

分数阶及模糊系统的 稳定性分析与控制

宋晓娜 付主木 李 泽◎著



科学出版社

分数阶及模糊系统的 稳定性分析与控制

宋晓娜 付主木 李 泽 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据工程应用的实际需要,全面系统地介绍了分数阶及模糊系统的理论基础、稳定性分析、各种设计方法、主要实现技术、计算机模拟验证技术等问题。主要内容包括:分数阶线性系统的动态输出反馈控制和容错控制;分数阶时滞系统的控制器设计;分数阶非线性系统的 H_∞ 跟踪控制;模糊时滞系统的 H_∞ 控制与滤波、 H_∞ 观测器型控制与滤波、无源控制与 L_2-L_∞ 滤波、抗饱和控制;分数阶模糊系统的动态输出反馈控制,分别给出了各系统控制器的设计方法和仿真算例。

本书可供控制科学与工程、工业自动化、电气自动化、机电一体化、机械工程等专业的研究人员、研究生和高年级本科生参考,也可供控制系统设计工程师等相关工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶及模糊系统的稳定性分析与控制/宋晓娜,付主木,李泽著. —北京:科学出版社,2014

ISBN 978-7-03-042345-0

I. ①分… II. ①宋…②付…③李… III. ①模糊系统-稳定性-研究②模糊控制-研究 IV. ①N94②TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 253961 号

责任编辑:张海娜 高慧元 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:赵 博 / 封面设计:蓝正设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 3 月第一次印刷 印张:18 3/4

字数:365 000

定价:85.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

图书在版编目 (CIP) 数据

农业数字防灾减灾资源规划及相关问题研究 / 刘春年,
潘钦著. —北京: 经济科学出版社, 2014. 11
ISBN 978 - 7 - 5141 - 5153 - 4

I. ①农… II. ①刘…②潘… III. ①农村 - 灾害防治 -
研究 IV. ①X4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 254365 号

责任编辑: 段 钢
责任校对: 杨晓莹
责任印制: 邱 天

农业数字防灾减灾资源规划及相关问题研究

刘春年 潘 钦 著

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编辑部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191522

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件: [esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: [http: //jjkxcbs. tmall. com](http://jjkxcbs.tmall.com)

北京万友印刷有限公司印装

710 × 1000 16 开 16.25 印张 300000 字

2014 年 11 月第 1 版 2014 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5141 - 5153 - 4 定价: 48.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191502)

(版权所有 侵权必究 举报电话: 010 - 88191586)

电子邮箱: [dbts@ esp. com. cn](mailto:dbts@esp.com.cn)

前 言

在科学发展的过程中,很多新事物的产生都来源于所谓“in between”的思想。例如,模糊数学中“隶属函数”的概念,它突破了古典集合论中属于或不属于的绝对关系。同样,分数阶微积分学也基于这种“in between”思想,该领域的研究对使用传统整数阶微积分来描述自然界中的事物起到巨大的补充作用。追根求源,一方面,现实世界本质上是分数阶的,因此分数阶系统是一类特殊而又重要的复杂系统,是目前复杂非线性系统理论研究的一个国际前沿方向;另一方面,模糊系统的出现提高了复杂非线性系统的控制精度,T-S模糊系统可以看做一系列线性系统的加权平均,而加权平均系数正是一些非线性函数,从而可以使用比较成熟的线性系统理论来研究和描述一类非线性系统。近年来,对分数阶和模糊系统的研究已受到国内外众多科学工作者的高度重视,所涉及的领域日益广泛,已在学术界掀起了分数阶和模糊系统理论及应用研究的高潮。目前,对于分数阶和模糊系统,各自现有的研究成果已很丰富。正是基于“in between”的思想,分数阶及模糊系统近年来得到了一定的发展,但有关分数阶及 T-S 模糊系统的一些基础理论仍有许多深层次的问题亟待解决。

作者近年来一直从事分数阶及模糊系统的研究工作,深感有必要结合该领域的新成果、新进展和新趋势撰写一部学术著作,对分数阶系统、模糊系统、分数阶模糊系统相关控制理论与方法及其应用进行系统的介绍,并希望本书的出版能够对该领域的研究和应用起到一定的推动作用。

本书全面系统地介绍了分数阶及模糊系统的理论基础、稳定性分析、各种设计方法、主要实现技术、计算机模拟验证技术等问题。主要内容包括:分数阶线性系统的动态输出反馈控制;执行器或传感器故障下的容错控制;分数阶时滞系统的分析与控制;分数阶非线性系统的 H_∞ 跟踪控制;模糊时滞系统的 H_∞ 控制与滤波、 H_∞ 观测器型控制与滤波、无源控制与 L_2 - L_∞ 滤波、连续/离散时间系统的抗饱和控制,前件变量可测/不可测情况下的分数阶模糊系统的动态输出反馈控制,分别给出了各系统控制器的设计方法和仿真算例。

全书共 11 章。其中,第 1~4、11 章由付主木撰写,第 5 章由李泽撰写,第 6~10 章由宋晓娜撰写,宋晓娜和付主木对全书进行统稿。

本书编写过程中主要参考第一作者在南京理工大学攻读博士期间的研究成果和博士论文,同时参考了安徽工业大学沈浩博士的研究成果,在此对他表示诚挚的谢意!

本书得到了国家自然科学基金(61203047, 61473115, 61203048)、中国博士后科学基金(2013T60670)、河南省科技创新人才杰出青年计划(144100510004)、河南省高校科技创新人才支持计划(13HASTIT038)以及河南科技大学学术著作出版基金、河南科技大学青年学术带头人培养计划和河南科技大学博士科研启动基金的资助。本书在撰写过程中参考了国内外许多同行的论著、应用成果和先进技术, 作者对此深表谢意。

由于作者水平有限, 书中难免会有疏漏之处, 恳请广大读者批评指正。

作 者

2014 年 10 月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 分数阶系统的研究现状	3
1.2.1 分数阶微积分理论	3
1.2.2 分数阶系统的稳定性分析	3
1.2.3 分数阶系统的控制	4
1.2.4 分数阶系统的应用	5
1.3 模糊时滞系统的研究现状	7
1.3.1 模糊理论的发展	7
1.3.2 T-S 模糊系统	8
1.3.3 模糊时滞系统的稳定性分析与控制	8
1.3.4 模糊时滞系统的应用	9
1.4 分数阶模糊系统的研究现状	9
参考文献	10
第 2 章 数学基础	22
2.1 向量和矩阵的范数	22
2.1.1 向量范数	22
2.1.2 矩阵范数	23
2.2 函数的范数	26
2.3 Lyapunov 方程	30
2.3.1 Lyapunov 方程的一般解	30
2.3.2 Lyapunov 方程的非负解	33
2.4 线性矩阵不等式	35
2.5 基本引理	36
参考文献	38
第 3 章 分数阶线性系统的动态输出反馈控制	40
3.1 问题描述	41
3.2 参数确定系统的控制器设计	41
3.3 不确定分数阶系统的稳定性分析和控制器设计	44

3.3.1 稳定性分析	45
3.3.2 控制器设计	46
3.4 仿真算例	48
3.4.1 参数确定系统	48
3.4.2 参数不确定系统	52
3.5 小结	56
参考文献	56
第4章 分数阶线性系统的容错控制	59
4.1 问题描述	60
4.1.1 传感器故障下的问题描述	60
4.1.2 执行器故障下的问题描述	62
4.2 容错控制器设计	64
4.2.1 传感器故障下的控制器设计	64
4.2.2 执行器故障下的控制器设计	67
4.3 仿真算例	73
4.3.1 传感器故障	73
4.3.2 执行器故障	75
4.4 小结	79
参考文献	79
第5章 分数阶时滞系统的控制器设计	82
5.1 系统描述	83
5.2 控制器设计	84
5.2.1 可控性分析	84
5.2.2 控制器设计	85
5.2.3 鲁棒性能分析	87
5.3 仿真算例	89
5.4 小结	93
参考文献	94
第6章 分数阶非线性系统的 H_∞ 跟踪控制	98
6.1 系统描述	101
6.2 跟踪控制器设计	103
6.2.1 H_∞ 稳定性分析	103
6.2.2 控制器设计	105
6.3 仿真算例	109
6.4 小结	112

参考文献	112
第 7 章 模糊时滞系统的 H_∞ 控制与滤波	116
7.1 问题描述	117
7.1.1 H_∞ 控制描述	117
7.1.2 H_∞ 滤波描述	120
7.2 H_∞ 控制器设计	122
7.2.1 H_∞ 性能分析	122
7.2.2 H_∞ 动态输出反馈控制器设计	126
7.3 H_∞ 滤波器设计	131
7.3.1 滤波误差系统鲁棒稳定性分析	131
7.3.2 模糊滤波器设计	135
7.4 仿真算例	138
7.4.1 H_∞ 控制仿真算例	138
7.4.2 H_∞ 滤波仿真算例	143
7.5 小结	147
参考文献	147
第 8 章 模糊时滞系统的 H_∞ 观测器型控制与滤波	151
8.1 问题描述	152
8.1.1 H_∞ 控制问题描述	152
8.1.2 H_∞ 滤波问题描述	154
8.2 H_∞ 观测器型控制器设计	156
8.2.1 矩阵不等式方法	156
8.2.2 LMI 方法	159
8.3 H_∞ 观测器型滤波器设计	164
8.3.1 时滞无关条件下滤波研究	164
8.3.2 时滞相关条件下滤波研究	170
8.4 仿真算例	174
8.4.1 H_∞ 观测器型控制器设计仿真算例	174
8.4.2 H_∞ 观测器型滤波器设计仿真算例	177
8.5 小结	180
参考文献	180
第 9 章 模糊时滞系统的无源控制与 L_2 - L_∞ 滤波	182
9.1 无源控制概述	182
9.2 L_2 - L_∞ 滤波概述	183
9.3 无源控制	184

9.3.1 具有单个变时滞的模糊系统无源控制	184
9.3.2 具有多个变时滞的模糊系统无源控制	189
9.4 L_2-L_∞ 滤波	200
9.4.1 问题描述	200
9.4.2 鲁棒 L_2-L_∞ 滤波	202
9.4.3 模糊加权 Lyapunov 函数方法的鲁棒 L_2-L_∞ 滤波	211
9.5 仿真算例	217
9.5.1 具有单个变时滞的模糊系统无源控制仿真算例	217
9.5.2 具有多个变时滞的模糊系统无源控制仿真算例	223
9.5.3 L_2-L_∞ 滤波仿真算例	226
9.6 小结	229
参考文献	229
第 10 章 模糊时滞系统的抗饱和控制	233
10.1 连续时间系统控制器设计	234
10.1.1 问题描述	234
10.1.2 动态抗饱和和输出反馈控制	236
10.2 离散时间系统控制器设计	250
10.2.1 问题描述	250
10.2.2 静态抗饱和和设计	251
10.2.3 动态抗饱和和设计	254
10.3 仿真算例	258
10.3.1 连续时间控制仿真算例	258
10.3.2 离散时间控制仿真算例	264
10.4 小结	265
参考文献	266
第 11 章 分数阶模糊系统的动态输出反馈控制	269
11.1 前件变量不可测情况下的输出反馈控制	269
11.1.1 问题描述	269
11.1.2 控制器设计	271
11.1.3 仿真算例	275
11.2 前件变量可测情况下的输出反馈控制	278
11.2.1 问题描述	278
11.2.2 稳定性分析	280
11.2.3 控制器设计	282
11.2.4 仿真算例	286

11.3 小结	288
参考文献	288

第 1 章 绪 论

1.1 引 言

现实世界本质上是分数阶的,分数阶微积分对于我们所能看到的、接触到的、所能控制的自然界中的事物具有很大的影响。过去人们常用整数阶微积分描述自然界中的事物,但自然界中许多现象依靠传统整数阶微分方程是不能精确描述的。如图 1.1 所示为一个半无限有损耗传输线模型,图中, $i(t)$ 为电流, $u(t)$ 为电压, R 为电阻, C 为电容。

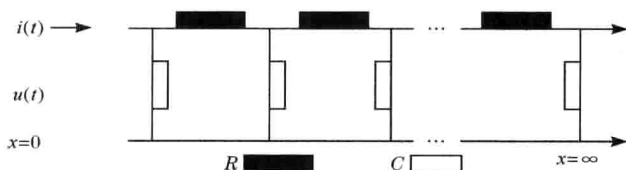


图 1.1 半无限有损传输线

上述系统可以用如下方程来描述:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= i(x,t)R \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= C \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.1}$$

在零初始条件下,电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 存在如下关系:

$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{1}{R\sqrt{\alpha}} \frac{d^{1/2}u(t)}{dt^{1/2}} \\ u(t) &= R\sqrt{\alpha} \frac{d^{-1/2}i(t)}{dt^{-1/2}}\end{aligned}\tag{1.2}$$

式中, $\alpha = \frac{1}{RC}$ 。从式(1.2)中可以看出,半无限有损传输线的电压和电流之间表现出了半微分和半积分的关系。

分数阶微积分最主要的优点是其既包括所有整数阶的理论,又具有整数阶理论所不能替代的功能。因此,分数阶微积分有潜力达到整数阶微积分无法达到的高度,我们相信将来许多领域的重要进展都将会来源于分数阶微积分的应用。由

于很多实际系统用分数阶微分方程可以更好地得到表征^[1,2],所以分数阶系统在许多领域,如地震分析、黏性阻尼、信号处理、分形与混沌等都有广泛的应用^[3]。随着对分数阶微积分理论研究的不断深入,其在物理学、生物工程、力学等方面也有很多应用。特别是在控制领域中,分数阶微积分可更加准确地描述实际系统,能产生比整数阶微积分更好的结果。另外分数阶微积分为将来扩展控制理论经典研究方法提供了强大的支持,因此分数阶系统的相关稳定性分析及综合问题研究已经引起越来越多学者的关注^[4-10]。

另外,自 20 世纪 60 年代现代控制理论诞生以来,控制理论得到了飞速发展,并在当时工业生产过程、航天领域及军事领域都得到了成功的应用。例如,1978 年,Richaler 等提出了模型预测启发控制^[11],使得预测控制理论成为当时工业控制的有效手段之一。随着现代科学技术与生产的迅猛发展,现代控制理论开始跟不上科技发展的脚步,在工业应用中遇到了很多困难。这是因为在传统的控制领域,控制系统动态模型的精确与否是影响控制优劣的关键,系统动态信息越详细,则越能达到精确控制的目的。然而,实际中的被控系统很多都具有动态突变性、非线性、时变性、大随机干扰、多不确定性或者多参数耦合等特点,很难用精确的数学模型来描述^[12,13]。而且现代工业过程对自动控制系统的控制精度、响应速度、稳定性及适应性的要求越来越高,使得控制越发困难、系统性能指标较难满足。而模糊系统的功能在于为模型的描述提供一个可替换的控制方法,利用专家的知识 and 经验对模型进行补充,进行各类问题的研究,例如,在发酵、窑炉煅烧等过程中,都需依赖于人的经验和专家的知识作为对模型的替代或补充。这就使得复杂非线性系统控制精度的提高成为可能。由此可见,模糊控制的诞生是非常具有实际意义的,因此有必要对其进行深入的研究。

传统整数阶模糊系统已经得到了非常广泛的研究和关注。而作为对于模糊系统逼近非线性系统起到巨大补充与完善作用的分数阶模糊系统,目前还极少有文献对其进行讨论,主要瓶颈在于传统整数阶模糊系统分析方法无法直接套用至分数阶模糊系统的分析中。因此,对于分数阶模糊系统的分析与综合并不是传统分数阶系统或模糊系统分析方法的简单推广,它将对上述传统分析方法提出新的挑战。虽然经典的模糊系统的分析方法难以应用于分数阶模糊系统的分析中,但其所采用的李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性理论正是处理分数阶模糊系统稳定性分析的精髓。难点在于如何克服该方法在处理分数阶系统分析中能量函数求分数阶导数时存在的问题。这个困难若得以解决或规避,则传统分析分数阶系统和模糊系统的方法就可以得到有效及实质性的推广。

1.2 分数阶系统的研究现状

1.2.1 分数阶微积分理论

分数阶系统是通过分数阶微积分方程来描述的,而分数阶微积分是将普通积分中的微分和积分一般化至非整数。其主要的构想源于1695年前后 Leibniz 和 L'Hôpital 通信探讨有关一个函数分数阶导数的问题,即对于一个函数求 $1/2$ 阶导数的运算方法是什么。1832年, Liouville 给出了分数阶导数的第一个合理的定义,而 Riemann 在1847年对分数阶微积分的定义作了进一步的补充。后来人们又提出许多不同定义,例如, Grünwald 分数阶微积分、局部分数阶微积分、Caputo 分数阶微积分等,并针对这些定义,类似经典微积分的研究,研究了有关它们的一些性质。然而,由于分数阶微积分缺少明确的物理意义且应用前景不明朗而发展缓慢。

尽管分数阶微积分学的理论可以追溯到300多年前,但分数阶微积分学在其他领域的应用也是近十年的事。较全面也是广为引用的描述分数阶微分方程的著作出版于1999年^[14],2004年出版的文献^[15]是国内较早介绍分数阶微积分学及其计算的著作。研究发现,现实世界中的物理系统大多数是分数阶的,尤其是具有记忆及遗传特性的黏弹性材料^[16,17]、传导和热扩散^[18]、动态过程中的半无线 RC 传输^[19]等,相比传统的整数阶系统,分数阶微积分能够更准确地描述系统行为。现在,分数阶微积分作为一个有效的数学工具,已经广泛应用于各种领域,如地震分析^[20]、黏性阻尼^[21]、信号处理^[22]、分形和混沌^[23]、系统辨识和建模^[24]、机器人^[25]等。随着对分数阶微积分理论研究的不断深入,它在力学^[26]、物理学、生物工程、控制理论^[27-29]等方面也有很多应用。分数阶微积分的发展为各个学科的发展提供了新的理论基础,在冶金、化工、电力、轻工和机械等工业过程中都有应用^[30-32]。而上述领域的应用研究反过来又促进了分数阶微积分理论及分数阶系统相关问题研究的进一步发展,使得分数阶微积分理论及分数阶系统分析与综合问题成为当前国际上的一个热点研究课题,相信随着学科融合和细化的速度不断加快,分数阶微积分及分数阶系统相关问题研究将会有更加广阔的发展前景。

1.2.2 分数阶系统的稳定性分析

分数阶系统在控制领域已经引起越来越多学者的关注^[33-43],主要是由于很多实际系统用分数阶微分方程可以更好地得到表征。稳定性是系统的一个基本结构特性,是所有控制系统的基础,也是控制理论中的基本概念^[44]。在研究系统特

性或者设计控制器时,分析系统的稳定性是一个首要的任务。对于分数阶控制系统,稳定性的研究也同样重要。

在稳定性分析方面,Ishitobi 研究了带有分数阶保持器采样系统的稳定性^[45],随后 Barcena 等对上述系统的稳定性条件进行了改进^[46]。Skaar 等提出了一种利用空间映射的修正根轨迹法^[47],将主导根映射至所需空间进行单独处理来分析黏性系统的稳定性。但是由于这一方法无法准确地将系统中不同的分数阶因子映射到同一空间进行统一分析,因此这种近似方法具有局限性。另一方面,从时域的角度,文献[48]~[50]得到了连续时间分数阶系统的稳定性分析结果,而相应的离散时间分数阶系统的稳定性分析结果在文献[51]、[52]中给出。基于线性矩阵不等式的方法,文献[53]和[37]分别讨论了在系统阶数 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 \leq \alpha < 2$ 两种情况下的连续时间分数阶系统的稳定性。对于区间分数阶系统,文献[54]中研究了其在 $0 < \alpha < 1$ 情况下的稳定性分析充分必要条件;相应的 $1 \leq \alpha < 2$ 情况下的稳定性分析充分条件及充分必要条件分别在文献[34]、[55]和文献[33]、[56]中给出。而对于带有时滞的线性时不变分数阶动态系统,Chen 等采用 Lambert 函数研究了其稳定性^[57]。从频域的角度,采用不同方法,分数阶系统的稳定性分析在文献[48]、[58]~[60]中都有研究。文献[58]根据扩展频域分析法扩展了奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据,得到能够直观判断任意阶控制系统稳定性的通用判据。Bonnet 等对带有几种不同滞的分数阶系统进行了 H_∞ 稳定性分析^[60],而比 H_∞ 稳定性概念更强的 BIBO 稳定性,文献[59]和[48]均对分数阶时滞系统给出了 BIBO 稳定性分析的充分条件。对于带有区间不确定参数的分数阶系统,其稳定性首先在文献[61]中解决,之后文献[62]对其进行了进一步的研究。

1.2.3 分数阶系统的控制

在控制方面,以往的方法是将分数阶系统近似为整数阶系统再进行控制器设计,不可避免地存在设计偏差,甚至不能满足原系统的重要性能,如稳定性的要求,因此有必要进行分数阶控制器的单独设计。目前基于分数阶被控系统,众多学者提出了各类分数阶控制器。首先提出利用分数阶控制器对动态系统进行控制的是 Oustaloup 等,他们提出了称为 CRONE(contrôle robuste d'ordre non entier)控制器的分数阶控制器,同时给出了一些应用的例子^[63,64]。Podlubny^[65]提出了一个广义的 PID 控制器,称为 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器,其中,积分器和微分器的阶次均为实数。由于控制器的阶次可以是非整数阶的,因此其特性和整数阶 PID 控制器是不一样的,有必要对这种分数阶控制器进行全面深入的研究。Bagley 和 Calico 研究了黏滞阻尼结构的分数阶控制问题^[66],给出了分数阶状态方程。他们的研究表明,对黏滞阻尼结构,采用分数阶状态方程进行反馈控制,可以提高系统的控制性能。Makroglou 等研究了转动弹性梁的分数阶反馈控制^[67]。Ortigueira^[68,69]研究

了由分数阶传递函数描述的连续系统和由差分方程描述的离散系统的脉冲、阶跃和频率响应。Machado 等^[70-73]研究了分数阶微积分在机器人中的应用,如操纵臂的轨线控制、六脚机器人的分数阶控制等,还利用分数阶微积分对运动控制系统的动力学特性进行分析。研究表明,分数阶模型抓住了被整数阶模型所忽略的现象和属性。还有一些学者在进行分数阶微积分在控制理论与控制工程中的应用研究,如 Chen 等^[74,75]、Vinagre 等^[76-78]、Petras 等^[79,80]。总之,目前关于分数阶微积分在控制理论和工程中的应用处于刚起步阶段,国外一些学者在进行这方面的研究,而国内在此方面的研究较少,许多方面还有待去探索和研究。

1.2.4 分数阶系统的应用

尽管分数阶微积分的研究已经有数百年历史,但其研究一直在纯数学领域内进行,应用研究还很少。随着研究的不断深入,分数阶微积分在不同领域和学科中的应用研究在 20 世纪的中后期发展起来。Mandelbrot 等^[81,82]在分形(fractal)中的研究引起了不同领域的学者对分数阶微积分的注意。研究发现,分数阶微积分在描述一些具有记忆和遗传特性的物质时具有重要的作用。现在,分数阶微积分在数值分析以及物理和工程等不同领域中的应用引起了广泛的关注。

1. 分数阶微积分在黏弹性材料中的应用

研究发现用分数阶微积分能够很好地刻画具有黏弹性的物质。Bagley 和 Torvik^[83-85]用分数阶微分模型精确地描述了许多阻尼性材料的特性,Koeller^[86]用分数阶微积分描述了黏滞性材料的弯曲和松弛特性。关于分数阶微积分在黏弹性材料方面的研究还有大量的文献^[87-91]。由于近年来黏弹性理论在高聚物材料、复合材料等新型材料、岩土力学、地震预报和生物力学等领域的广泛应用,可以预见分数阶微积分的研究将在上述领域的实际研究和应用中有较大的发展。

2. 分数阶微积分在电化学中的应用

分数阶微积分广泛应用的另一个领域是电化学,正是由于 Oldham 及其合作者^[92-98]的工作使得分数阶微积分在电化学中得以成功的应用。例如,电化学研究的重要课题之一就是确定电极表面附近的电活性物质组分的浓度,对此 Oldham 和 Spanier 提出,在一定条件下,扩散方程问题可由边界上(电极表面)的关系式来代替。在电化学中建立起来的被实验所验证的分数阶微积分方法可以应用于其他方面,如扩散、热传导、质量转移等。

3. 分数阶微积分在控制中的应用研究

分数阶微积分理论在不同领域应用研究的显著增加,同样也引起了控制领域

专家和学者的广泛关注。研究表明,实际系统大都是分数阶的,但迄今为止,所有控制系统均是整数阶的,这实际上是忽略了系统的真实性。而之所以将其考虑为整数阶,是因为其复杂性和缺乏有效的数学工具。随着分数阶微积分理论不断发展,研究将分数阶微积分理论应用于控制理论和控制实践是必然的。近十几年来,相关的研究已经开始,并不断取得进展。分数阶微积分理论的发展,实际上也为以整数阶微积分理论为基础的控制理论和控制工程提供了一个新的发展空间。

分数阶系统(fractional-order systems)就是由微分阶次为任意实数(有时为复数)的微分方程所描述的动力学系统。如果被控系统为分数阶系统或控制器为分数阶控制器,则这样的控制系统为分数阶控制系统(fractional-order control systems)。由于利用分数阶微积分理论来研究控制系统处于开始阶段,所以学者根据自己以前的研究方向和内容,在不同的方面进行了分数阶控制系统的研究。目前,对分数阶系统的研究主要分为以下三个方面:①分数阶控制系统的数值计算方法。这在数学上主要是分数阶微分方程的解析和数值解法,有一些文献设计了这方面的内容,如文献[99]、[100]。由于分数阶微积分的特点,研究速度快、精度高的数值计算方法是十分必要的,这将有助于对分数阶控制系统进行分析和综合。②如何利用分数阶微分方程去描述复杂的控制系统,即建立控制系统的分数阶数学模型,这在地震、机械、电化学等方面都有研究。③将基于整数阶微分方程的已经成熟的控制理论引申推广到分数阶系统中,即对分数阶控制系统进行分析和综合等研究。在1988年和1990年,Oustaloup^[101]和Axtell等^[102]分别发表了关于分数阶微积分在控制系统中的应用的文章后,分数阶控制系统的研究在不断地加快发展,近几年国内外许多学者都开始了这方面的研究。

4. 分数阶微积分在其他领域中的应用

Westerlund对分数阶微积分在电磁场中的应用进行了研究,提出了分数阶的Maxwell方程。他同时将牛顿第二定律进行了推广,如果 F 为一作用力, x 为位移,则弹性体的Hooke模型为 $F=kx$,黏性流体的牛顿模型为 $F=kx'$,牛顿第二定律为 $F=kx''$ 。上述模型均可以看做下列一般表达式的特殊形式:

$$F=kx^{(\alpha)}$$

式中, α 为任意实数。Westerlund建议当 $1<\alpha<2$ 时,上式可以视为牛顿第二定律的一般形式,并且它更好地描述了真实的情况。

在信号处理领域中,传统Fourier变换是一个研究最为成熟、应用最为广泛的数学工具。Namias^[103]将其推广为分数阶Fourier变换,使它成为一种新的信号时频分析工具。McBride和Kerr^[104]对分数阶Fourier变换作了更加严格的数学定义,使之具备了一些重要的性质。最近几年,分数阶Fourier变换已经在微分方程求解、量子力学、衍射理论、光学传输、光学系统和光学信号处理、时变滤波、多路