，在这本学习辅导书上通过点评和借题发挥等形式介绍我自己的教材上这些习题的真实目的，引导那些愿意花功夫的读者沿着这些习题铺成的路径走得更远.

本书还有一个特色，就是将繁琐的计算任务交给计算机去完成. 学生学习线性代数课程有两大困难，一是抽象的概念，二是繁琐的运算. 本书每章开始的知识导航就是为了破除“抽象”这个难关，通过简单易懂的具体例子来引入概念，让学生明白“抽象”就是很多具体问题的共同点，就是比具体的“剑法”威力更大的“兵法”. 而要破除“繁琐”这个难关，最有效的方法是利用计算机. 学

生从小学就学了加减乘除运算，但在实际应用中的大量繁琐的加减运算都要借助于计算器或计算机. 学生在线性代数课程中花了很多时间学矩阵运算，也只能在考试时象征性地算一算 2 阶、3 阶方阵，但在实际应用时却需要算成百上千甚至更高阶的矩阵，手工运算基本不能胜任，只能借助于计算机. 人的任务不是去训练这些繁琐的运算，而是学会将所要解决的问题通过数学建模化为计算机可以计算的形式，再根据计算机得出的结果得出解决问题的方案. 本书所有的计算都通过具体例子给出了利用计算机软件 Mathematica 或 Matlab 计算的语句和运算结果，读者可以依样画葫芦，模仿这些例子进行各种运算，包括矩阵的加、减、乘、求逆、行列式、特征值、特征向量、若尔当标准形等各种运算. 有具体数据的计算题的答案都可以借助于计算软件来得出. 对计算题的这种解答方式跳出了只应付课程考试的小天地，更贴近实际应用的需要.

希望本书能够为每个需要学习线性代数的读者提供帮助.

目　　次

第 1 章　线性方程组的解法

知识引入例

例 1　求 $1^4+2^4+\cdots+n^4$.

分析　对任意正整数 k, 前 n 个正整数的 k 次幂和 $S_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 满足条件 $S_n-S_{n-1}=n^k$. 反过来, 如果函数 $f(n)$ 满足条件 $f(n)-f(n-1)=n^k$, 则

$$\begin{aligned}S_n&=1^k+2^k+\cdots+n^k=(f(1)-f(0))+\cdots+(f(n)-f(n-1))\\&=f(n)-f(0)\end{aligned}$$

特别地, 当 $f(0)=0$ 时 $S_n=f(n)$.

当 $f(n)=a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m$ 是自变量 n 的 m 次多项式时, 易见

$$f(n)-f(n-1)=a_1[n-(n-1)]+\cdots+a_m[n^m-(n-1)^m]$$

也是 n 的多项式, 最高次项为 a_mmn^{m-1}, 因此是 $m-1$ 次多项式. 取 $m=k+1$, $a_0=f(0)=0$, 用待定系数法求各项系数 $a_1,\cdots,a_{k+1}$ 使 $f(n)-f(n-1)=n^k$, 则 $f(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$.

解　求 5 次多项式 $f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4+a_5n^5$, 使

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=a_1[n-(n-1)]+a_2[n^2-(n-1)^2]+a_3[n^3-(n-1)^3]\\&\quad+a_4[n^4-(n-1)^4]+a_5[n^5-(n-1)^5]\\&=(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)+(2a_2-3a_3+4a_4-5a_5)n\\&\quad+(3a_3-6a_4+10a_5)n^2+(4a_4-10a_5)n^3+5a_5n^4\\&=n^4\end{aligned}$$

各项系数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 满足 5 元一次方程组

$$\begin{cases}a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0 & (1)\\2a_2-3a_3+4a_4-5a_5=0 & (2)\\3a_3-6a_4+10a_5=0 & (3)\\4a_4-10a_5=0 & (4)\\5a_5=1 & (5)\end{cases}$$

由下而上依次从各方程中解出 $a_5=\frac{1}{5},a_4=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{3},a_2=0,a_1=-\frac{1}{30}$. 得到

$$S_n=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n=\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30} \qquad \square$$

本例是一次方程组的一个应用例. 本例的一次方程组等式左边成“三角形”, 最后一个方程只含一个未知数 a_5, 可以先解出来, 代入上一个方程再求出 a_4, 由下而上依次求出各未知数的值.

很自然提出问题: 不是三角形方程组怎么办? 很自然想出办法: 通过同解变形变成三角形.

例 2 过平面直角坐标系中的三点 $(1,1),(2,2),(3,0)$ 作抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 求抛物线方程.

解 将抛物线上三点坐标代入方程 $y=ax^2+bx+c$, 得到待定系数 a,b,c 满足的方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} c+b+a=1 & (1)\\ c+2b+4a=2 & (2)\\ c+3b+9a=0 & (3)\end{cases}$$

这是多项式的待定系数 a,b,c 满足的三元一次方程组. 等式左边不是三角形, 通过同解变形变成三角形来解.

利用中学数学解二元一次方程组的加减消去法, 将方程组 (I) 中后面两个方程分别减去第 1 个方程, 得到两个新方程

$$(2)-(1): b+3a=1 \qquad (2')$$

$$(3)-(1): 2b+8a=-1 \qquad (3')$$

用方程 $(2'),(3')$ 分别取代方程组中的后两个方程 (2),(3), 得到新方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} c+b+a=1 & (1)\\ b+3a=1 & (2')\\ 2b+8a=-1 & (3')\end{cases}$$

原方程组 (I) 的解都是新方程组 (II) 的解. 反过来, 将方程组 (II) 的后两个方程 $(2'),(3')$ 分别加上方程 (1) 变成原方程 (2),(3), 由方程组 (II) 变回原方程组 (I), 可见新方程组 (II) 的解都是原方程组 (I) 的解. 方程组 (II) 与 (I) 同解.

再用方程组 (II) 中的方程 $(3')$ 减去方程 $(2')$ 的 2 倍, 得到新方程

$$t(3')-2\times(2'):\quad 2a=-3 \qquad (3'')$$

用新方程 $(3'')$ 取代方程组 (II) 的 $(3')$, 得到的新方程组

$$\mathrm{III}\begin{cases} c+b+a=1 & (1)\\ b+3a=1 & (2')\\ 2a=-3 & (3')\end{cases}$$

与方程组 (II) 同解, 从而与 (I) 同解. 方程组 (III) 左边是三角形, 可以依次解出

$$a=-\frac{3}{2},\quad b=\frac{11}{2},\quad c=-3$$

抛物线方程为 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}x-3$. □

例 2 求解方程组 (I) 的关键是通过同解变形消去方程组左边某些方程的未知数, 变成三角形. 将方程组 (I) 的后两个方程分别减去第 1 个方程, 也就是将第 1 个方程 (1) 的 -1 倍加到后两个方程 (2),(3) 消去 c, 得到方程组 (II). 将方程组 (II) 的第 2 个方程 $(2')$ 的 -2 倍加到第 3 个方程 $(3')$ 消去 b, 得到三角形方程组 (III).

一般地, 将任何一个方程组中任何一个方程的常数倍加到另一方程, 得到的新方程组与原方程组同解.

例 3　数列的前两项是 1,2, 第三项能否是 0?

分析　小学教师写出前两个数 1,2, 让学生猜下一个数, 往往是希望学生回答下一个数是 3. 如果猜下一个数是 4, 三个数 1,2,4 成等比数列, 也会认为是对的. 但如果猜下一个数是 0, 很可能被老师判为错误.

数列前三项能否依次为 1,2,0? 只要能够找出一个通项公式 $u_n=f(n)$ 使 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=0$, 得到的数列的前三项就是 1,2,0.

解　求通项公式

$$u_n=f(n)=an^2+bn+c$$

满足

$$f(1)=1,\quad f(2)=2,\quad f(3)=0.$$

也就是满足方程组

$$\begin{cases} c+b+a=1 \\ c+2b+4a=2 \\ c+3b+9a=0 \end{cases}$$

这就是例 2 中的方程组 (I). 例 2 中已经求得方程组的唯一解 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{11}{2},c=-3$.

通项公式为 $u_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{11}{2}n-3$ 的数列的前三项为 1,2,0.

前两项为 1,2 的数列的第三项可以是 0. □

例 2, 例 3 本来是不同的问题, 归结为同一个方程组来求解. 如果一个方法只能解决一个问题, 这叫做具体. 如果一个方法能够解决千千万万个不同的问题, 这叫做抽象. 抽象是数学的特点和特长, 也是数学的魅力和威力之所在.

1.1 线性方程组的同解变形

知识导航

1. 方程组的线性组合

定义 1.1.1 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的如下形式的方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1.1}$$

称为 n 元一次方程, 也称 ***n* 元线性方程** (linear equation in n variables), 其中一次项系数 $a_1,\cdots,a_n$ 和常数项 b 都是已知数.

如果 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个数, 且将 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 代入方程 (1.1) 能使方程变为等式, 即 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n=b$ 成立, 则这一组数 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为方程 (1.1) 的一个**解** (solution). 数组中的第 i 个数 c_i (即 x_i 的取值) 称为解的第 i 分量.

具有同样 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的若干个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

称为 ***n* 元线性方程组** (linear equations in n variables). 如果一组数 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是方程组 (1.2) 中所有方程的公共解, 也就是说: 将 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 代入方程组的每一个方程, 能使所有这些方程都变为等式, 就称这组数 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为这个方程组的解. □

将方程组 (1.2) 的各方程分别乘以已知常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 再相加, 得到的新方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

称为原方程组 (1.2) 的**线性组合** (linear combination), 也称为原方程组中各方程的线性组合, 其中 x_j 的系数 $a_j=\lambda_1a_{1j}+\lambda_2a_{2j}+\cdots+\lambda_ma_{mj}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 等于原方程组各方程的 x_j 的系数的线性组合, 常数项 $b=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_mb_m$ 等于原来各方程的常数项的线性组合. 如果将第 i 个方程乘 1, 其余方程都乘 0, 得到的线性组合就是第 i 个方程. 可见, 原方程组中每个方程都是整个方程组的线性组合. 如果将所有的方程都乘 0 再相加, 得到的线性组合就是恒等式 $0=0$.

定理 1.1.1 (1) 原方程组的每组解一定是原方程组的每个线性组合的解.

(2) 如果两个方程组互为线性组合, 这两个方程组同解. □

如果两个方程组 (I) 与 (II) 互为线性组合, 就称这两个方程组等价. 解方程组的基本方法, 就是将方程组通过适当的变形化简, 使每次变形前后的方程组等价, 直到最后得到的方程组的解可以立即写出来.

2. 基本的同解变形

定理 1.1.2　方程组的以下三种变形是同解变形:

(1) 交换其中任意两个方程的位置, 其余方程不变.

(2) 将任一个方程乘以一个非零常数 λ, 其余方程不变.

(3) 将任一方程的常数倍加到另一方程上, 其余方程不变. □

定理 1.1.2 所说的线性方程组的三类同解变形, 称为线性方程组的**初等变换** (elementary transformations). 反复利用这三种初等变换, 可以将线性方程组消元, 求出解来.

为叙述方便, 用如下符号表示以上三种同解变形, 其中箭头前后分别是变形前后的方程组, 箭头上方是对所采用的变形的说明.

(I) $\xrightarrow{(i,j)}$ (II).　(将原方程组 (I) 的第 i 个方程与第 j 个方程互换位置)

(I) $\xrightarrow{\lambda(i)}$ (II).　(将原方程组 (I) 第 i 方程乘非零常数 λ)

(I) $\xrightarrow{\lambda(i)+(j)}$ (II).　(将原方程组 (I) 第 i 方程的 λ 倍加到第 j 方程)

3. 数域

利用初等变换求解线性方程组, 总是将原方程组各方程的系数经过加减乘除运算得到新方程组的系数, 最后得出的解也由原方程组各方程的系数经过加减乘除得出. 如果原方程组的系数是有理数, 经过加减乘除得出的解一定还是有理数. 类似地, 系数如果都是实数, 经过加减乘除得出的一定还是实数.

定义 1.1.2　设 F 是复数集合的子集, 包含 0 和 1, 并且在加、减、乘、除运算下封闭 (做除法时除数不为 0), 就称 F 是**数域** (number field). □

如果线性方程组的系数都在某个数域 F 的范围内, 并且这个方程组有唯一解, 则解的分量也都在 F 的范围内.

重要例　复数集合 $\mathbf{C}$, 实数集合 $\mathbf{R}$, 有理数集合 $\mathbf{Q}$ 都是数域. □

例题分析与解答

1.1.1　(1) 求 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

(2) 求 $1^5+2^5+\cdots+n^5$.

解　(1) 求 4 次多项式 $f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4$ 使

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=a_1[n-(n-1)]+a_2[n^2-(n-1)^2]\\&\quad+a_3[n^3-(n-1)^3]+a_4[n^4-(n-1)^4]\\&=(a_1-a_2+a_3-a_4)+(2a_2-3a_3+4a_4)n\\&\quad+(3a_3-6a_4)n^2+4a_4n^3=n^3\end{aligned}$$

各项系数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足线性方程组

$$\begin{cases} a_1-a_2+a_3-a_4=0 \\ 2a_2-3a_3+4a_4=0 \\ 3a_3-6a_4=0 \\ 4a_4=1 \end{cases}$$

由下至上依次由各个方程解出

$$a_4=\frac{1}{4},\quad a_3=\frac{6}{3}a_4=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2}(3a_3-4a_4)=\frac{1}{4},\quad a_1=a_2-a_3+a_4=0$$

$$S_n=f(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(2) 求 6 次多项式 $f(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4+a_5n^5+a_6n^6$ 满足条件 $f(n)-f(n-1)=n^5$, 即 $f(n)$ 的各系数 a_i $(1\leqslant i\leqslant 6)$ 满足方程组

$$\begin{cases} a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=0 \\ 2a_2-3a_3+4a_4-5a_5+6a_6=0 \\ 3a_3-6a_4+10a_5-15a_6=0 \\ 4a_4-10a_5+20a_6=0 \\ 5a_5-15a_6=0 \\ 6a_6=1 \end{cases}$$

解之得 $(a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{12},0,-\frac{1}{12},0\right)$. 从而

$$S_n=1^5+2^5+\cdots+n^5=f(n)=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$ □

1.1.2 求二次函数 $y=f(x)$ 具有如下对应值:

x	2	3	4
y	7	16	29

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其中 a,b,c 是待定常数. 则

$$\begin{cases} f(2)=c+2b+4a=7 \\ f(3)=c+3b+9a=16 \\ f(4)=c+4b+16a=29 \end{cases} \xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)} \begin{cases} c+2b+4a=7 \\ b+5a=9 \\ b+7a=13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-(2)+(3)} \begin{cases} c+2b+4a=7 \\ b+5a=9 \\ 2a=4 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}(3),-4(3)+(1),-5(3)+(2)} \begin{cases} c+2b=-1 \\ b=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{cases} c=1 \\ b=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$f(x)=2x^2-x+1$$ □

1.1.3 用消元法解线性方程组:

$$(1)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=2 \\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$$

解 (1) 原方程组 $\xrightarrow{-2(1)+(2),-3(1)+(3)}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ -2x_2-x_3=0 \\ -x_2-8x_3=0 \end{cases} \xrightarrow{-2(3)+(2)} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 15x_3=0 \\ -x_2-8x_3=0 \end{cases}$$

由最后一个方程组第 2 个方程解出 $x_3=0$, 代入第 3 个方程解出 $x_2=0$, 再代入第 1 个方程解出 $x_1=1$.

原方程组有唯一解 $(1,0,0)$.

(2)　原方程组 $\xrightarrow{(2)+(1),(3)+(1),(4)+(1),\frac{1}{3}(1)}$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{10}{3} \\ x_1+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3=4 \end{cases} \xrightarrow{-(1)+(2),-(1)+(3),-(1)+(4)} \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{10}{3} \\ -x_2=-\dfrac{4}{3} \\ -x_3=-\dfrac{1}{3} \\ -x_4=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

由最后一个方程组后三个方程分别解出 $x_2=\dfrac{4}{3},x_3=\dfrac{1}{3},x_4=-\dfrac{2}{3}$. 代入第 1 个方程解出 $x_1=\dfrac{7}{3}$.

原方程组有唯一解 $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. □

1.1.4 (1) 证明: 任给 3 个数 y_1,y_2,y_3, 存在函数 $f(n)=an^2+bn+c$, 使以 $a_n=f(n)$ 为通项公式的数列的前 3 项为 y_1,y_2,y_3.

(2) 在一次智力测验中, 老师给了一个数列的前 3 项 1,2,3, 让学生填写第 4 项. 试证明: 无论在第 4 项填上什么数 y, 都存在一个函数 $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 使以 $a_n=f(n)$ 为通项公式的数列的前 4 项为 $1,2,3,y$.

解 (1) $f(n)$ 的各项系数 a,b,c 满足的充分必要条件为

$$\begin{cases} f(1)=c+b+a=y_1 \\ f(2)=c+2b+4a=y_2 \\ f(3)=c+3b+9a=y_3 \end{cases}$$