北京市朝阳区特级教师工作室课题研究成果丛书

邱继勇 著

探索厚实的数学教学

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市朝阳区特级教师工作室课题研究成果丛书

探索厚实的数学教学

邱继勇 著

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

探索厚实的数学教学/邱继勇著. --北京:首都师范大学出版社,2012.11

ISBN 978-7-5656-1120-9

Ⅰ.①探… Ⅱ.①邱… Ⅲ.①中学数学课—教学研究—文集 Ⅳ.①G633.302-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 259971 号

北京市朝阳区特级教师工作室课题研究成果丛书

探索厚实的数学教学

邱继勇 著

首都师范大学出版社出版发行

地址 北京西三环北路 105 号

邮编 100048

电话 68418523(总编室) 68982468(发行部)

网址 www.cnupn.com.cn

北京普瑞德印刷厂印制

全国新华书店发行

版次 2012 年 11 月第 1 版

印次 2012 年 11 月第 1 次印刷

开本 787×1092mm 1/16

印张 11.75

字数 235 千

定价 25.00 元

序

梅花香自苦寒来。邱继勇老师1985年大学毕业，走上三尺讲台；2006年荣获北京市特级教师称号。从教20年即获此殊荣，这对于一般教师来说，是可望而不可及的，然而邱老师做到了。梅花绽放，香气袭人，那是因为曾经历过“苦寒”。

邱老师是在北京东郊的一所农村中学——北京市第81中学，迈出从教第一步的。“81中，黑不隆冬；破桌子破椅子破管灯，院墙没有，四处透风。”暂且不说条件有多么艰苦，只凭邱老师“是10年内来这里的第一个大学生”，就可以想象当时他的内心是怎样的一种愁苦。这就难怪他把“气”都撒在校长身上。但正是因为经历了这11年的“苦寒”，邱老师成长了，“从一个东撞西跑的毛头小伙成长为一名骨干教师”，形成了自己“尊重每个学生的认知水平(起点低，落点当)，注意学生的课堂感受(调动学生的积极性)”的教学理念，并演化出多种课堂教学模式，正所谓磨难历练人生。翻阅这本《探索厚实的数学教学》，可以再次印证这古已有之的真理，也可以领略邱老师20余年从教的艰辛、快乐与收获。本书既有理论的综述和提升，又有实践的积累和展示，具有较高的学术价值。从事数学教学研究的人士与一线教师，可以从中获取丰富的信息，促进对数学教学领域中面临的诸多实践问题的更切实，更深入的思考。

宝剑锋从磨砺出。邱老师能够成长为一位特级教师，最重要的在于他对于数学教学的刻苦钻研。人们习惯将数学比喻为王冠上的明珠。而数学学习又是让很多学生感到头疼的事情。作为基础教育，如何让数学在促进学生发展的过程起到积极作用，是每一位数学教师必须攻克的难题。这里既涉及数学学科本身，更涉及到对数学教育的理解。在本书中，可以清晰地看到邱老师对这个问题的回答。在数学教学的“磨砺”过程中，邱老师不但善于思考钻研，更倾心于创新。他在本书中认真总结多年的教学实践工作，阐述了数学教育教学理论的进一步应用，努力践行新课改的理念，提出了许多新的教学思路和方法，并列举了大量的教学范例和模式。本书为新课程改革和数学课堂教学改革提供了丰富的可参考的教学资源。

有勤于钻研的态度，再加上勇于创新的精神，邱老师数学教学的“宝剑”才会

寒光凛凛，锋利无比。由此，可以看出，一名教师的成长，需要历练，而且是自觉自愿。书中的每一篇文章，都可以看到邱老师的思考和钻研，感受到他不断创新的进取精神。用邱老师自己的话说，就是“数学教师对数学问题的研究，是培养学生创新精神的必备体验，是提高学生创新能力的必备能力”，“一个没有数学问题研究经历的、没有一定的创新研究成果的人，是很难体验到传授给学生创新过程的艰辛和快乐的，也很难把握创新方式和创新能力，更无从谈起培养学生的创新精神了。”这是邱老师的体会，也是他获得成功的箴言。

欲穷千里目，更上一层楼。翻阅《探索厚实的数学教学》，看到的不仅是邱老师围绕 RAE 数学教育方式和“厚实”的数学课堂教学的研究，更看到了一位数学教师应当如何去提升自己的教学能力和研究能力的途径和方法。在课程改革的大背景下，数学教育要有新的发展，邱老师也需要百尺竿头再进一步。要进步，就需要有更广阔的视野，就需要有不断迈上新台阶动力和劲头。期望邱继勇老师今后能将数学教学做得更为“厚实”，既为自己谱写新篇，也为新一代数学教师树立榜样。

应邱老师之邀，于忙碌中谈及所言，是以为序。

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心主任
中国教育学会中学数学教学专业委员会副理事长　　王燕春
北京市特级教师
2012 年 7 月 1 日

前　言

数学，作为人类文明发展的重要标志之一，对人类、社会、国家的影响是深远的。数学水平是当今世界各国国力及竞争力的重要标志，因而数学基础教育受到世界各国更广泛的关注。

中国，作为一个文明古国，民族智慧和民族精神是其悠久文化的核心，中国传统数学是体现这一核心的重要方面，挖掘中国传统数学的内涵和精华，是弘扬中华传统文化的重要内容。

我国各级各类的数学课程标准，都把数学基础教育放在了“文化传承与发展，素质教育与创新能力提高”的重要位置，要求师生在数学教与学的实践过程中，“感悟中西数学文化的异同，感悟数学的价值，感悟数学精神”，充分发挥数学教育的功能。

作为一名普通的数学教师，一位数学基础教育研究的爱好者和实践者，我多年来教学实践的总结和思考集腋成裘，供同行们讨论和评判。

目　　录

对数学教育的思考

提升“变式教学”理念，培养学生创新能力 …… 1
从一道数学竞赛题解法中，浅谈数学
解题教学的教育功能 …… 8
计算机辅助中学数学教学的切入点探讨 …… 15
计算机辅助教学与郭璋原理 …… 18
从傅种孙的“谈起”谈起
——“数学史志教育”的一个新视角 …… 29
北京市枣营中学“感悟数学”特色建设思路 …… 33

数学问题的研究

椭圆的一个基础性定理及其应用 …… 47
圆锥曲线内接四边形的一个性质
——一道高考试题的溯源与拓展 …… 50
圆锥曲线中一类充要条件的应用 …… 55
椭圆焦点三角形四心的轨迹 …… 59
1708 问题及解答 …… 63
与椭圆相关的几个圆的性质探讨 …… 65
一道奥赛训练题的溯源和探究 …… 68
圆锥曲线一条共点线性质的发现之旅 …… 73
一道习题的演变 …… 79
椭圆焦点弦与非焦点弦的性质探讨 …… 82

教学策略研究

数学课堂六种课型的设计思路 …… 88

概率革命

——高中概率问题解题思想、方法及注意事项(高二、高三) …… 92

解决函数问题的制胜法宝

——函数图像的画法及应用(高一、高二、高三数学) …… 96

选择题解法刍议 …… 99

抽象函数解题教学研究 …… 104

课例：坐标平移中的几何不变量的探究 …… 108

指导青年教师研究

数学教师如何提升教学能力和研究能力 …… 113

用类比与一般化的思维方法探究新命题 …… 130

课本上一道切线问题的推广 …… 135

数学方法论在中学数学的教学中的应用一例

——课本上一道切线问题的研究和教学设计 …… 138

在探究学习过程中，培养学生的创新精神

——抛物线的一个新性质的探究过程 …… 142

三角函数教与学 …… 147

通项公式的求法 …… 154

轨迹方程的求法 …… 157

课例点评：由数列的递推关系求通项公式 …… 北京市东方德才学校　李慧 161

跋：爱心永驻　育人无痕 …… 169

对数学教育的思考

教过一些年数学课后，开始思考一些问题：①什么是数学？②什么是数学教育？③数学教育的功能有哪些？④东西方数学以及数学教育有何异同？⑤怎样让学生体验到数学应用的广泛性？⑥怎样让学生感受到数学美？⑦为什么人人要学数学？⑧为什么温家宝总理说“数学课堂薄了点”？⑨“厚实”的数学课堂怎样实现？⑩现代信息教育技术如何与课堂教学有机结合？……我头脑中装着这些问题，一直在思考着，实践着，探索着。

提升“变式教学”理念，培养学生创新能力

一、背景

1. 在国内外学者对“中国学习者的悖论”的研究、思考过程中，得出了在我国传统数学教学过程中，占重要地位的“变式教学”是我国学生较之西方国家的学生具有“良好的基础知识和熟练的基本技能”的根本原因[1]。

2. 美籍华裔学者蔡金法先生，曾对中美学生的数学能力做过一次调查，并在第九届世界数学大会上介绍了调研结果：中国学生的计算能力和在简单问题的解决上，比美国学生好；在比较复杂、过程或结论开放的数学问题的解决方面，美国学生的平均成绩要比中国学生的好。

3. 创新始于问题的提出。李政道说过：学习，就是学习问题，学习怎样问问题。现在，我国在校的高中学生不乏解题好手，但在课上、课下敢于提出和能提出较新的、有一定深度的数学问题的，却寥寥无几，这是不争的事实。

二、问题的提出

用继承与发展的观点，反思我们传统的“变式”教学，应当在保持必要的对概念、技能的变式训练基础上，充实进去一些可以引导学生提出具有一定深度的数学问题的内容和教学设计，逐步提高学生提出问题、研究问题的创新意识和创新

能力。

在多年的教学实践和思考过程中，我觉得对典型数学问题“特定条件和结论的充要性”、“运动变化中图形性质的不变性”、“类比到相关情景中的相似性”的质疑，是引导学生提出新问题、提高创新能力的好办法之一。

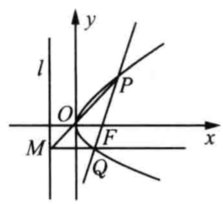
三、实例说明

(一)对“特定条件和结论的充要性”的质疑

例 1.[数学第二册(上)，P123.6]过抛物线焦点的一条直线与它交于 P、Q 两点，经过点 P 和抛物线顶点的直线交准线 l 于 M，求证：直线 MQ 平行于抛物线的对称轴。

如图(1)，通过对题目的感知、理解、解答之后，引导学生提出问题。

问题 1：题中的哪个条件，在其他条件不变的情况下，与“MQ 平行于抛物线对称轴”互为充要条件？



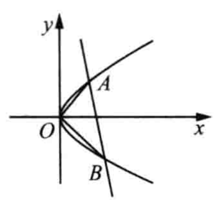
图(1)

子问题 1：经过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$焦点 F 的直线，与抛物线 C 交于 P、Q 两点，过点 Q 作直线 MQ 与 C 的对称轴平行，且与 C 的准线交于点 M，问直线 MP 是否经过抛物线 C 的顶点 O？

子问题 2：点 Q 是抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$上一点，直线 MQ 与 C 的对称轴平行，且与 C 的准线交于 M 点，直线 MO 交抛物线于点 P，问直线 PQ 是否过抛物线 C 的焦点 F？

子问题 1 为 2001 年全国高考试题(19)的关键内容，子问题 2 与子问题 1 的解法相似，这里不赘述。

例 2.[数学第二册(上)P130，例 2]如图(2)，直线 $y=x-2$与抛物线 $y^2=2x$ 交于 A、B 两点，求证：$OA\perp OB$。



图(2)

问题 2：题中的哪个条件，在其他条件不变的情况下与“$OA\perp OB$”互为充要条件？

子问题 1：A、B 是抛物线 C：$y^2=2x$ 上两点，且 $OA\perp OB$，问直线 AB 的方程是 $y=x-2$ 吗？

解：设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$。

(1)当直线 AB 的斜率不存在时，$AB\perp x$ 轴。

由 $y_2^2=2x_2$，$y_2=x_2$，得 $x_2=2$. ∴直线 AB 的为 $x=2$。

(2)当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为：$y=k(x-m)(k\neq 0)$。

由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=k(x-m) \end{cases}$，得：$y^2-\dfrac{py}{k}-2m=0$。

$\therefore y_1y_2=-2m$ ……………………………………………………………… ①

又$\because OA\perp OB$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，既 $x_1x_2+y_1y_2=0$ ……………………… ②

由 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$，得 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_1^2}{4}=m^2$ ……………………………… ③

将①、③式代入②式，得：$m=2$

$\therefore$直线 AB 的方程是 $y=k(x-2)$

综合(1)(2)，直线 AB 是过定点(2，0)的直线系，并不是 $y=x-2$

思考：(1)通过对题目充要性的质疑、探究，可知“直线 AB 过定点(2，0)”是“$OA\perp OB$”的充要条件，说明题目的条件可以弱化，你能再举出几个题目吗？

(2)在直线斜率的连续变化过程中，“直线 AB 的斜率存在”与“直线 AB 的斜率不存在”有关系吗？(2004 全国高考重庆卷理(21)的关键部分)

子问题 2：直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$交于 A、B 两点，若 $OA\perp OB$，p 值等于 1 吗？

解法与子问题 3 的解法类似，答案是 $p=1$。

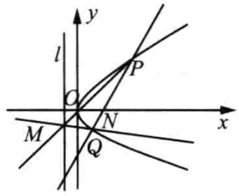
通过引导学生对“特定条件和结论的充要性”的质疑，可以培养学生“捕捉”题目条件变化后，及时改变原有思路解题，寻找新的解题途径的良好思维品质(思维的灵活性)[2]；而对“结论”和过程的再次思考的习惯，是“再创造”的重要动力之一。

(二)对“运动变化下图形性质的不变性”的质疑

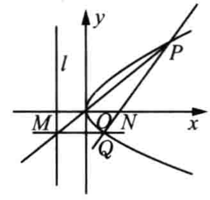
问题 3：如图(3)，在例 1 中，若直线 PQ 不过焦点 F，而是经过抛物线轴上一点 $N(n,0)\left(n>0,n\neq\frac{p}{2}\right)$，结论还成立吗？

画几个就可以验证结论不成立。进一步探索。

子问题 1：如图(4)，经过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$对称轴上一点 $N(n,0)(n>0)$的直线与 C 交于 P、Q 两点；过点 Q 作直线 MQ 与 C 对称轴平行，且与直线 PO 交于点 M。过 M 作直线 l 与 C 的对称轴垂直，那么，直线 l 的方程是什么？



图(3)



图(4)

结果是：直线 l 的方程是：$x=-n$，解答过程参考拙文《用一般化和类化的思维方法探究新命题》[3]。

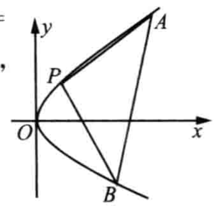
思考：在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中，直线 $x=-n$ 与点 $(n, 0)$，会不会像准线 $x=-\frac{p}{2}$ 和焦点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 的关系一样，有许多的性质呢？利用做过的题目试试看。

子问题 2：若直线 PQ 经过点 $N(n, 0)(n<0)$ 时（点 N 在抛物线外部），子问题 1 的结论还成立吗？

答案是肯定的，解法与子问题 1 的完全一样，同时，我们可以对子问题 1 的“反思”进行深一步的思考。

我们让例题 2 中的 P 点运动起来，看会有什么结果？

问题 4：如图(5)，在例 2 中，直线 AB 与抛物线 C：$y^2=2x$ 交于 A、B 两点，点 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上一点，且 $PA\perp PB$，问：直线 AB 是否还过定点？这个定点的坐标是什么？



图(5)

探索过程：

(1)画图验证（用几何画板画的图形比较准确）

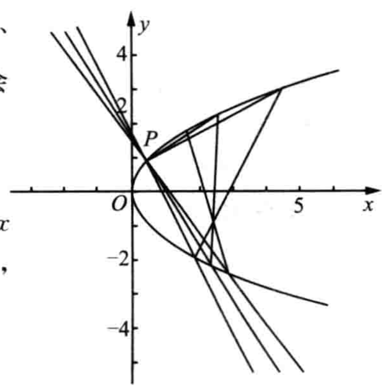
点 $P(x_0, y_0)$ 不动，让直线 PA、PB 变化，观察直线 AB，看它是否交于一点。如图(6)，好像是交于一点。

(2)特殊位置验证

P 取通径的端点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，经过运算，直线 AB 还真是过定点，这个定点是 $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$。这一步对猜想非常重要。

(3)猜想

结合 $p=1$，比较 $(0, 0)$ 与 $(2, 0)$、$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 与 $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$，对于 $P(x_0, y_0)$，会不会是过定点 $(x_0+2, -y_0)$ 呢？



图(6)

(4)解解看

解：如图(5)，设直线 AB 的方程为：$y=k(x-m)(k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0)$，交点为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$。

由 $\begin{cases} y^2=2x, \\ y=k(x-m) \end{cases}$ 得：$y^2-\frac{2y}{k}-2m=0$。

$\therefore y_1+y_2=\frac{2}{k}$，$y_1y_2=-2m$ ⋯⋯⋯⋯⋯ ④

$\because A$、B 两点在抛物线 $y^2=2x$ 上，

$\therefore y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$。

$\therefore \quad x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4}=m^2$ ……………………………………………………… ⑤

$\because A$、B 两点在直线 $y=k(x-m)$ 上，

$\therefore y_1=k(x_1-m)$，$y_2=k(x_2-m)$。

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2}{k^2}+2m$ ……………………………………………………………… ⑥

$\because PA\perp PB$，　$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$。

$\therefore (x_1-x_0,\ y_1-y_0)\cdot(x_2-x_0,\ y_2-y_0)=0$，

既 $x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2+y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2=0$ ………………… ⑦

将④⑤⑥式代入⑦式，得：$(m-x_0)^2-2(m-x_0)-\left(\dfrac{y_0^2}{k^2}+\dfrac{2y_0}{k}\right)=0$。

$\therefore \left(m-x_0+\dfrac{y_0}{k}\right)\left(m-x_0-\dfrac{y_0}{k}-2\right)=0$。

$\therefore m=x_0-\dfrac{y_0}{k}$ 或 $m=x_0+\dfrac{y_0}{k}+2$ ……………………………………………… ⑧

将⑧式中的两式分别代入方程：$y=k(x-m)$，得：

$y+y_0=k(x-x_0-2)$，或 $y-y_0=k(x-x_0)$（不合题意，舍去）。

$\therefore$ 直线 AB 过定点 $(x_0+2,\ -y_0)$，猜想得证。

思考：数学总是追求更一般的形式来刻画一类问题的本质，你能猜想出一个更一般的形式吗？

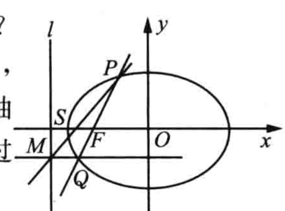
对“运动变化下图形性质的不变性”质疑，就是要从特殊形式中探索出较为一般的规律，是思维深刻性的具体表现，也是学生数学能力高低的重要标准之一；“猜想—验证—猜想—修正—……—证明”的探索过程，能使学生深刻地体验到数学问题的发生、发展、变化、深入的演变过程，是提高学生分析新问题、研究新问题、解决新问题能力的有效方法。

(三)对“类比到相关情景下的相似性”的质疑

联想到圆锥曲线的统一性，想一想，在椭圆中情况会怎么样？

问题 5：问题 1 中的子问题 1 可以类比到椭圆中去吗？

子问题 1：如图(7)，直线 PQ 经过椭圆的左焦点 F，且与椭圆交于 P、Q 两点；过点 Q 作直线 MQ 与椭圆长轴平行，且与椭圆的左准线 l 交于 M 点，问：直线 PM 经过椭圆的顶点 S 吗？



图(7)

容易验证，答案是否定的。

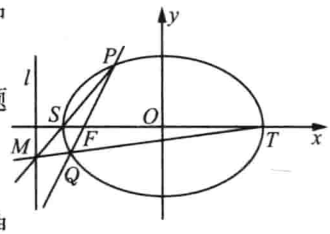
联想：例题 1 中的 MQ 与对称轴平行，可以看作是从抛物线的另一个顶点(无穷远点)引出的直线，在椭圆中是不是从另一个顶点 T

引出的直线具有这样的性质呢?（这个"联想"可以给学生简单介绍一下。）

子问题 2：如图(8)，直线 PQ 经过椭圆 C 的左焦点 F，与椭圆交于 P、Q 两点。点 S、T 是椭圆的顶点，直线 TQ 交椭圆左准线 l 于 M 点，问直线 MP 经过椭圆的左顶点 S 吗?

子问题 3：问题 3 中的子问题可以类比到椭圆中去吗?

本问题中的子问题 2、子问题 3，可以结合本问题中的"联想"和文[2]的结论解答，自己解解看。



图(8)

问题 6：问题 4 能类比到椭圆中去吗?

答案是肯定的，解答过程可参考朱其录、申后坤《圆锥曲线动弦的一个性质》[4]，这里不再证明。

波利亚(Polya)在《数学与猜想》[5]一书中，引用了著名天文学家、数学家开普勒(Kepler)的一段话："我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，他能揭示自然界的秘密，在几何学中他应该是最不容忽视的。"归纳和类比是人们获得新知识的主要途径，有意识的、合理的运用类比的方法，学生可以在问题质疑和研究过程中，体验到"真正的创新"所带来的愉悦，这是创新精神的"源动力"。

四、补充说明

1."创新"是针对学生个体而言，只要是学生提出或解决了"自己未知"的问题都具有"创新"的成分，都应当给予充分的肯定和表扬，以促成他们善于思考，敢于质疑的习惯。

2. 教学过程中，不能奢望每个学生都提出有深度的数学问题，不要将问题提出的教学形式化、庸俗化。

在对典型例题"特定条件和结论的充要性"、"运动变化下图形性质的不变性"、"类比到相关情景中的相似性"的质疑和逐步解答过程中，学生深切体验了"新"知识的产生过程，体会了数学学科严谨、求实、继承、创新的人文精神和理性思维的特征；体现了数学教育的技术功能和文化功能。学生在"层出不穷"的新知识、新方法、新体验中得到动力，使创新思维向纵深发展，创新能力得以不断提高。

注释：

[1]罗新兵，罗增儒．课堂问题变式浅析．中学数学教学参考，2005(3)

[2]胡炯涛．数学教学论．南宁：广西教育出版社．

[3]邱继勇. 用一般化和类比的思维方法探究新命题. 中学数学，2004(12)

[4]朱其录，申后坤. 圆锥曲线动弦的一个性质. 数学通报，2002(11)

[5][美]G. 波利亚. 数学与猜想. 李心灿，王日爽，李志尧译. 北京：科学出版社，2003

从一道数学竞赛题解法中，浅谈数学解题教学的教育功能

一、背景

在数学问题解决过程中，伴随着一系列的心理活动，无论是成功地解决了问题，还是遇到了麻烦，都能给人很多启迪和力量。

这些力量，被拿破仑·希尔和 N. V. 皮尔在《积极心态的力量》[1]中描述的更加具体和细致。他们从心理学、教育学、宗教学、市场规律等多角度，总结了积极心态能给人带来的 25 种力量，下面是其中的 9 种：

1. 正确思考的力量
2. 探索失败的力量
3. 克服困难的力量
4. 充满自信的力量
5. 克服心理近视的力量
6. 自我充电的力量
7. 掌握至善的力量
8. 不屈不挠的力量
9. 新奇想法的力量

我们知道，人的积极心态不仅需要心理素质支撑，还需要解决问题的方法和能力做基础。

乔治·波利亚曾经说过：解题(引者注：非纯数学问题)是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，因此解题可以认为是人类最富有特征性的活动；可以把人类定义为“解题的动物”[2]。这一论述，深刻地揭示了正确的数学问题的解题策略和思想，能给人们带来面对问题“积极的心态”和解决问题的力量，对于提高人们解决一般问题(相对于数学而言)能力具有普遍意义。

二、问题的提出

解题教学是中学数学教学的重要环节，解题过程应是学生磨砺心智、体验解决问题态度和方法、提高思维水平的过程，正像资深特级教师杨世明先生一直倡导的“数学教育的素质教育功能，应包括科学技术教育功能、文化修养培育功能和身心发展促进功能”[3]。

所以，我认为教师在解题教学中，面临的问题是：

1. 如何多层面、多角度地体现数学思想方法的思维价值和文化价值。
2. 怎样通过“数学背景”的挖掘，使学生体验到社会背景下的思维方法。
3. 如何使学生体验到数学的解题策略和思想的普遍意义。
4. 如何实现数学学科素质教育的三个目标。
5. 如何将外星人般的数学教师的思维，让学生感觉到亲切和亲近。

三、解决问题的方法

我在多年的教学实践和同一线教师的广泛接触中领悟到：

1. 数学在其伴随人类历史的发展过程中，形成了深邃、完整的思想方法体系，中学数学教师应意识到数学思想方法的丰富性和层次性，哲学层面的(如运动的观点、辩证的观点)、数学研究层面的(如符号化、公理化、结构化)、数学解题层面的(联系转化、联想化归)等，有利于数学思想方法教学的准确性和有效性。

2. 中学数学教师应当注重自身专业水平和文化修养的提高，有意识地发现和思考生活中现象的数学解释，以揭示数学思想方法的现实意义，发挥数学的思维方式对学生生活方式的影响。

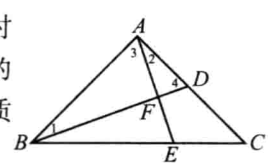
3. 在数学解题教学过程中，数学教师应当充分尊重学生的心理体验，无论是成功的解决了问题，还是遇到了麻烦，都应当给予具体地分析和肯定，给学生以更多的鼓励、启迪和力量。

4. 著名诗人雪莱说“除了变，一切都不能长久”。教师，要有一种简单而执著的追求——将运动变化进行到底，包括解法的变化、问题的变化、教法的变化、背景的变化。通过对“变化”的执著追求，体现数学家的思维方式，折射教师的生活理念和智慧，用行动去感染学生、感化学生。“解题”，为师生搭建了展示自我精神世界和魅力的宽阔舞台。

四、实例说明

参照乔治·波利亚的“解题表”，我把数学问题的解决过程，分为“解题策略的设计与实施、解题方法变化、题目变化、回顾与反思”四个层次。

下面通过对我所教的高中学生对一道竞赛题的解答、讨论过程的总结，说明解题教学中，如何应用乔治·波利亚的“解题表”，在解题过程的四个层次上，体现数学教育的素质教育功能。



图(1)

问题(2004 年河北省预赛题)已知：如图(1)，在$\triangle ABC$