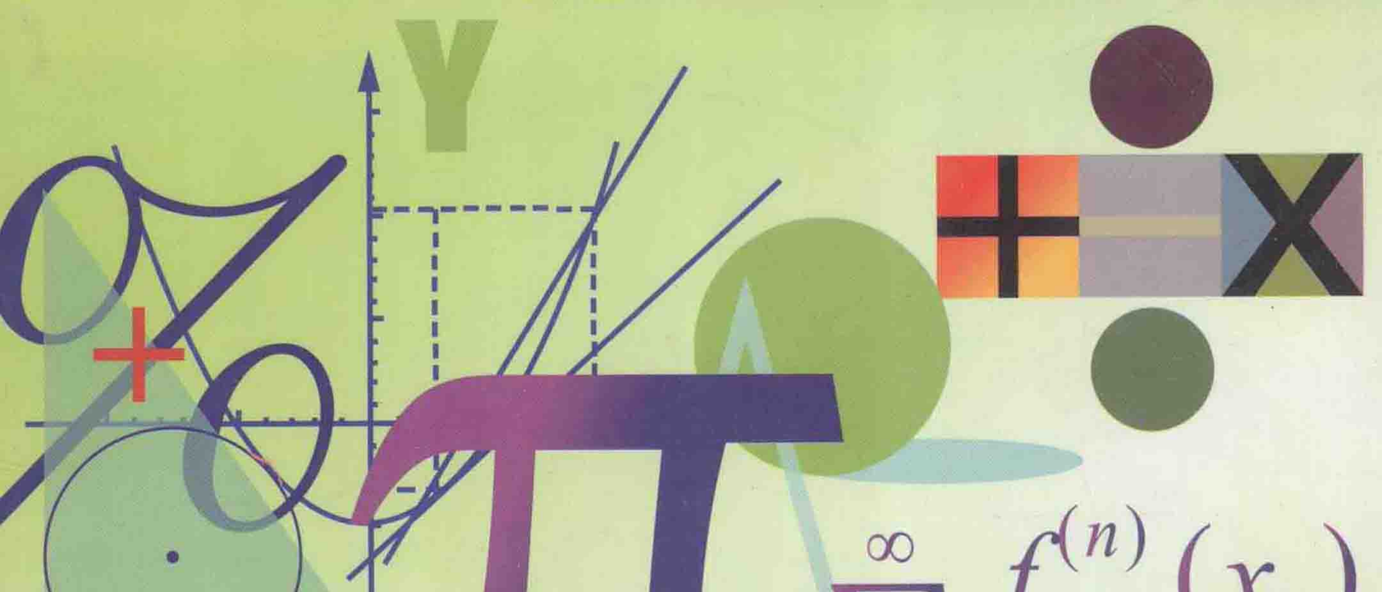
全国普通高等教育规划教材

全国普通高等教育规划教材编审委员会审定

高等数学
习题辅导与提高

主 编 赵宜宾



南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

全国普通高等教育规划教材

全国普通高等教育规划教材编审委员会审定

高等数学
习题辅导与提高

主　编　赵宜宾

副主编　张梅东　王福昌

编　委　洪明理　何珊珊　靳志同

　　　　庄需芹　张鹤翔　钱小仕

南開大學出版社

NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题辅导与提高／赵宜宾主编．—天津：南开大学出版社，2011.06

ISBN 978-7-310-03164-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①数学课-高等学校-习题辅导 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 077619 号

出　版：南开大学出版社
印　刷：北京旭晨印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：787mm×1092mm 1/16
印　张：21.25
字　数：515 千字
版　次：2011 年 7 月第 1 版
印　次：2011 年 7 月第 1 次印刷
定　价：39.80 元

责任编辑：杨琢

前　　言

高等数学是理工科院校一门重要的公共基础理论课，一方面为学生后继专业课程的学习提供分析和解决问题的工具，另一方面也是硕士研究生入学考试的重点科目。高等数学的教学质量在一定程度上决定了人才培养的质量，通过对高等数学相关概念、思想、方法的教与学，来培养学生的逻辑推理、抽象概括等的能力，特别是培养学生熟练的运算能力和综合运用数学知识去分析与解决问题的能力。

由于国内高校招生规模的不断扩大，学生的数理基础良莠不齐，为能够满足各个层次的学生学习需求，全面提高高等数学教学质量，编者结合新形式下高等数学课程教学的基本要求，认真总结多年来的教学经验，编撰了本书。

本书按教育部关于高等数学的课程教学大纲要求，配套于同济 6 版《高等数学》教材，按课程教学规律，由浅入深来组织内容。本书分为 12 章，每章分为 5 部分内容：第一部分是基本内容与考核要求，主要介绍本章的知识体系与考核要求；第二部分是基本题型的讲解与分析，主要依据知识点来组织基础习题的讲解，按教材相关章节组织内容；第三部分是综合与提高，主要通过一些综合性的习题来介绍本章所涉及的主要内容和方法，使学生对于章节内容有一个整体的认识；第四部分是自我检测与参考答案，主要通过一些习题来帮助同学检测对内容的掌握情况；第五部分是考研专题解析，通过对历年研究生考试涉及本章内容的习题讲解，为学生进一步学习提供参考方向。本书既可作为高等数学课程的习题课教材，也可作为准备报考非数学类硕士研究生的复习用书。

本书由赵宜宾主编，张梅东、王福昌副主编。第一章及全部考研专题解析内容由张梅东编写，第二、三章由洪明理编写，第四、五、六章由何珊珊编写，第七章由靳志同编写，第八、十一章由庄需芹编写，第九、十章由张鹤翔编写，第十二章由钱小仕编写。赵宜宾负责教材内容整体设计安排，教材内容的审定工作由赵宜宾和王福昌完成。本书在编写过程中还得到胡顺田教授悉心指导，在此表示衷心感谢。

由于水平有限及时间仓促，书中难免有纰漏与不足，恳请广大读者批评指正。

编　者

2011 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

1　基本内容与考核要求

Ⅰ、基本内容

- 函数与极限
  - 函数
    - 映射
    - 定义
    - 性质(单调,有界,奇偶,周期)
    - 分类
      - 基本初等函数
      - 复合函数
      - 初等函数
      - 反函数
  - 极限
    - 定义及性质
      - 数列极限的定义
      - 函数极限的定义
      - 极限的性质
    - 无穷小
      - 定义
      - 运算性质
      - 分类
        - 高阶无穷小
        - 低阶无穷小
        - 同阶无穷小
        - 等价无穷小
    - 求极限的重要方法
      - 极限运算法则
      - 两个重要极限
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
      - 等价无穷小的因子替换
      - 分子分母有理化
      - 函数的连续性
  - 连续
    - 连续
      - 定义
      - 连续函数的性质
    - 间断
      - 定义
      - 间断点的分类

Ⅱ、考核要求

1. 在中学已有的函数知识的基础上，加深对复合函数概念的理解；了解反函数的概念；会建立简单实际问题中的函数关系式.

2. 理解极限的概念，极限的 $\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 定义.

3. 熟练掌握极限的四则运算法则；了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和两个极限存在准则(夹逼准则与单调有界准则).

4. 熟练掌握两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

5. 了解无穷小、无穷大的概念及其阶的比较，会利用等价无穷小求极限.

6. 理解函数在一点处连续和在区间上连续的概念；会判别间断点的类型；理解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

2 基本题型讲解与分析

第一节 映射与函数

内容提示 本节重点学习函数的定义及函数的几种特性。通过本小节的学习，要了解映射的概念及分类，映射与函数的关系及基本初等函数、初等函数、反函数、复合函数的概念。会利用定义证明函数的奇偶性、周期性、单调性等性质；会借助不等式的放缩法找到函数的上下界。

例 1 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\ln(x-1)$

(3) $f(x)=\sqrt{1-x}+\arccos\dfrac{x+1}{2}$

(4) $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{9-x^2}}$

解 (1)要使函数 $f(x)$ 有意义，只要 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 3$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$.

(2)要使函数 $f(x)$ 有意义，只要 $\begin{cases}4-x^2>0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<2$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,2)$.

(3)要使函数 $f(x)$ 有意义，只要 $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x=1\}$.

(4)要使函数 $f(x)$ 有意义，只要 $\begin{cases}9-x^2>0\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<3$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,3)$.

方法小结　函数的定义域就是使函数有意义的数集的取值范围，即分母不能为零，开偶次方根的，被开方数非负，对数的真数要大于零，还要注意三角函数和反三角函数的定义域和值域的取值范围；有时还要根据实际问题来定变量的取值范围。求复合函数的定义域时，一般从外层向里层依次求出；求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 2　证明下列论断.

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2)两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数.

证明　(1)设函数 $f(x)$，$g(x)$都为偶函数；即 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$，故 $F(x)$是偶函数，即两个偶函数的和是偶函数.

设函数 $f(x)$，$g(x)$都为奇函数；即 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-F(x)$，故 $F(x)$是奇函数，即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设函数 $f(x)$，$g(x)$都为偶函数；即 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，令 $F(x)=f(x)g(x)$，则，故 $F(x)$是偶函数，即两个偶函数的和是偶函数.

设函数 $f(x)$，$g(x)$都为奇函数；即 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，令 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$，故 $F(x)$是偶函数，即两个奇函数的积是偶函数.

方法小结　判断函数的奇偶性，主要是利用奇偶性的定义，有时也利用其运算性质，例 2 给出了一部分运算性质的证明，其它运算可类似证明，例 2 中分别令 $F(x)=f(x)+g(x)$和 $F(x)=f(x)g(x)$，然后再根据定义即可得出结论.

例 3　设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明　先证必要性. 设函数 $f(x)$在 X 上有界，则存在正数 M，使$|f(x)|\leqslant M$，即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，这就证明了 $f(x)$在 X 上有下界$-M$ 和上界 M

再证充分性. 设函数 $f(x)$在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2，即 $K_1\leqslant f(x)\leqslant K_2$. 取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则$-M\leqslant K_1\leqslant f(x)\leqslant K_2\leqslant M$，即$|f(x)|\leqslant M$，这就证明了 $f(x)$在 X 上有界.

方法小结　将函数取绝对值，然后用不等式放缩法；或借助于导数求出最大(小)值法处理. 这是证明函数有界的常用方法.

第二节　数列的极限

内容提示

★数列极限的定义 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<\varepsilon$。

若$\{x_n\}$存在极限(有限数)，又称$\{x_n\}$收敛，否则称$\{x_n\}$发散.

★数列极限的基本性质

①(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=b$;

若 $a>b$,则 $\exists N$,当 $n>N$ 时,$x_n>y_n$;

若 $x_n>y_n$,则 $a\geqslant b$.

②(极限的唯一性) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$,则 $a=b$.

③(收敛数列的有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界(即 $\exists$ 常数 $M>0$, $|x_n|\leqslant M,(n=1,2,\cdots)$).

例 1 根据极限"$\varepsilon-N$"定义证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

证明 (1) 要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$. 只须 $\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$. 即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$.

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\dfrac{1}{4\varepsilon}]$,当 n>N 时,有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(2) 要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$(只须 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

因为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$,当 n>N 时,有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(3) 要使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$,只须 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

因为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$,当 n>N 时,有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

例 2 设数列 $\{x_n\}$ 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明;$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界,所以存在 $M>0$(使 $\forall n\in\mathbf{N}$,有 $|x_n|\leqslant M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbf{N}$,当 $n\in\mathbf{N}$ 时,有 $|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 从而当 $n>N$ 时,有 $|x_ny_n-0|=$ $|x_ny_n|\leqslant M|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

方法小结 用 ε—N 定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的方法有以下两种:

①$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-a|<\varepsilon$,直接求出存在满足 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的最小值 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

②$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-a|<\varepsilon$,不能直接从 $|x_n-a|<\varepsilon$ 中求出最小的 N 时,可将 $|x_n-a|$ 适当放大,使 $|x_n-a|\leqslant\varphi(n)<\varepsilon$,解不等式 $\varphi(n)<\varepsilon$,求出较大的 N.

第三节 函数的极限

内容提示

★函数极限的定义

$x\to x_0$：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$\delta$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to x_0^+$：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$\delta$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to x_0^-$：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$\delta$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to\infty$：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$X$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to+\infty$：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$X$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to-\infty$：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数$X$，当$x>-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

★函数极限的基本性质

①(极限的不等式性质) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$；

若$A>B$，则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>g(x)$；

若$f(x)\geqslant g(x)(0<|x-x_0|<\delta)$，则$A\geqslant B$.

②(极限的保号性) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；

若$A>0\Rightarrow\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$；

若$f(x)\geqslant0(0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow A\geqslant0$.

③(极限的唯一性)设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则$A=B$.

④(局部有界性)设极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$f(x)$在$x_0$的某空心邻域内$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$内有界，即$\exists\delta>0,M>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|\leqslant M$.

例 1 根据极限"$\varepsilon-\delta$"定义证明

(1)$\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$　　(2)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x}=0$

证明 (1) 因为$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$，所以要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，只须$|x-2|<\dfrac{1}{5}\varepsilon$. 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{1}{5}\varepsilon$，当$0<|x-2|<\delta$时，有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{x-2}{x}-0\right|<\varepsilon$，不妨设$0<|x-2|<1$，所以$\left|\dfrac{x-2}{x}-0\right|=\dfrac{|x-2|}{|x|}<|x-2|$，故只要$\left|\dfrac{x-2}{x}-0\right|=\dfrac{|x-2|}{|x|}<|x-2|<\varepsilon$即可，取$\delta=\min\{1,\varepsilon\}$，当$0<|x-2|<\delta$时，$\left|\dfrac{x-2}{x}-0\right|=\dfrac{|x-2|}{|x|}<|x-2|<\varepsilon$成立，即$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x}=0$.

方法小结 用 ε—δ 定义证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的方法有以下两种：

①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，直接求出存在满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，不能直接求出存在满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的正数 δ，当 $|f(x)-A|$ 的分母为 x 的函数，又不能把它约分成常数或适当放大后约分为常数时，可以对 x 的变化范围作一限制；设 $0<|x-x_0|<\delta_1$，进而适当放大 $|f(x)-A|\leqslant g(x)$，再由 $g(x)<\varepsilon$ 解得 $0<|x-x_0|<\delta_2$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

例 2 利用极限的"ε—X"定义证明

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

证明 (1)因为 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$，所以要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只须 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$(当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2)因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 所以要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只须 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

方法小结 用 ε—X 定义证明函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的方法有以下两种：

①$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，直接求出存在满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

②$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，不能直接求出存在满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的正数 X，适当放大 $|f(x)-A|\leqslant g(|x|)$，再由 $g(|x|)<\varepsilon$ 解得 $|x|>h(\varepsilon)$ 取 $X=h(\varepsilon)$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

第四节 无穷小与无穷大

内容提示

★无穷小的定义

在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量)

①若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，称 $\{x_n\}$ 为无穷小. 记作 $x_n=o(1)(n\to+\infty)$.

②若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小. 记作 $f(x)=o(1)$，$x\to x_0$.

★无穷大的定义

①若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\infty$，称 $\{x_n\}$ 为无穷大(量)，即对 $\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|>M$.

②若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量)，即 $\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|>M$.

③若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量)，即 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$.

★无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

★无穷小与无穷大的关系

在同一个极限过程中，若 $f(x)$ 为无穷小($f(x)\neq 0$)，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大

若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

例 1 根据极限的定义证明

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$，当 $x\to 3$ 时为无穷小.

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时为无穷小.

证明 (1) 当 $x\neq 3$ 时，$\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-0\right|=|x-3|$. 因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-0\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon$，故当 $x\to 3$ 时 $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2) 当 $x\neq 0$ 时 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|$. 因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，有

$|y|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|<\delta=\varepsilon$，故当 $x\to 0$ 时 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

方法小结 用定义证明无穷小与无穷大时要熟记下列定义

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有恒 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有恒 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有恒 $f(x)<-M$.

$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有恒 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有恒 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有恒 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有恒 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有恒 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有恒 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $0<x_0-x<\delta$ 时,有恒 $f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有恒 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有恒 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x>X$ 时,有恒 $f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有恒 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x>X$ 时,有恒 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x>X$ 时,有恒 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x>X$ 时,有恒 $f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x>X$ 时,有恒 $f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x<-X$ 时,有恒 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x<-X$ 时,有恒 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x<-X$ 时,有恒 $f(x)>M$.	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使当 $x<-X$ 时,有恒 $f(x)<-M$.

第五节 极限运算法则

内容提示

★极限的四则运算与幂指数运算法则

设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=AB$,

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$,$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

例 1 利用极限的四则运算法则求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$　(3)$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{2h}$

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}(5+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2})$　(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}$　(6)$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})$　(8)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$　(9)$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{x^2+4hx+4h^2-x^2}{2h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+2h)=2x.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2})=5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=5.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}=0.$

(6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\dfrac{1}{3})^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})(1+\dfrac{3}{n})=\dfrac{1}{5}.$

(9) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

方法小结 四则运算法则的前提是每项极限要存在，在遇到分子分母的极限为零的因子时，要先消去零因子，然后再利用法则计算. 遇到下列情况时要注意：

①$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不存在也不为$\infty$，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$不存在也不为$\infty$；②若又有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A(A\neq0)$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$均不存在也不为$\infty$，但是，当$\lim\limits_{x\to a}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$都不存在且不为$\infty$时，$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$的极限均不能确定，要作具体分析.

例 2 利用无穷小或无穷大的关系及运算性质求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$

(4) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{0}{16}=0$，所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$（因为分子次数高于分母次数）.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$（因为分子次数高于分母次数）.

(4)$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$(当 $x\to 0$ 时,$x2$ 是无穷小,而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量).

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x=0$(当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小,而 $\arctan x$ 是有界变量).

方法小结 利用无穷小及无穷大的性质求极限时要注意

①有界函数与无穷小的乘积是无穷小,即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

②有界函数与无穷大的和是无穷大,即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$.

例 3 判断下列论断是否正确,然后给出理由.

(1)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在;

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在;

(3)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.

解 (1)正确,反证法,假设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在,则

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在,已知条件矛盾.

(2)不正确,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=-\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的极限都不存在,但 $f(x)+g(x)=0$ 在 $x\to 0$ 时的极限存在.

(3)不正确,如 $\lim\limits_{x\to x_0}x=0$,但 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,然而 $\lim\limits_{x\to x_0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 极限存在.

第六节 极限存在准则两个重要极限

内容提示

★数列极限存在准则

夹逼准则 若 $\exists N$,当 $n>N$ 时,有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

单调有界必收敛准则.夹逼准则的具体应用过程如下:

①若数列 x_n 单调上升有上界,即 $x_{n+1}\geqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 M,使得对一切的 n 有 $x_n\leqslant M$,则 x_n 收敛。即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,且有 $x_n\leqslant a(n=1,2,\cdots)$

②若数列 x_n 单调下降有下界,即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 M_0,使得对一切 n 有 $x_n\geqslant M_0$,则 x_n 收敛。即存在一个数 a,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,且有 $x_n\geqslant a(n=1,2,\cdots)$.

★函数极限的存在准则

(1)夹逼准则 若 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 其他的极限过程也有类似的结论.