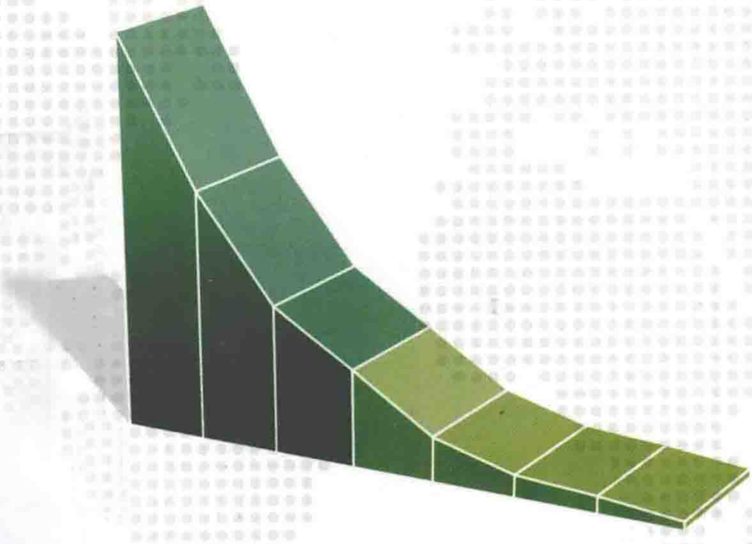
普通高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

苏敏邦 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十二五"规划教材

概率论与数理统计

苏敏邦　主　编
杨庚华　宋春玲　副主编
王　冬　主　审

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材是针对高校应用型人才的要求和现阶段非重点高校学生的基础而组织编写的，共8分册。本书为《概率论与数理统计》分册。

本书内容包括：随机事件与概率、离散型随机变量、连续型随机变量、数字特征、极限定理、样本与统计量、参数估计与假设检验等。

本书在力求体系的严密性的基础上，简化有关定理的证明，对于难度较大的证明予以省略，将数学理论与人们常用的办公软件 Office 中的 Excel 函数统计功能相结合，以提高概率统计知识的使用性。

本书适合作为普通高校非数学专业的教材，也可供成人本科教育、高等职业教育选用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/苏敏邦主编. —北京：中国铁道出版社，2011.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13071-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①苏… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 149064 号

书　　名：**概率论与数理统计**

作　　者：苏敏邦　主编

策划编辑：李小军

责任编辑：李小军

编辑助理：何　佳　　**读者热线**：400-668-0820

封面设计：付　巍　　**封面制作**：白　雪

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码：100054）

印　　刷：北京新魏印刷厂

版　　次：2011年8月第1版　　2011年8月第1次印刷

开　　本：700mm×1000mm　1/16　**印张**：11.5　**字数**：339千

印　　数：2 500 册

书　　号：ISBN 978-7-113-13071-8

定　　价：22.00元

前　言

为了更好地适应我国高等教育从精英式教育向大众化教育发展的需要，满足社会对高校培养应用型人才的需求，并考虑到现阶段非重点高校学生的基础，参照非数学类本科专业大学数学公共基础课教学大纲的要求，编写了本套适用于普通高等学校本科教育的大学数学系列教材. 本系列教材包括以下8册：

《高等数学·上册》；

《高等数学·下册》；

《线性代数》；

《概率论与数理统计》；

《高等数学学习辅导与提高·上册》；

《高等数学学习辅导与提高·下册》；

《线性代数学习辅导与提高》；

《概率论与数理统计学习辅导与提高》.

本套教材特为普通高校非数学专业的学生编写，也可供成人本科教育、高等职业教育选用。基于此类教学的特点，在编写这套教材时，我们立足于：

(1) 涵盖教学大纲要求的内容，在保证表述和证明严谨性的前提下，尽量以**清晰**、**简明**的思路阐述课程内容，略去了一些过于烦琐和深奥的证明；

(2) 以**注解**的形式对重要的概念、定理、公式的理解和应用加以详细说明，以便于学生理解；

(3) 选择了较多**具有代表性、能说明解题思路和方法**的例题，以便于学生尽快掌握相关内容的应用；

(4) 对于教学大纲基本要求之外的内容和某些理论性较强的章节，我们用 * 号标出，各校各专业可以根据具体的教学要求和学时取舍；

(5) 在教材的每一章后面配备了可以同步完成的基本习题，学生独立完成这些习题即可以掌握课程的基本要求，在书末给出了习题参考答案；

(6) 在与主教材配套的学习辅导与提高中，给出了内容小结、疑难解析、

补充例题、提高习题、自测题。

本套教材的编者都是从事大学数学课堂教学20多年的资深教师，对普通高校教学特点和要求比较了解，希望这套教材切实符合当前学生实际和今后工作学的需要，取得理想的教学效果。

编　者

2011年5月

目　录

第 1 章

随机事件与概率

知识体系图

- 随机事件与概率
  - 随机现象
  - 随机试验
  - 随机事件
    - 表达方式
      - 语言叙述
      - 集合语言描述——基本事件、样本空间、事件、必然事件、不可能事件
      - 关系——包含、相等、互斥、对立
      - 运算——和(并)、积(交)、差、逆
    - 概率
      - 定义
      - 性质——非负、完备、可列可加加法公式、求逆公式
      - 古典概型
      - 条件概率——定义、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式
      - 事件的独立性

概率论研究随机现象的统计规律性，它是本书的理论基础，数理统计则从应用角度研究如何处理随机数据，建立有效的统计方法，进行统计推断.

随机事件与概率是概率论的两个最基本的概念，本章先介绍这两个概念.

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象

自然界和人类社会生产及科学实验中，普遍存在着两类现象：一类是事前可以预知结果的，即一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**或称**必然现象**.

例如，重物在高处总是垂直落到地面；在一个大气压下，水在 100 ℃时会沸腾等.

但人们逐渐还发现另一类现象，它是事先不可预知的，在一定条件下可能出现也可能不出现的现象. 在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为**偶然性现象**或**随机**

现象.

例如,抛掷一枚质量均匀对称的硬币时,结果可能是正面朝上,或反面朝上;新生的婴儿可能是男孩也可能是女孩等都是随机现象.

随机现象的结果事先不能预测,初看似乎毫无规律,但人们发现同一现象大量重复出现时,其结果出现的频率具有稳定性,从而表明随机现象也有各自固定的规律性.人们把随机现象在大量出现时所表现出来的规律性称为随机现象的**统计规律性**.对随机现象的研究,就需要对随机现象重复观察,把这种观察称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E.

例如:

E_1:掷一颗骰子,观察所掷的点数是多少;

E_2:观察电话交换台在一天内收到的呼叫次数;

E_3:对某台电视机做试验,观察其使用寿命;

E_4:对某只灯泡做试验,观察其使用寿命是否小于 200 h;

$E_1 \sim E_4$ 均为随机试验.

显然随机试验具有如下特征:

(1)可以在相同条件下重复进行;

(2)每次试验的结果不止一个,并且事先可以确定试验的所有可能的结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

1.1.2 随机事件

在随机试验中,尽管在每次试验之前人们不能提前预知出现哪种结果,但对于这种试验可能出现的各种结果是已知的.例如在掷一枚骰子时,虽然不知道几点朝上,但只能是 1~6 中的一个.将随机试验的所有可能的结果组成的集合称为**样本空间**,记为 Ω.把样本空间的一个子集称为**随机事件**,简称为**事件**,常用大写字母 A,B,C 等表示.

特别地,如果事件只含一个试验结果(即样本空间中的一个元素),则称该事件为**基本事件**;否则为**复合事件**.

由于只要做试验,就有结果,即样本空间 Ω 中就会有一个点(样本点 ω)出现,如果 $\omega \in A$,则称**事件 A 发生**.

【例 1.1】 写出下列试验的样本空间,对于 E_1,下面给出的集合表示什么事件?指出其中哪些是基本事件. $A_1=\{1\},A_2=\{2\},\cdots,A_6=\{6\},B=\{2,4,6\},C=\{1,3,5,\},D=\{4,5,6\}$.

E_1: 掷一颗骰子,观察所掷的点数是多少;

E_2: 观察电话交换台在一天内收到的呼叫次数;

E_3: 对某台电视机做实验,观察其使用寿命;

E_4: 对某只灯泡做实验,观察其使用寿命是否小于 200 h.

解 若以 Ω_i 表示试验 E_i 的样本空间,$i=1,2,3,4$,则

E_1的样本空间 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$；

E_2的样本空间 $\Omega_2=\{0,1,2,\cdots\}$；

E_3的样本空间 $\Omega_3=\{t,t\geqslant 0\}$；

E_4的样本空间 $\Omega_4=\{$寿命小于 200 h,寿命不小于 200 h$\}$.

对于 E_1有

$A_1=\{1\},A_2=\{2\},\cdots,A_6=\{6\}$分别表示所掷结果为 1 点至 6 点，都是基本事件；

$B=\{2,4,6\}$——表示所掷结果为偶数点，是复合事件；

$C=\{1,3,5\}$——表示所掷结果为奇数点，是复合事件；

$D=\{4,5,6\}$——表示所掷结果为 4 点或 4 点以上，是复合事件.

特别地，事件具有以下规律：

(1) 由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且是 Ω 自身的一个子集. 故在每次试验中 Ω 总是发生. 因此，称 Ω 为**必然事件**. 例如掷骰子“点数不大于 6”是必然事件.

(2) 空集$\varnothing$不包含任何样本点，但它也是样本空间 Ω 的一个子集，由于它在每次试验中肯定不发生，所以称为**不可能事件**. 例如掷骰子“点数大于 6”是不可能事件.

(3) 不可能事件、随机事件与必然事件有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

1.1.3 事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系和运算来处理，下面给出借用这些关系与运算在概率论中的含义.

1. 包含

事件 A 包含于事件 B ：若事件 A 发生必有事件 B 发生，则称事件 A **包含于**事件 B，记为 $A\subset B$，直观表示如图 1-1 所示.

2. 相等

事件的相等：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

3. 并、和

事件 A 与 B 的并或和：若事件 C 发生，当且仅当事件 A 或 B 发生，则称事件 C 为事件 A 与 B 的**并**或**和**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$，直观表示如图 1-2 所示.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$的和

$$C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\ ,$$

C 发生就是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少一个事件发生.

无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和

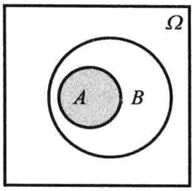
$$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\ ,$$

C 发生就是 $A_1,A_2,\cdots$中至少一个事件发生.

4. 积、交

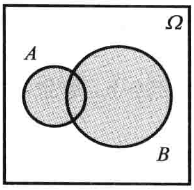
事件 A 与 B 的积或交：若事件 C 发生，当且仅当事件 A 与 B 同时发生，则称事件 C

为事件 A 与 B 的**积或交**,记为 $A\cap B$ 或 AB,直观表示如图 1-3 所示.



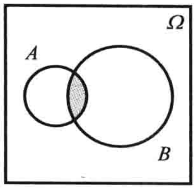
$A\subset B$

图 1-1



$A\cup B$

图 1-2



AB

图 1-3

特别地,当 $AB=\varnothing$ 时,称 A 与 B 为**互斥事件**(或**互不相容事件**),简称 A 与 B **互斥**.也就是说事件 A 与 B 不能同时发生,直观表示如图 1-4 所示.

【例 1.2】 (例 1.1 续)$A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, 于是 $A_1A_2=\varnothing$,故 A_1 与 A_2 互斥;$B=\{2,4,6\}$,$C=\{1,3,5\}$, 于是 $BC=\varnothing$,故 B 与 C 也互斥.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积

$$C=\bigcap_{i=1}^{n}A_i ,$$

C 发生就是 $A_1,A_2,\cdots, A_n$ 都发生.

无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积

$$C=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i ,$$

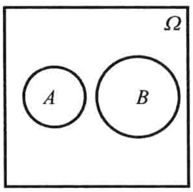
C 发生就是 $A_1,A_2,\cdots$ 都发生.

5. 差

事件 A 与 B 的差:若事件 C 发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生,则称事件 C 为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$,直观表示如图 1-5 所示.

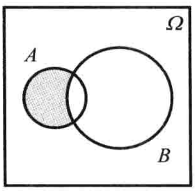
特别地,称 $\Omega-A$ 为 A 的**对立事件**(或 A 的逆事件、补事件)等,记为$\overline{A}$,直观表示如图 1-6 所示.$\overline{A}$就是 A 不发生. 显然必然事件 Ω 与不可能事件$\varnothing$为一对对立事件.

显然,$A-B=A-AB=A\overline{B}$,$\overline{\overline{A}}=A$.



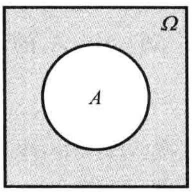
A与B互斥

图 1-4



$A-B$

图 1-5



$\overline{A}$

图 1-6

【例 1.3】 (例 1.1 续)$A_1=\{1\}$, $B=\{2,4,6\}$,于是 $\overline{A}_1=\{2,3,4,5,6\}$,$\overline{B}=\{1,3,5\}$.

事件的运算有如下法则:

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，还有 $A-B=A\overline{B}, A=AB\cup A\overline{B}$.

对于多个随机事件，上述运算规则也成立

$A(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=(AA_1)\cup(AA_2)\cup\cdots\cup(AA_n)$.

事件运算与集合运算的对照如表 1-1 所示。

表 1-1 事件运算与集合运算对照表

记 号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$A\subset B$	事件 A 导致事件 B 发生	集合 A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 没有相同元素

同步练习

一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标($i=1,2,3$). 试用文字叙述下列事件：(1)$A_1\cup A_2$；(2)$\overline{A_2}$；(3)$A_1\cup A_2\cup A_3$；(4)$A_1A_2A_3$；(5)A_3-A_2；(6)$\overline{A_1\cup A_2}$；(7)$\overline{A_1A_2}$；(8)$\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；(9)$\overline{A_2A_3}$；(10)$A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$.

1.2 事件的概率

对于一枚质量均匀的硬币，掷硬币是一个随机试验，虽然不知道在一次试验中是正面朝上还是反面朝上，但可以思考在一次试验中正面朝上还是反面朝上的可能性有多大. 由于对称性，很自然可以断定正面朝上和反面朝上的可能性都是$\frac{1}{2}$. 为了找到一个合适的数来描述这种可能性的大小，本节引入频率的概念，用它来描述事件发生的频繁程度，进而表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数量描述——概率.

1.2.1 事件的频率

定义 1.1 若在相同条件下进行 n 次试验，其中事件 A 发生了 m 次. 则称 m 为事

件 A 在 n 次试验中发生的**频数或频次**，称 m 与 n 之比 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$. 即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 发生的次数}}{\text{试验的总次数}}$$

由定义易知，频率具有如下性质：

性质 1 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

性质 2 $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

性质 3 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_k)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i) \tag{1.1}$$

【例 1.4】 历史上有很多人做了抛硬币试验，其结果如表 1-2 所示.

表 1-2 抛硬币试验的记录

试验者	德摩根	蒲 丰	皮尔逊	皮尔逊
抛硬币次数(n)	2 048	4 040	12 000	24 000
正面朝上次数(m)	1 061	2 048	6 019	12 012
正面朝上频率$\left(\frac{m}{n}\right)$	0.518 1	0.506 9	0.501 6	0.500 5

从上述数据可得：

(1) 频率有随机波动性，即对于同样的 n，所得的 $f_n(A)$ 不一定相同；

(2) 抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(A)$ 的随机波动幅度较大，但随 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5.

一般地，当试验次数 n 充分大时，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且，试验次数越多，一般说来摆动的幅度越小. 这一性质称频率的**稳定性**.

频率在一定程度上反映了事件在一次试验中发生的可能性大小. 尽管每进行连续 n 次试验，所得到的频率可能各不相同，但只要 n 足当大，频率就会非常接近一个固定值——概率.

1.2.2 概率公理化定义

1933 年，前苏联数学家(概率统计学家)柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 给出了概率的如下公理化定义.

定义 1.2 设 E 是一个随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 中的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，把满足下列条件的集合函数称为事件 A 的**概率**.

(1) 非负性，对于 E 中的每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 完备性，$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性,若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{1.2}$$

注意:这里的函数 $P(A)$ 与以前所学过的函数不同.不同之处在于:$P(A)$ 的自变量是事件(集合)A.

1.2.3 概率的性质

由概率的定义,可以推出如下性质:

性质 1 $P(\varnothing)=0$,即不可能事件的概率为零;

性质 2 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则有:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n), \tag{1.3}$$

即互斥事件并的概率等于它们各自概率之和(有限可加性);

性质 3 对任一事件 A, 均有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.4}$$

性质 4 对两个事件 A 和 B,若 $A \subset B$, 则有:

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geqslant P(A) \tag{1.5}$$

性质 5 对任意两个事件 A, B,有

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.6}$$

证明 因 $AB, A-AB, B-AB$ 两两互斥,且由概率的可加性, 有

$$\begin{aligned}
P(B \cup A) &= P(AB \cup (A-AB) \cup (B-AB)) \\
&= P(AB) + P(A-AB) + P(B-AB) \\
&= P(AB) + P(A-AB) + P(B-AB) + P(AB) - P(AB) \\
&= P(A) + P(B) - P(AB)
\end{aligned}$$

推广:n 个事件

$$P\left(\bigcup_{t=1}^{n} A_t\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \tag{1.7}$$

特别地,$n = 3$ 时,有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

【例 1.5】 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.5$,在下列三种情况下求 $P(B\overline{A})$.

(1)A 与 B 互斥; (2)$A \subset B$; (3)$P(AB)=0.2$.

解 (1)由于 A 与 B 互斥,则 $B\overline{A}=B$,故 $P(B\overline{A})=P(B)=0.5$;

(2)由于 $A \subset B$,则 $B\overline{A}=B-A$, $P(B\overline{A})=P(B)-P(A)=0.2$;

(3)由于 $B\overline{A}=B-AB$,则 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=0.3$.

同步练习

观察某地区未来 5 天的天气情况,记 A_i 为事件"有 i 天下雨",已知 $P(A_i)=iP(A_0)$, $i=0,1,2,3,4,5$. 求下列各事件的概率.

(1)5 天均未下雨; (2)至少有一天下雨; (3)至多三天下雨.

1.3 古典概率模型

1.3.1 古典概率模型

如果试验 E 满足：

1. 试验结果只有有限种；

2. 各种结果出现的可能性相同.

则称这样的试验模型为**等可能概率模型**或**古典概率模型**,简称**等可能概型**或**古典概型**.

因古典概率模型的试验 E 的结果只有有限种,即样本点是有限个:$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$.

$\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}$,$\{\omega_i\}$是基本事件,且各自发生的概率相等.

于是,有

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})\\&=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})\\&=nP(\{\omega_i\}),i=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

从而,$P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$

因此,若事件 A 包含 k 个基本事件,即

$$A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cdots\{\omega_{i_k}\},$$

则

$$P(A)=\sum_{r=1}^{k}P(\omega_{i_r})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \tag{1.8}$$

1.3.2 古典概模型举例

【例 1.6】 掷一颗均匀骰子,设 A 表示所掷结果为“4 点或 5 点”,B 表示所掷结果为“偶数点”,求 $P(A)$和 $P(B)$.

解 由 $n=6,k_A=2$,得 $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$;

再由 $k_B=3$,得 $P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

【例 1.7】 用红、黄、蓝 3 种不同颜色给 3 个正方形随机涂色,每个正方形只涂一种颜色,求:

(1)3 个正方形颜色都相同的概率;

(2)3 个正方形颜色都不同的概率.

解 所有可能的基本事件共有 27 个,如图 1-7 所示。

(1)记“3 个矩形都涂同一颜色”为事件 A,由图 1-7 知,事件 A 的基本事件有 $1\times 3=3$ 个,故 $P(A)=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$.

(2)记“3 个矩形颜色都不同”为事件 B,由图 1-7 可知,事件 B 的基本事件有 $2\times 3=6$ 个,故 $P(B)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

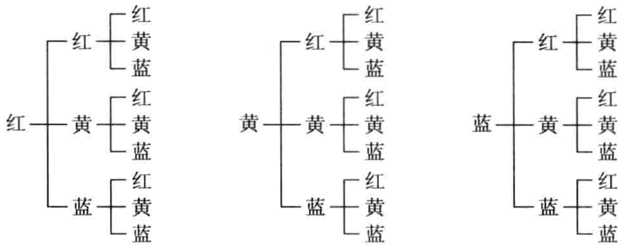


图 1-7

【例 1.8】 某公司仓库有外观相同的商品 17 件,其中 13 件进自甲供货商,4 件来自乙供货商.现从这 17 件商品中随机抽取两件,求这两件来自同一供货商的概率.

解　记 $A=\{$两件商品取自甲供货商$\}$,

$B=\{$两件商品取自乙供货商$\}$,

$C=\{$两件商品取自同一供货商$\}$,

则　$C=A\cup B$,且 A 与 B 互斥.

于是　$n=C_{17}^{2}=\frac{17\times 16}{2}=136, k_A=C_{13}^{2}=\frac{13\times 12}{2}=98, k_B=C_{4}^{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{k_A}{n}+\frac{k_B}{n}=\frac{98}{136}+\frac{6}{136}=\frac{13}{17}.$$

同步练习

某书架上有 5 本书,其中数学书 3 本,英语书 2 本,从中任选 2 本,问 2 本中至少有一本英语书的概率.

1.4　条件概率

1.4.1　条件概率概念

在实际问题中,除了要考虑某事件 A 的概率 $P(A)$外,有时还要考虑在“事件 B 已经发生”的条件下,事件 A 发生的概率.通常记事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率为 $P(A|B)$.为了引入条件概率的概念,先看下面的例子.

【例 1.9】 100 件产品中有 5 件不合格品,而 5 件不合格品中又有 3 件是次品,2 件是废品.现从 100 件产品中任意抽取一件,假定每件产品被抽到的可能性都相同,求:

(1) 抽到的产品是次品的概率;

(2) 在抽到的产品是不合格品条件下,产品是次品的概率.

解 设:$A=\{$抽到的产品是次品$\}$,$B=\{$抽到的产品是不合格品$\}$.

(1) 按古典概型计算公式,有

$$P(A)=\frac{3}{100};$$

(2) 由于 5 件不合格品中有 3 件是次品,故可得

$$P(A|B)=\frac{3}{5}.$$

可见,$P(A|B)\neq P(A)$.

虽然 $P(A)$与 $P(A|B)$不同,但二者之间存在什么关系呢?

先来计算 $P(B)$和 $P(AB)$.

因为 100 件产品中有 5 件是不合格品,所以

$$P(B)=\frac{5}{100}.$$

而 $P(AB)$表示事件"抽到的产品是不合格品、又是次品"的概率,再由 100 件产品中只有 3 件既是不合格品又是次品,得

$$P(AB)=\frac{3}{100}.$$

通过简单运算,得

$$P(A|B)=\frac{3}{5}=\frac{3}{100}\div\frac{5}{100}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

又如:掷一颗均匀骰子,$A=\{$掷出 2 点$\}$,$B=\{$掷出偶数点$\}$,$P(A)=\frac{1}{6}$,求 $P(A|B)$.

已知事件 B 发生,此时试验所有可能结果构成的集合就是 B. 于是,$P(A|B)=\frac{1}{3}$.

B 中共有 3 个元素,每个元素出现是等可能的,且其中只有 1 个(2 点)在集合 A 中.

可以得到:

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由以上共性启发,可在一般的概率模型中引入条件概率的定义.

1.4.2 条件概率定义

定义 1.3 设 A、B 是两个事件,且 $P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.9}$$

为在事件 B 发生条件下,事件 A 的**条件概率**.