中国学生解题方法大全系列

# 初中几何

IETIFANGFA

# 解题方法大全

张树义 /编著

山西教育出版社

# 初中几何解题方法大全

张树义　编著





山　西　教　育　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

初中几何解题方法大全/张树义编．一太原：
山西教育出版社，2004.4
ISBN 7－5440－1954－3

Ⅰ.初...　Ⅱ.张...　Ⅲ.几何课－初中－教学参考资料
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 68921 号

山西教育出版社出版发行
（太原市迎泽园小区 2 号楼）
太原红星印刷厂印刷　新华书店经销
2004 年 4 月第 1 版山西第 10 次印刷
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：19.75
字数：488 千字　印数：100 001—120 000 册
定价：19.00 元

# 出版宣言

**掌握一个解题方法**

**比做一百道题更重要**

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“课后练习”、“单元测试”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是不提高，考试成绩不理想，这是为什么？

究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，就是没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好功课的根本保证；掌握方法，是攻克难题的有力武器。只有弄清原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种考试，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《中国学生解题方法大全》就是期望为同学们提供最为全面、最为系统、最为实用、最为完备的各类解题方法。它以新教学大纲为指导，以“突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能”为宗旨，按照新教材的体系分章编写。书中既有方法点拨，思维开拓；又有例题分析，针对训练。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点拨恰到好处。可以说，本书是同学们“学好功课的方法宝库，攻克难题的新式武器”。

愿本书成为你学习的一个支点，撑起你知识的一片蓝天！

# 怎样学习初中几何
## (代序)

学过几何的同学都有这样的感受:几何题浩如烟海且千变万化.有些学生概念、公理、定理背得烂熟,但一解题往往不知从何下手;有些学生听老师讲题明明白白,可自己动手解题却又无计可施;有些学生题做了不少,但一见难题又一筹莫展.总之他们都有这样的感慨:怎样才能学好几何呢?有什么好的方法吗?长期的教学实践使我体会到:这些学生的问题就是出在学习方法上.伟大的生物学家达尔文说:"一切知识中最有价值的是关于方法的知识."著名的生理学家巴甫洛夫说:"科学依赖于方法的进步程度为推动力而前进的."大师们的真知灼见更进一步地阐明了学习方法的重要性.不论是今天或是明天还是将来,不仅要求我们学会而且更重要的是要求我们会学,这也是未来人才的必备素质.下面我们就学习几何的方法与同学们交流,一起寻觅最有价值的知识.

一、立足课本

打开课本就好像打开知识的大门,对于我们初中生来讲,必须首先重视课本,它是我们最重要的导师,它最能体现知识的系统性和完整性.

二、准确理解几何概念与性质

1.抓住关键词,掌握本质特征.

几何概念、性质是学习几何的重要基础,学习时,切忌死记硬背,重要的在于抓住关键词,掌握其本质特征.如:直线的基本性质"两点确定一条直线"."确定"两字有两层含义:(1)可画一条直线,即存在性;(2)只可以画一条直线,即惟一性.决不能说成"两点可画一条直线";又如,"互为余角"的定义规定了:两个角(不是多于两个角)的和是90°,这里"两个角"的规定常被同学们忽视,从而出现"$\angle 1+\angle 2+\angle 3=90°$,$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$互为余角"的错误.进一步研究,互余概念是根据两个角数量关系定义的,与两个角的位置无关,因而只要两个角和为90°,即使它们不靠在一起也仍然互余.

2.善于比较,辨别异同,易学好记.

在学习内容相近、易于混淆的概念时,采用对比异同的方法,不仅利于搞清它们的区别和联系,从而加深对知识的理解和记忆,而且利于提高分析比较能力.例如,菱形的定义:有一组邻边相等的平行四边形;正方形的定义:有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形.它们的相同点:都是有一组邻边相等的平行四边形;不同点:正方形比菱形多了有一个角是直角的条件.由定义可知正方形是特殊菱形.在记这两个定义时,记住菱形的定义,再加上有一个角是直角的条件,就可得到正方形的定义.

3.掌握记忆概念、性质的方法.

在学习概念、性质时,有的同学记得很快,但忘得也快.怎样使所学的知识记得更牢固一些呢?这就要掌握记忆的方法.记忆要在理解的前提下加以记忆,另外还要注意条理性,寻找联系、规律等.例如,垂径定理及推论1的内容多不好记,学习时,可以这样记:一条直线具有经过圆心、垂直于弦、平分弦、平分弦所对的劣弧、平分弦所对的优弧中的任意两条,则必具备另外三条(弦不是直径).用这样的叙述,简化了垂径定理及推论1的记忆.

三、掌握和运用数学思想和方法



学好几何概念和性质,不等于学好几何,几何证题不但要准确理解和运用概念、性质,还要掌握和熟练地运用数学思想和方法.

1.掌握和运用数学方法.

对于一道题目,如何想出它的证法,即如何分析,又如何证明,这就需掌握数学方法中的综合法、分析法、分析综合法.

2.掌握和运用数学思想.

解一道题的关键在于分析,而分析应该在一个思想指导下进行,这个思想就是我们所说的数学思想.数学思想就是数学的基本观点和处理问题的基本方法.它可从方向上指导我们解题,它是知识转化为能力的桥梁,是运用数学知识、技能、方法的灵魂,应予以重视.初中常用的数学思想有:转化思想、方程思想、分类讨论思想、数形结合思想等.

(1)掌握和运用转化思想　同学们在学习中都会有这样的体会:解决一个数学问题,往往是通过各种手段将它转化为已掌握的问题,用已掌握的方法加以解决,这就是数学的转化思想,转化思想是一种最基本的数学思想.

**例1**　已知:如图0-1,$CE\perp AB$ 于 $E$,$\angle 1=\angle 2$,$BE=\frac{1}{2}(AB-AD)$.

求证：$\angle D+\angle B=180°$.

【思路分析】要证的结论是两个角的和为180°，而我们知道平角等于180°.因此，要证结论，需将这两个角转化为一个平角.由$\angle 1=\angle 2$的条件，可将$\triangle ACD$沿$AC$翻折过来，则$\angle D=\angle AFC$.再证$\angle CFB=\angle B$，需证$\triangle BCE\cong\triangle FCE$.

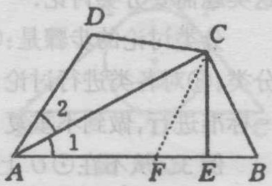

图 0—1

【证明】略.

【题末点评】本题利用全等三角形、等腰三角形的性质，将$\angle B+\angle D$转化为一个平角，使问题得到解决.

(2)掌握和运用方程的思想　在一些存在相等关系的问题中，为了解决这些问题，可以设一个或几个未知数，由相等关系，列出方程或方程组，使问题得以解决.这就是处理数学问题的方程思想.几何中的计算题常用方程思想来处理.

例 2　已知：如图 0-2，在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$D$是$BC$的中点，$DE\perp AB$，垂足为$E$，$AE=7$，$\mathrm{tg}B=\frac{1}{2}$，求$DE$的长.

【思路分析】要求$DE$，需将未知量$DE$与已知量$AE$、$\mathrm{tg}B$联系在一起，容易证明$\triangle DBE\backsim\triangle ABC$，故可由线段成比例建立方程来求.

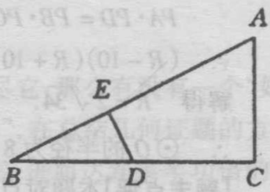

图 0—2

【解】∵　$\mathrm{tg}B=\frac{1}{2}$，　∴　$\frac{DE}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$.

设$DE=x$，则$BE=2x$.

由勾股定理，得$BD=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$.

∴　$BC=2BD=2\sqrt{5}x$.

∵　$AC=\frac{1}{2}BC$，　∴　$AC=\sqrt{5}x$.　∵　$\angle B=\angle B$，$\angle BED=\angle C$，

∴　$\triangle DBE\backsim\triangle ABC$.　∴　$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}$.

∴　$\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}x}{2x+7}$.　解得$x=\frac{7}{3}$，　∴　$DE=\frac{7}{3}$.

【题末点评】对于求值问题，常由几何性质建立关于所求量的方程来解.

(3)掌握和运用分类讨论思想　在概念、定理、法则等知识中，有许多是分类给出的.如三角形、等腰三角形.在解答关于这些知识的问题时，常要进

行分类讨论，另外，有些题条件或结论不是惟一确定时，会产生几种可能，解这类题需要分类讨论.

分类讨论的步骤是：①根据题目需要确定分类讨论对象；②进行合理的分类；③对各类进行讨论；④对讨论的结果进行归纳，得出结论.分类要按同一标准进行，做到不重复，不遗漏.

**例 3** 从不在⊙$O$ 上一点 $P$ 作直线交⊙$O$ 于 $B$、$C$，且 $PB\cdot PC=36$，$OP=10$，则⊙$O$ 的半径等于________.

**【思路分析】**因为点 $P$ 不在圆上，则点 $P$ 可能在圆外，也可能在圆内，因此要分两种情况计算.

**【解】**设⊙$O$ 的半径为 $R$.

(1)当点 $P$ 在圆外时，如图 0－3，延长 $PO$ 交⊙$O$ 于 $D$，设 $PO$ 与⊙$O$ 交于点 $A$.

则 $PA\cdot PD=PB\cdot PC$.

$\therefore\ (10-R)(10+R)=36.$ 解得 $R=8$.

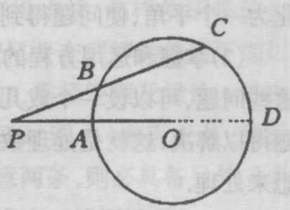


图 0—3

(2)当点 $P$ 在圆内时，作过点 $P$ 的直径 $AD$.如图 0－4. 由相交弦定理，得

$PA\cdot PD=PB\cdot PC$.

$\therefore\ (R-10)(R+10)=36.$

解得 $R=2\sqrt{34}$.

$\therefore$ ⊙$O$ 的半径为 8 或 $2\sqrt{34}$.

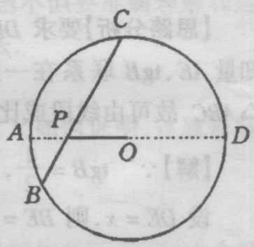


图 0—4

**【题末点评】**本题对点 $P$ 的位置进行分类，根据不同的位置的点 $P$，求出半径，若忽视了分类，容易漏去半径为 $2\sqrt{34}$的解.

(4)掌握和运用数形结合的思想 数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学，“数”与“形”是数学中密不可分的两大支柱.著名的数学家华罗庚说：“数缺形少直觉，形少数难入微.”因此，数形结合是研究数学问题的重要思想方法，数形结合的思想实质是把抽象的数学语言和直观的图形结合起来，以便化抽象为直观，化难为易.

**例 4** 已知⊙$O$ 是△$ABC$ 的内切圆，$D$、$E$、$F$ 为切点，且有 $AB\cdot AC=2BD\cdot DC$，求证△$ABC$ 是直角三角形.

**【思路分析】**要证△$ABC$ 是直角三角形，需找出三边的关系，而 $AB\cdot AC=$

$2BD \cdot DC$,需求出 $BD$、$DC$ 与三边的关系.

**【证明】**设 $BD = x, DC = y, AF = z, BC = a$, $AB = c, AC = b$,由题意可得方程组

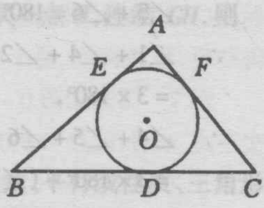

图 0—5

$$\begin{cases} x + y = a, \\ y + z = b, \\ z + x = c. \end{cases} \text{解,得} \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + c - b), \\ y = \frac{1}{2}(a + b - c). \end{cases}$$

$\because \quad AB \cdot AC = 2BD \cdot DC, \quad \therefore \quad bc = 2 \cdot \frac{1}{2}(a + c - b) \cdot \frac{1}{2}(a + b - c).$

整理,得 $a^2 = b^2 + c^2$,则$\triangle ABC$ 为直角三角形.

**【题末点评】**在解题过程中,找三边关系,借助于方程组,这里用到代数知识,又用到几何知识,把它们有机地结合起来.几何中数形结合有下列途径:借助于方程(组)或不等式(组)解几何问题;借助于函数解几何问题.

四、善于思考,勤于积累,探索几何证题方法　同学们在解决问题的过程中,要不断地积累思考,不断地总结探索几何证题的方法,如证线段相等的方法,证线段倍分的方法,证两直线垂直的方法等.这样不仅使我们提高解题能力和应试能力,而且会使我们的思维水平得到升华即创造性思维的层次.这也是我们学习几何的最终目的.

五、一题多解,提高创造性思维能力

几何题浩如烟海,即使我们倾全力也难以穷尽它.那么有没有一个“好、快、省”的办法呢?答案是有的,“那就是一题多解”.在总结几何证题的方法过程中要注意对自己进行一题多解的训练和探索,进而达到事半功倍的效果.就思维过程讲是求同思维,而与之相称的是求异思维(发散思维).求异思维是从同一问题或同一来源出发探求不同的答案或寻求不同的解决途径.它的思维方向分散,富于联想,思路宽阔,是创造性思维的一种形式,具有求异性,探索性和多发性的特点,它的重要性在于:只有通过求同求异的多次反复,思维才能达到较高级的水平,才可能有所发明,有所创造.“一题多解”正是培养我们解题能力和创造性能力的最好途径.

**例 5**　已知如图 0-6,$\angle BAF$、$\angle CBD$、$\angle ECA$ 是$\triangle ABC$ 的三个外角.

求证:$\angle BAF + \angle CBD + \angle ACE = 360°$.

**【证法一】**如图 0-6,

$\because \quad \angle 1 + \angle 4 = 180°, \quad \angle 2 + \angle 5 = 180°,$

$\angle 3+\angle 6=180^\circ$,

$\therefore\ \angle 1+\angle 4+\angle 2+\angle 5+\angle 3+\angle 6$

$=3\times 180^\circ$,

$\therefore\ \angle 4+\angle 5+\angle 6$

$=3\times 180^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$,

$\because\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$,

$\therefore\ \angle 4+\angle 5+\angle 6=3\times 180^\circ-180^\circ$

$=2\times 180^\circ$.

$\therefore\ \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$.

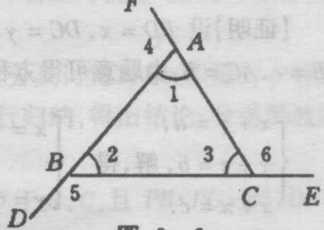


图 0—6

【证法二】如图 0－6，

$\because\ \angle 4+\angle 1=180^\circ, \angle 5+\angle 2=180^\circ$,

$\therefore\ \angle 4+\angle 1+\angle 5+\angle 2=360^\circ$,

$\because\ \angle 1+\angle 2=\angle 6$,

$\therefore\ \angle 4+\angle 5+\angle 6=360^\circ$.

$\therefore\ \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$.



【证法三】如图 0－7，过 $B$ 作 $BG /\!/ CA$.

$\therefore\ \angle 4=\angle 1, \angle GBC=\angle 3$,

$\because\ \angle 4+\angle 2+\angle GBC=360^\circ$,

$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$.

$\therefore\ \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$.

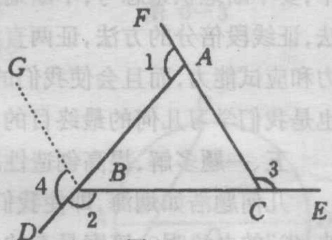


图 0—7

【证法四】在 $AF$ 上取一点 $G$，过 $G$ 作 $GH /\!/ AB$ 交 $BC$ 的延长线于 $H$，如图 0－8.

$\therefore\ \angle 1+\angle 2=180^\circ$,

$\angle 3+\angle BAF=180^\circ$,

$\therefore\ \angle BAF+\angle 3+\angle 2+\angle 1$

$=360^\circ$.

$\because\ \angle 1=\angle CBD$,

$\angle 2+\angle 3=\angle ACE$,

$\therefore\ \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360^\circ$.

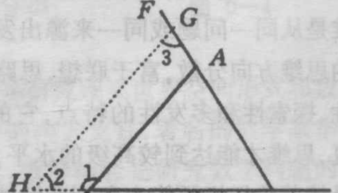


图 0—8

【证法五】在 $AF$ 上取一点 $G$，在 $CB$ 的延长线上取一点 $H$，连结 $GH$. 则 $\angle BAF+\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.

$\because\ \angle 1=\angle CBD,\quad \angle 2+\angle 3=\angle ACE,$

$\therefore\ \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360°.$

【题末点评】本题通过一题多解加深了对平角、周角、平行线性质、三角形和四边形的内角和定理的理解；得出证多角和为 360°的方法：将它转化为周角、二平角、四边形的内角和等；对提高解题能力是非常有利的.

六、勇于探索，敢于创新

大家熟悉的“没有最好，只有更好”这不仅是一句脍炙人口的商业广告词，而且体现了人类追求进步永不满足的创新精神. 社会就是在这种精神的推动下不断发展进步的. 在学习几何的过程中也要借鉴这种精神，“学贵有疑，大疑大进，小疑小进，不疑不进”. 要敢于创新，敢于向课本、老师挑战，我们也会在探索中不断地体会到它的成功和乐趣. 下面两个例子是学生给出证明的.

例 6　已知 $AC$ 是⊙$O$ 的弦，$AB$ 是⊙$O$ 的切线，$\overset{\frown}{AmC}$是弦切角$\angle BAC$ 所夹的弧，$\angle P$ 是$\overset{\frown}{AmC}$所对的圆周角. 求证：$\angle BAC=\angle APC$.

【证明】分三种情况讨论.

(1)圆心 $O$ 在$\angle BAC$ 的边 $AC$ 上，略.

(2)圆心 $O$ 在$\angle BAC$ 的外部，如图 0－9. 作直径 $AQ$，连结 $PQ$.

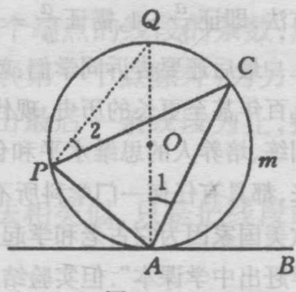

图 0—9

由(1)知　$\angle BAQ=\angle APQ$.

$\because\ \angle BAC=\angle BAQ-\angle 1,$

$\angle APC=\angle APQ-\angle 2,$

$\angle 1=\angle 2,$

$\therefore\ \angle BAC=\angle APC.$

(3)圆心 $O$ 在$\angle BAC$ 内部，如图 0－10. 作直径 $AQ$，连结 $PQ$.

由(1)知　$\angle 1=\angle 2.\quad \because\ \angle 3=\angle 4,$

$\therefore\ \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4.$

即　$\angle BAC=\angle APC.$

【题末点评】两种情况都作了直径，把要证相等的角变成两角的差或和，

利用(1)的结论及同弧所对的圆周角相等证得结论.证法简捷,易于理解和掌握.

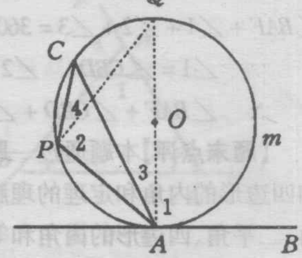


图 0-10

例 7　已知如图 0-11,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 $A$、$B$,过点 $A$ 的直线 $CD$ 与两圆分别相交于 $C$、$D$,且 $CD /\!/ O_1O_2$,过点 $A$ 的另一条直线 $EF$ 与两圆分别交于 $E$、$F$.

求证:$CD > EF$.

【证明】连结 $CB$、$EB$、$AB$、$DB$、$FB$.

$\because$　$CD /\!/ O_1O_2$,　$AB \perp O_1O_2$,

$\therefore$　$CD \perp AB$.

$\therefore$　$BC$ 是$\odot O_1$ 的直径.

$\therefore$　$BC > BE$.

$\because$　$\angle C = \angle E$,　$\angle D = \angle F$,

$\therefore$　$\triangle BCD \backsim \triangle BEF$.

$\therefore$　$\dfrac{CD}{EF} = \dfrac{BC}{BE} > 1$　$\therefore$　$CD > EF$.

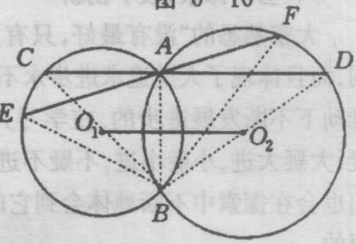


图 0-11

【题末点评】多么巧妙的证法!由这个证明还可得出证明线段 $a > b$ 的方法,即证$\dfrac{a}{b} > 1$,需证$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$,且$\dfrac{c}{d} > 1$.

最后还要告诉同学们:就其几何学发展为一门成熟的学问而言,已经有几百年甚至更长的历史.现代的计算工具和方法是可以取而代之的,但对于训练、培养人的思维水平和创造性能力及人格品质,不论是过去、现在和将来,都具有任何一门学科所不能替代的独特的功能和魅力.五六十年代一些欧美国家因为它古老和学起来头疼,企图用别的方法训练学生,声言“把几何学赶出中学课本”.但实验结果却无功而返,不得以还要求助于几何学.

# 目录

**四边形**

解直角三角形



圆

## 综合部分

### 初中几何中的常用方法



### 综合题