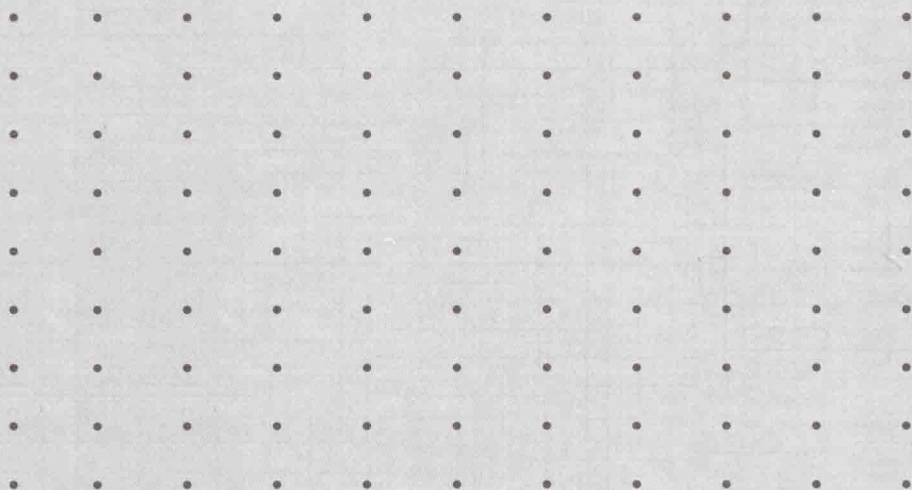


48

实分析与泛函分析（续论） （上册）

匡继昌



48

实分析与泛函分析 (续论)

(上册)

匡继昌

SHIFENXI YU FANHAN FENXI

内容提要

本书取名为《实分析与泛函分析(续论)》,有两个目的:一是作为与作者的《实分析与泛函分析》(面向 21 世纪课程教材,高等教育出版社,2002 年)相配套的教学参考书。按该教材原有的章节次序,每节分为三部分:(一)“内容提要”。包括本书引用该教材中的定义、定理等,它实际上是对相关概念和定理的系统归纳和小结;(二)“教材分析与理解”。对教材中的重点、难点以及基本概念的理解和来龙去脉作了细致的分析,补充了教材中省略的证明细节;(三)“习题分析”。对教材中所有的习题均给出了详细的分析与解答,某些章节还适当补充了若干习题和进一步的结果和问题。二是对于原教材受教学时数的限制而不能深究的重要的基本理论和基本的思想方法技巧及其应用,作了深入分析和推广。因此,本书既源于教材,又高于教材而自成体系,即本书以独特的方式系统地总结了该门课程的基本理论、基本的思想方法和技巧,是作者多年使用该教材的教学实践和研究的结晶,其中一部分内容已陆续在专业期刊上发表而受到广泛好评,因而本书实际上是以作者的教材为基础写成的一部学术专著。本书的读者对象与教材相同,既可作为大学理工科各专业,特别是数学或信息专业本科生和研究生的教学用书,也可供担任该课程教学的教师 and 广大科技人员参考,本书对于广大自学者更是难得的良师益友。

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析:续论.上册/匡继昌编著. — 北京:高等教育出版社,2015.1

ISBN 978-7-04-041305-2

I. ①实… II. ①匡… III. ①实分析②泛函分析
IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 237798 号

策划编辑 赵天夫
责任校对 刁丽丽

责任编辑 李华英
责任印制 毛斯璐

封面设计 赵 阳

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787 mm × 1092 mm 1/16
印 张 22
字 数 410 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2015 年 1 月第 1 版
印 次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定 价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 41305-00

《实分析与泛函分析》序言

多年来我先后在四所大学从事数学教学和科研工作,在与同事们和研究生们广泛接触的过程中,获得一个总的印象,凡是在经典分析、泛函分析、概率理论、微分方程及计算数学诸分支领域能胜任且愉快地进行教学和科研工作的,几乎无例外地都具有坚实的“实分析”(又名“实变函数论”)基础。我也曾不止一次地讲授过实变函数论课程,发现大多数学生学习这门课程成绩的高低,往往反映出他们的数学思维能力素质的高低。

后来读了一点数学史,才理解上述现象是很自然的。事实上,实分析的大部分理论模式及其构造方法是在微积分发明 200 年后,通过人们不断对数学基础问题的反思,才逐步发展成型的。实分析自然是一门极精致的数学,具有很高的抽象度,所以按照现代认知心理学和知识建构的规律来看,初学者需要不断提升自己的抽象思维素质,才能将实分析的理论模式在头脑中完成相应的“建构过程”。这样说来,初学者即使感到实分析中的概念和理论不易很快领悟或精通,也就不足为怪了。

20 世纪 50 年代至 60 年代,国内曾广泛采用俄罗斯数学家那汤松的《实变函数论》作教材,我也用过这本教材,认为它的习题编选得很好,颇能培育人的分析解题能力。只可惜教材分量太重,要占用学生的时间精力也太多。20 世纪 70 年代以来,国内各地已出版了多种属于实分析范围的教材,大多数比较精简扼要,能符合实际需要。

1996 年,我见到了湖南师范大学匡继昌教授的《实分析引论》,发现它居然以很小的篇幅讲述了实变函数论中所有基本重要的题材,确实是一大特色。《实分析引论》具有这一特色的原因是,它自始至终采用了现代数学著作中经常使用的“半形式主义”的表述法。这种表述法,使得数学论述及推理,表现得简捷、明晰而严谨,而又不致于像“纯形式主义的表述法”(如同数理逻辑中的纯符号形式表示法)那样会令初学者感到索然无味或者望而生畏。当然,《实分析引

论》之所以能做到篇幅小而内容多,也和作者运用了数学方法论中的“RMI 原则”(关系映射反演原则)有关,因为这一方法原则的使用能使得传统的题材内容得到化繁为简、化难为易的处理。

该书各章都包含一些精选的例题和习题,大多数例题都富于启发性。这对学生们特别是自学者无疑是极有帮助的。

该书的另一特色是,它还介绍了国内外的一些新成果。例如,第 6 章“微分论”中,给出了 Hardy-Littlewood 球形极大函数的概念及其基本性质,还提到了高维球域上的 Lebesgue 微分定理不能扩充到任意域上的情形等问题,这些都是十分引人入胜的题材。

现代国外数学教育工作者已经提出了“让学生们学会数学地思维”作为教育目标的主张。我是很赞成这种见解的,并认为一本好的实分析教材应该有助于学生去学会“数学地思维”,我相信这本简明教材对学生们学到“数学地思维”的能力和习惯必能起到积极作用。

上述《实分析引论》于 1996 年出版后,作者又根据新的教学实践和教育部教学改革立项的要求,将该书全部改写后,增加了泛函分析的基础部分,因而更名为《实分析与泛函分析》。实际上这构成了一部“现代分析”基础的完整教材。此教材的主要特点是,始终贯彻使用“集论与映射”观点处理一切题材,又利用了调和分析、逼近论等新成果与新技巧处理重要定理的论证方法,从而实现了“教改”中所提出的“化繁为简、化难为易、以简御繁”的目标。

本书论述了现代“实分析与泛函分析”中一系列基本而重要的成果。理论分析与技术处理均极精致,且能深入浅出,足见作者是具有精博的学术素养与卓越的专业水平的。而且作者的实际教学经验,促使本教材留有较大的弹性空间,使得师生和自学者都有选择余地。据我所知,本书通过不同层次的教学实践表明,它确实是一部改革力度大的优秀教材,故我乐愿期望这本新教材的出版能在更大范围内对推动教材革新起到积极作用。

大连理工大学数学科学研究所名誉所长,博士生导师,
《数学研究与评论》主编,《逼近论及其应用》(ATA)主编:
徐利治 2002-03-26 于北京寓所

前言

作者的《实分析与泛函分析》作为面向 21 世纪课程教材于 2002 年由高等教育出版社出版后, 受到广泛好评。本书已列入国家精品课程资源网。多年来读者在网上都是给予五星级评价, 称赞这是“罕见的一本好书”、“难得的好教材”。花家地网站在经典教材和学习心得栏目中, 指出该书是继夏道行的教材后最好的实分析教材, 比 Royden 的要好 (注: 指美国著名数学家 H. L. Royden 的著名教材 “Real Analysis”, 见参考文献 [37])。作者使用该教材的教学视频一直在许多网站出售。

由于该门课程是公认的大学数学专业最难教难学的课程, 而教好学好这门课程对于提高大学数学教育的质量和水平却至关重要。要想教好和学好这门课程, 除了要有好的教材外, 还需要与之相配套的教学参考书。因此, 作者在 1996 年《实分析引论》出版后就写了一本与之配套的实分析教学参考书。在此基础上进一步修改补充才于 2004 年写出这本《实分析与泛函分析 (续论)》初稿。在征求了专家的意见后, 又经过 9 年的反复修改和打印校稿。因此, 从 1996 年算起, 到 2013 年打印稿校完, 用了 17 年才完成这本《实分析与泛函分析 (续论)》。

俗话说, “十年磨一剑”。作者为什么要花这么大的代价, 用 17 年来磨出这一“剑”? 除了读者的鼓励和支持外, 主要基于两方面的考虑:

第一, 我们在教材建设中, 如何处理日益庞大的教学内容和教学课时限制之间的矛盾, 是长期以来一直都没有解决好的难题。于是作者就专门写了这本《实分析与泛函分析 (续论)》。它有两个目的。一是作为与该教材相配套的教学参考书。按该教材原有的章节次序, 对教材中的重点难点以及基本概念的理解和来龙去脉作了细致的分析, 对省略的证明和所有的习题均给出了详细的分析与解答。其二是对于原教材受教学时数的限制而不能深究的重要的基本理论和基本的方法技巧及其应用, 作了深入的分析和推广。因此, 本书不是通常意义上的教学参考书, 它源于教材, 又高于教材而自成体系, 即本书以独特的方式系统地总结了该门课程的基本理论、基本的思想方法和技巧, 是作者多年使用该教材的

教学实践和研究的结晶,其中一部分内容已写成论文陆续在专业期刊上发表而受到广泛好评,因而本书实际上是以作者的教材为基础写成的一部学术专著。

华罗庚教授曾指出,学习数学需要“有一个由薄到厚,再由厚到薄的过程”(见《数学通报》1979年第1期)。按作者的理解,两头的“薄”是指教材,中间的“厚”是指教学参考书和相关的数学资料等。这是因为,(一)“教材”要受教学课时的严格限制,不仅对所选的教学内容有严格限制,在内容的叙述上也要力求简明扼要。篇幅过大,反而使初学者抓不住要领。(二)“教材”对基本理论的叙述要遵循前后逻辑次序。(三)“教材”所配习题的数量和难度都要适中,不能过多过难。(四)受教学课时的限制,“教材”对基本理论重点放在讲清“是什么”,无法充分讲清“为什么”和基本理论的应用。然而,学生要真正理解消化教材,还要了解这些知识的前后联系和来龙去脉,了解基本的证明思路和细节,不仅要知其然,而且要知其所以然。有些问题还要适当打破教材的前后逻辑次序才能作透彻的分析,等等,这些任务,就落在教师的课堂教学和与教材相配套的教学参考书上。这就是为什么同一本教材由不同的教师使用会产生不同的教学效果。学生通过听课和做作业,还要看大量的参考书和文献,然后再经过由“厚”到“薄”的思考过程,才能做到“由此及彼、由表及里、去粗取精、去伪存真”。在“薄—厚—薄”的过程中要经过学生自己独立思考慢慢消化,才能算是真懂。至于要深入理解,则需要一个漫长的过程。由此可见,“教材”与“教参”各起着不可相互替代而又缺一不可的作用。然而,我国重视与中小学数学教材相配套教参的建设,却长期忽视与大学数学教材相配套教参的建设。

第二是基于作者的教学经历和当前大学数学教育的现状。根据作者半个多世纪的教学经验,“实函与泛函”之所以难教难学,最大的拦路虎就是该门课程本身的抽象概念多,从而带来的逻辑推理多,此外,还与思维习惯没有实现两个转化有关。这两个转化包括:一是基本的概念从直观的描述向严格的数学符号语言转化,二是逻辑推理从微积分中的 ε - δ 语言向集合语言转化。因此,像“实函与泛函”这门历来难教难学的课程,没有教师的讲解,光看“教材”是很难自学成功的。作者读大学时,由于没有学过这门课程,参加工作后,曾多次自学都没有成功。自学时总觉得似懂非懂。直到1983年,作者去北京进修了一年,听了这门课,才打下一个好的基础。北京进修回校后,作者就在这个基础上一直专门教这门课(包括本科生和研究生的学位课程)到退休,从使用不同现成教材到自编讲义,在教学实践中对讲义多年修改后,于1996年出版《实分析引论》,之后再继续边教边改,到2002年取名《实分析与泛函分析》由高等教育出版社出版,已经历了长达十多年的不断修订过程,使得本书至今仍保持独一无二的特色,其中“实分析”部分包括了传统的“实变函数论”和“测度论”两门课程;大学扩招以来,许多学校都取消了“泛函分析”课程,还大幅度压缩了“实变函数”课

程的教学时数, 加上教与学都没有严格的要求, 使得学生很难真正理解该课程的基本内容。而作者使用该教材的教学视频之所以长期热销, 读者看重的也是作者对教材的分析与理解。正如读者评价: “非常好的书, 配合视频学习, 效果加倍。” 而本书则是作者使用该教材的教学视频的进一步的深化和发展, 期望能对大学理工科各专业, 特别是数学与信息专业的师生, 尤其是初学者和自学者有所帮助。

为了读者阅读方便和节省篇幅, 本书所指的教材, 若没有特别说明, 均指作者的上述《实分析与泛函分析》, 所使用的数学符号、章节名称、引用的公式和参考文献的编号均与教材相同。所补充的定义、定理、数学公式和新文献编号都与教材相应章节相衔接。本书中 $\log x$ 表示以 e 为底的对数, 与 $\ln x$ 通用。教材第 9 章的续论是为了照顾不同学校不同课时的需要, 本书从内容的完整性出发将本章的大部分内容能并入前面各章的尽量分别并入了前面相应的各个章节内。每节分为三部分: (一) “**内容提要**”。包括本书引用教材中的定义定理等, 它实际上是相关知识的系统归纳和小结, 使读者不查阅原教材也能方便使用本书; (二) “**教材分析与理解**”。它反映了作者在教学过程中对教材重点难点的理解和分析, 知识的前后联系和来龙去脉的分析, 相关知识的重要应用, 教材中略去的证明细节等, 还增加了在现行教材中不易找到又十分重要的内容, 如 Cantor 集, 在现行教材中往往仅作为一般的例子一带而过, 在作者的教材中则对 Cantor 集的构造、性质和初步应用作了详细的介绍和分析, 在本书中则进一步分析了该集合的本质和若干重要的推广, 它是“分形”和构造各种重要反例的基础, 本书就总结了 28 个这种反例, 其中有许多在微积分教学中是无法讲清的问题。(三) “**习题分析**”。对教材的所有习题都给出了详细的分析和解答。有的章节还适当补充了若干习题或进一步的结果和问题。现在学生往往过多地依赖于各种题解。但不少学生反映其中有许多题解还看不懂, 是因为在微积分教学中, 大量的计算, 有现成的公式可套, 真正逻辑推理问题并不多, 而在“实分析与泛函分析”的教学中, 大量的逻辑推理问题, 它的前提就是要求对基本概念的理解和掌握, 这恰好是初学者所欠缺的。为了帮助初学者克服这些困难, 我们在“续论”中力图揭示该课程与微积分、拓扑学, 以及工程技术之间的深刻联系, 并利用“实分析与泛函分析”这种强有力的工具回过头去处理微积分中的困难问题。

作者感谢高等教育出版社出版本书, 感谢李蕊、赵天夫、李华英、李鹏等编辑的热情帮助和为本书的出版所付出的辛勤劳动。作者感谢湖南师范大学出版基金的资助。作者还要感谢家人长期的理解和支持。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目录

第 1 章 预备知识	1
§1 集合的运算	1
§2 集合间的映射	11
§3 集合的基数	27
第 2 章 点集的拓扑概念	35
§1 距离空间中的拓扑概念, 拓扑空间	35
§2 连续性, 逼近定理	71
§3 R^n 中开集、闭集的构造, Cantor 集	91
§4 覆盖	104
第 3 章 测度论	111
§1 R^n 中的 Lebesgue 外测度	111
§2 R^n 中的 Lebesgue 测度	120
§3 抽象外测度与测度	140
第 4 章 可测函数	155
§1 可测函数的定义及其基本性质	155
§2 可测函数列的收敛性	172
§3 可测函数的结构 (Luzin 定理)	188
第 5 章 积分论	205
§1 Lebesgue 积分的定义	205
§2 (L) 积分的初等性质	218
§3 (L) 积分列的极限定理, 无穷级数敛散性判别法	246

§4 (L) 积分与 (R) 积分的关系, 积分的计算技巧	285
§5 Fubini 定理	322
参考文献	335

第 1 章

预备知识

§1 集合的运算

一、内容提要

要熟悉集合运算的基本关系式, 特别是

1. 集合并交的分配律

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha}); A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha});$$

若 $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}$, 则可将 A 分解为 $A = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$.

2. 差补运算

$$B - A = \{x : x \in B, x \notin A\}, A^c = \{x \in X : x \notin A\}.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset; A - B = A \cap B^c. \quad (1.2), (1.3)$$

集 A, B 的对称差: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

3. 并交对偶公式 (De Morgan 法则)

$$B - \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B - A_{\alpha}); \quad B - \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B - A_{\alpha}); \quad (1.4), (1.5)$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c; \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c. \quad (1.6), (1.7)$$

4. 数列的极限

(1) 若 $\forall k \in N, x_k \leq x_{k+1}$, 则称 $\{x_k\}$ 是**递增数列**, 这时定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{k \geq 1} \{x_k\}$;

若 $\forall k \in N, x_k \geq x_{k+1}$, 则称 $\{x_k\}$ 是**递减数列**, 这时定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{k \geq 1} \{x_k\}$.

(2) 由给定的数列 $\{x_n\}$, 产生递减数列 $y_k = \sup_{n \geq k} \{x_n\}$ 和递增数列 $z_k = \inf_{n \geq k} \{x_n\}$, 由此定义数列 $\{x_n\}$ 的上、下极限:

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \inf_{k \geq 1} \{y_k\} = \inf_{k \geq 1} \{\sup_{n \geq k} x_n\}; \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \sup_{k \geq 1} \{z_k\} = \sup_{k \geq 1} \{\inf_{n \geq k} x_n\}.\end{aligned}$$

(3) 基本性质

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow x = x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k).$
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = a.$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{-x_n\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n\}; \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{-x_n\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_n\}.$
- ④ $x_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n; \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n.$
- ⑤ 若 $x_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_n\}}.$
- ⑥ 设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任一收敛子列, 则

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}.$$

这是因为上式等价于 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. 后者可由下式推出:

$$\inf_{j \geq k} \{x_{n_j}\} = z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k} = \sup_{j \geq k} \{x_{n_j}\}.$$

- ⑦ $\inf_{n \geq j} \{x_n\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \leq \sup_{n \geq m} \{x_n\}, \forall j, m \in N.$

这是因为上式等价于 $z_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} z_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \leq y_m$. 后者可由下式推出:
由 $\{z_j\}$ 递增, $\{y_k\}$ 递减, 从而

$$z_j \leq z_k \leq y_k \leq y_m \quad (k > \max\{j, m\}),$$

在上式中令 $k \rightarrow \infty$, 就得到所要证的不等式.

- ⑧ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = x \Leftrightarrow$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得 $\forall n \geq n_0, x_n < x + \varepsilon$;

b) $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0$, 使得 $x_n > x - \varepsilon$.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow$$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得 $\forall n \geq n_0, x_n > x - \varepsilon$;

b) $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0$, 使得 $x_n < x + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{aligned}$$

⑩ 设 $x_n, y_n \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} (\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n)(\liminf_{n \rightarrow \infty} y_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n y_n\} \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n)(\liminf_{n \rightarrow \infty} y_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n y_n\} \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n)(\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n). \end{aligned}$$

注 在上述求和求积时, 不能出现 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ 的情形.

5. 集合列的极限

(1) 若 $\forall k \in N, A_k \subset A_{k+1}$, 则称 $\{A_k\}$ 是**递增集列**, 这时定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n =$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k;$$

若 $\forall k \in N, A_k \supset A_{k+1}$, 则称 $\{A_k\}$ 是**递减集列**, 这时定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

(2) 由给定的集列 $\{A_n\}$, 产生递减集列 $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ 和递增集列 $E_k =$

$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$, 由此定义集列 $\{A_n\}$ 的**上、下极限集**:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right); \quad (1.21)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right). \quad (1.22)$$

二、教材分析与理解

(一) 集合是数学和逻辑学中最广的原始概念. 许多数学分支的研究对象实际上是具有某种特定结构的集合. 如群、环、域、各种抽象空间, 等等. 图论的研究对象——图, 就是直观地表示具有某种二元关系的集合, 其中用点代表集合中的元素, 用两点间的连线表示对应的两个元素之间具有某种关系. 而组合数学中的图是由有限集 A 和 A 的相异元素的无序对的有限集 E 组成的, 记为

$G = (A, E)$. A, E 的元素分别称为顶点和棱. 若 A 为非空有限集, E 是由 A 的相异元素的序对组成的有限集, 则称 $G = (A, E)$ 为有向图. 要理解概率论的本质特征, 则依赖于建立在集合论基础上的 (L) 测度与 (L) 积分的理论. 教材第 9 章 §4 将概率论的基本概念与集合论的相应概念作了对比. 我们在微积分中所熟悉的实数理论的模型, 在本质上也是利用集合论的工具建立起来的. 但是, 我们在教学中却不善于作这样的联系和对比分析. 于是就陷入“学了不知道有什么用”, “要用时不知道到哪里学”的怪圈. 我们仅以“芯片”为例, 因为它是高科技产品中的核心技术, 电子信息产业的“心脏”. 中国社会科学院发布的 2014 年“经济蓝皮书”指出, “中国工业虽然存在产能过剩状况, 但很多行业的高端环节大量依赖进口. 例如, ‘芯片’ 90% 依赖进口, 每年进口额超过石油”. 事实上, 我国芯片的研究起步并不晚, 早在 20 世纪 70 年代就有产品问世, 为什么经历了半个世纪的研究还 90% 依赖进口? 这种状况很值得我们深思. 在我国的计算机原理和信息论等课程中都离不开讲“芯片”, 但却不讲芯片与数学有什么关系. 事实上, 芯片的结构, 无论多么复杂, 都是由以下三种最基本的逻辑电路组成的:

(1) 或门: $L = A \cup B$, 表示开关 A 或 B 接通, 就有信号从 L 输出;

(2) 与门: $L = A \cap B$, 表示开关 A 与 B 同时接通, 才有信号从 L 输出;

(3) 非门: $L = A^c$, 表示开关 A 接通时, L 无信号输出, 而开关 A 断开时, L 才有信号输出.

这三个逻辑门电路又分别对应于集合论中的集合的并、交和补三种运算. 也就是说, 芯片的设计, 在本质上用到的是数学中的集合运算. 有专家指出, 计算机芯片易犯数学错误, 可能威胁到全球电子商务系统. 就是指芯片设计中的逻辑运算错误. 而在“数理逻辑”教学中, 对于五个基本的联结词的真值表 ($p \vee q, p \wedge q, \neg p$) 的取值, 也很少进一步问为什么取这些值. 实际上也只有结合逻辑电路才讲得清楚 (它们分别对应于或门、与门、非门. 开关接通和有信号输出, 表示低电平, 用 0 表示; 开关断开和无信号输出, 表示高电平, 用 1 表示). 计算机图形学中, 令人眼花缭乱的复杂图形, 都是对点、线、面、球、圆柱、棱柱等几何元素进行集合的并、交、差等运算的结果. 由此可见, 如何将我们所熟悉的自然语言转化为集合语言, 是我们学习数学和应用数学的基础和关键, 也才有可能将集合论和以集合论为基础的现代数学用于产品设计、人工智能、语言学、心理学、经济学等更广泛的领域.

(二) 要从正反两方面去理解和运用基本的概念和运算. 例如,

$$1. x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \Rightarrow \exists \alpha_0 \in I, x \in A_{\alpha_0}; \text{ 而它的反面: } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \Rightarrow \forall \alpha \in I, x \notin A_{\alpha}, \text{ 也可利用 (1.6), } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \Rightarrow \forall \alpha \in I, x \in$$

$A_\alpha^c \Rightarrow x \notin A_\alpha$. 类似地, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$; 而 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in I, x \notin A_{\alpha_0}$.

2. 传统教材将集列 $\{A_n\}$ 的上、下极限分别定义为“凡属于无穷多个 A_n 的元素全体”和“除有限个 A_n 外, 属于一切 A_n 的元素全体”. 它历来使初学者感到难懂难用, 成为理解许多基本定理证明的拦路虎, 做相关的习题更是无从着手. 本教材通过与初学者所熟悉的数列的极限作对比的方式, 先定义单调集列的极限, 再对一般的集列 $\{A_n\}$ 通过令 $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ 和 $E_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ 产生的单调集列来定义 $\{A_n\}$ 的上、下极限, 就变得易懂易用了. 通过本节后面习题 1.1 的分析就可看出这一点.

3. 我们在许多问题的研究中, 并不一定要考虑基本集 X 的所有子集族, 即 X 的幂集 $P(X)$, 而只要考虑基本集 X 的一部分子集构成的集族, 记为 Σ . 我们要求对 Σ 中的元素 (仍是集) 所作的运算 (如集合的代数运算、极限运算等) 具有某种封闭性. 根据不同运算的封闭性, 就得到教材中的半环、环、代数、 σ 代数等概念. 将这些概念用于概率论中时, 我们也并不总是把基本空间 Ω 的一切子集都看成事件, 但要求事件经过可数个集合运算所得的集仍为事件, 即 Ω 中所有事件构成一个 σ 代数. 理解了这些概念, 才能理解相关定理的证明思路. 例如, 要证明 Σ 是 X 上的 σ 代数, 就要证明 Σ 满足:

$$(1) X \in \Sigma; (2) E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma; (3) \forall A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma.$$

(三) 集合运算的基本技巧

证明集合等式 $A = B$, 按常规方法, 就要证明两个相反的包含关系: $A \subset B, B \subset A$. 但直接利用集合的运算性质往往更简便. 对于集合差的性质不易记住, 还易记错. 实际上不必去记它. 这只要利用 (1.3): $A - B = A \cap B^c$, 将差运算 $A - B$ 转化为交运算 $A \cap B^c$. 例如, 教材第 3 页留给读者证明的几个式子就可以简捷证明如下:

$$(1) (A - B) \cup B = A \cup B.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } (A - B) \cup B &= (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap X = A \cup B. \end{aligned}$$

注 当 $B \subset A$ 时, 从 (1) 得到集 A 的常用分解式: $A = (A - B) \cup B$. 事实上, $A = (A - B) \cup B \Leftrightarrow B \subset A$.

$$(2) A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A - B.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 } A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) \\
 &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \emptyset \cup (A - B) = A - B; \\
 (A \cup B) - B &= (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A - B.
 \end{aligned}$$

注 按同样的证明思路, 不难证明下述常用的集合等式:

- ① $(A \cup B) - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
 - ② $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
 - ③ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
 - ④ $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$;
 - ⑤ $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
- $$(3) \quad (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D);$$
- $$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

证 利用结合律、分配律和 (1.3), 得到

$$\begin{aligned}
 (A - B) \cap (C - D) &= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c) = (A \cap C) \cap (B^c \cap D^c) \\
 &= (A \cap C) \cap (B \cup D)^c = (A \cap C) - (B \cup D); \\
 (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c = (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \\
 &= ((A \cap B) \cap A^c) \cup ((A \cap B) \cap C^c) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap (B \cap C^c)) \\
 &= A \cap (B - C).
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha - \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha - B_\alpha). \quad (1.9)$$

证 利用 (1.3), 得到

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha - \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right)^c = \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left(\bigcap_{\beta \in I} B_\beta^c \right) \\
 &= \bigcup_{\alpha \in I} \left[A_\alpha \cap \left(\bigcap_{\beta \in I} B_\beta^c \right) \right] \subset \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap B_\alpha^c) = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha - B_\alpha).
 \end{aligned}$$

(5) 若 $B_k \subset A_k$, 且 $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($k \neq j$), 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - B_k). \quad (1.10)$$