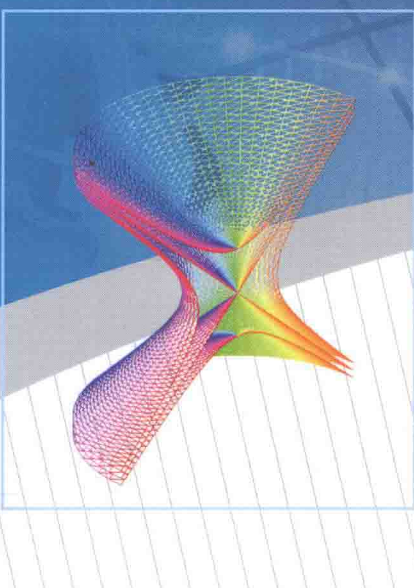
普通高等教育“十二五”规划教材



线性代数及其应用

邹杰涛　张　杰　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数及其应用

主　编　邹杰涛　张　杰
副主编　孙明正　钱　盛　张智勇

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型．各章中均有典型例题的归纳与解题方法的总结，还有历届研究生入学考试题按知识点的归类，每章均配有适量的习题，书后附有参考答案．加 * 号的内容适用于分层教学较高层次的教学．

本书可作为高等院校工科和经济管理学科各专业的分层教学教材，也可供报考研究生的同学与科技工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/邹杰涛，张杰主编．—北京：科学出版社，2014
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-041626-1

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①邹…　②张…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．①O151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 186285 号

责任编辑：沈力匀 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 8 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2014 年 8 月第一次印刷　印张：20 1/2
字数：500 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（VH04）

前 言

线性代数是高等学校理工科和经济及管理学科有关专业的一门数学基础课，它不仅是其他数学课程的基础，也是物理、力学、电路等课程的基础. 实际上，任何与数学有关的课程都涉及线性代数知识. 另外，由于计算机的飞速发展和广泛应用，使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是，作为处理离散问题工具的线性代数，也是从事科学研究和工程计算的科技人员的必备的数学基础.

本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上，为适应不同层次线性代数教学要求，在原有《线性代数》讲义的基础上几经修改、使用，历经十年编写而成的. 根据教学改革的精神和本科专业对线性代数内容的不同要求，我们在内容结构等方面做了精心选择和编排. 内容包括：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型.

主要有以下几个特点：

(1) 层次分明，适用面广. 全书有基础部分和经典例题归纳与考研提高部分两个模块组成. 基础模块是按国家教委指定的“线性代数课程教学基本要求”编写的，其中包括线性代数的主要内容和基本计算方法，为 32～48 学时；提高模块是对前面所学内容的综合应用与提高（书中加 * 内容），可供多学时（如 54 学时）教学使用，也可作为有余力的学生的课外拓展阅读和考研学生的复习参考之用. 因此，本书不但适合理工科本科线性代数课程的教学需求，也适用于专科生的教学需求，更适合分层教学需求.

(2) 分散难点，提高素质. 线性代数所使用的各种推证方法、公理化定义、抽象化思维、计算与计算技巧及应用能力等都具有特色，是其他课程所无法替代的，是提高学生数学素质不可缺少的一环. 为了既有适当的理论深度，又能便于理解，我们对于一般线性代数中教学难度较大内容做了适当的处理.

(3) 突出矩阵，加强变换. 矩阵这一数学概念能够与工程技术问题相结合并成为表达手段，主要依赖于它的种种运算和变换. 本书突出矩阵的四大变换，即初等变换、相似变换、合同变换、正交变换. 特别是初等变换，几乎贯穿于全书各章的始终.

(4) 例题典型，题目丰富. 每章精选了一定数量的基础例题与习题，使初学者在学完一章之后，就能练习这些题目，从而加深了学生对所学概念的理解，达到初学的目的. 在每章的最后一节，对本章所涉及的知识和练习题进行了系统的归纳与总结，特别是对解题方法和典型例题的归纳总结，是本书的一大特色，对于有余力和考研的学生，在解题技巧、计算能力和灵活性等方面都是大有帮助的. 每章还配有历届研究生入学试题，并在书后附有习题答案.

(5) 应用广泛，案例丰富. 全书结合知识点的应用给出了很多应用实例，从而使读者对线性代数知识的应用有了一个初步的体会，同时也增加了读者的学习兴趣.

(6) 借助电脑，兴趣学习. 我们在每章的最后都设计了利用计算机软件 MATLAB

解决线性代数中的计算问题的教学内容，使学生可以借助软件解决复杂烦琐的线性代数计算问题，提高学生的计算能力和线性代数的应用能力，为培养学生的科学计算能力打下良好基础.

本书编写分工如下：孙明正（第一章与第二章），邹杰涛（第三章），张杰（第四章），张智勇（第五章），钱盛（第六章）. 全书由邹杰涛统稿并负责修改定稿. 在编写过程中得到了北方工业大学公共数学教学团队各位同事的关心和支持. 科学出版社和北方工业大学教务处为本书的出版给予了很大的支持与帮助，在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，书中疏漏和不妥之处，恳请同行与读者指正.

目　录

第 1 章　行列式 …… 1
1.1　行列式的定义 …… 3
1.1.1　二阶、三阶行列式的定义 …… 3
1.1.2　二阶、三阶行列式的几何意义 …… 4
1.1.3　排列及其逆序数 …… 5
1.1.4*　对换 …… 5
1.1.5　n 阶行列式的定义 …… 6
1.2　行列式的性质 …… 8
1.3　行列式按行(列)展开 …… 11
1.4　克莱姆法则 …… 15
1.5　行列式的几何应用 …… 17
1.6*　行列式按 k 行(k 列)展开 …… 19
1.7*　典型例题 …… 21
1.8　MATLAB 概述 …… 28
1.9　应用 MATLAB 计算行列式 …… 31
本章小结 …… 32
习题 1.1 …… 34
习题 1.2 …… 35
考研真题 …… 37
第 2 章　矩阵 …… 39
2.1　矩阵的定义及其运算 …… 41
2.1.1　矩阵的定义 …… 41
2.1.2　几种特殊矩阵 …… 42
2.1.3　矩阵的加减法 …… 43
2.1.4　数与矩阵相乘 …… 44
2.1.5　矩阵的乘法 …… 44
2.1.6　矩阵的转置(transpose) …… 45
2.1.7　方阵的幂 …… 47
2.1.8　方阵的行列式 …… 48
2.1.9*　共轭矩阵 …… 48
2.2　矩阵的初等变换与初等矩阵 …… 48
2.2.1　矩阵的初等变换 …… 48
2.2.2　初等矩阵 …… 49
2.2.3　矩阵的秩 …… 51

2.3 矩阵的逆 …… 55
2.3.1 用伴随矩阵求逆矩阵 …… 56
2.3.2 用初等变换求逆矩阵 …… 57
2.4 矩阵方程 …… 59
2.5 分块矩阵 …… 60
2.6 矩阵在实际问题中的应用 …… 63
2.7* 典型例题 …… 68
2.8 应用 MATLAB 对矩阵进行运算 …… 78
本章小结 …… 83
习题 2.1 …… 86
习题 2.2 …… 87
考研真题 …… 88
第 3 章 向量空间 …… 95
3.1 向量及其运算 …… 97
3.1.1 n 维向量的定义 …… 97
3.1.2 n 维向量的加法和数乘运算 …… 98
3.2 向量间的线性关系 …… 99
3.2.1 向量的线性组合 …… 99
3.2.2 向量组线性相关或线性无关 …… 100
3.3 向量组的极大线性无关组 …… 105
3.3.1 向量组的极大线性无关组 …… 105
3.3.2 向量组的秩 …… 108
3.3.3 向量组的秩与矩阵的秩 …… 109
3.3.4 求向量组的极大无关组 …… 111
3.4 向量空间 …… 112
3.4.1 向量空间的概念 …… 112
3.4.2 向量空间的基、维数和坐标 …… 112
3.4.3 基变换与坐标变换 …… 114
3.5 R^n 的标准正交基 …… 116
3.5.1 向量的内积与向量的长度 …… 116
3.5.2 标准正交基 …… 118
3.5.3 施密特(Schmidt)正交化方法 …… 120
3.5.4 正交矩阵 …… 122
3.6 应用问题 …… 123
3.7* 典型例题 …… 125
3.8 应用 MATLAB 解向量组与向量空间相关问题 …… 135
本章小结 …… 141
习题 3.1 …… 144
习题 3.2 …… 146

考研真题 …… 148

第 4 章 线性方程组 …… 153

4.1 齐次线性方程组 …… 155

4.1.1 齐次线性方程组有非零解的条件 …… 155

4.1.2 齐次线性方程组解的性质及其结构 …… 156

4.1.3 齐次线性方程组的解法 …… 158

4.2 非齐次线性方程组 …… 160

4.2.1 非齐次线性方程组解的性质及其结构 …… 161

4.2.2 非齐次线性方程组解的存在条件 …… 161

4.2.3 非齐次线性方程组解的判定的几何直观解释 …… 162

4.2.4 非齐次线性方程组的解法 …… 164

4.3* 线性方程组求解的相关应用 …… 166

4.4* 典型例题 …… 173

4.5 应用 MATLAB 解线性方程组 …… 179

本章小结 …… 183

习题 4.1 …… 184

习题 4.2 …… 186

考研真题 …… 188

第 5 章 矩阵的相似对角化 …… 195

5.1 方阵的特征值与特征向量 …… 197

5.1.1 特征值与特征向量 …… 197

5.1.2 特征值与特征向量的性质 …… 200

5.2 相似矩阵与方阵的对角化 …… 203

5.2.1 相似矩阵的概念及其性质 …… 203

5.2.2 方阵的相似对角化 …… 205

5.3 实对称矩阵的相似对角化 …… 207

5.4 特征值与特征向量的应用 …… 209

5.4.1 递推关系式的矩阵解法 …… 209

5.4.2 一阶线性常系数微分方程组的矩阵解法 …… 213

5.5* 典型例题 …… 215

5.6 应用 MATLAB 解相似矩阵 …… 223

本章小结 …… 225

习题 5.1 …… 228

习题 5.2 …… 229

考研真题 …… 230

第 6 章 二次型 …… 237

6.1 二次型的定义及其矩阵表示 …… 239

6.2 二次型的标准形 …… 240

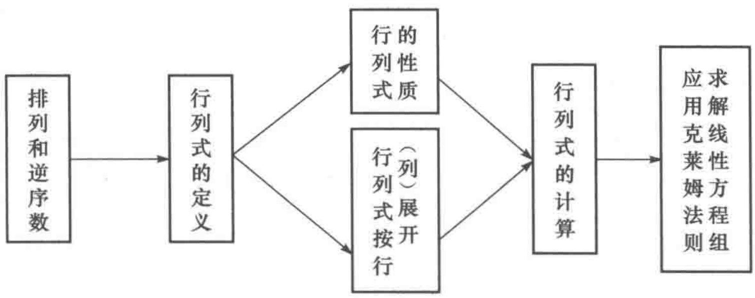
6.2.1 线性变换与矩阵的合同 …… 241

6.2.2　用正交变换化二次型为标准形 …… 243
6.2.3　用可逆线性变换化二次型为标准形(配方法) …… 244
6.2.4　惯性定理与二次型的规范形 …… 245
6.2.5　正定二次型与正定矩阵 …… 246
6.3　二次型的应用(二次曲面的化简) …… 248
6.4* 典型例题 …… 250
6.5　应用 MATLAB 求二次型的标准形 …… 254
本章小结 …… 255
习题 6.1 …… 256
习题 6.2 …… 256
考研真题 …… 257
主要参考文献 …… 259
附录 1　习题参考答案 …… 261
附录 2　考研真题参考答案 …… 280

第1章　行　列　式

本章首先分析二阶、三阶行列式的构成，然后定义 n 阶行列式，并导出行列式的一些基本性质，最后介绍利用行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则和齐次线性方程组有无非零解的判别定理.

知识框架



1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶、三阶行列式的定义

给定四个实数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$，使用对角线法则，我们定义下面的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称这个记号为一个二阶**行列式**(determinant)，称数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为该行列式的**元素**或**分量**. 二阶行列式有两行和两列，其中元素 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 的第一个下标 i 为行指标，第二个下标 j 为列指标，即 a_{ij} 位于行列式的第 i 行第 j 列.

类似地，我们给出三阶行列式的计算公式：

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

由上式可知三阶行列式含 6 项，每项均为不同行、不同列的三个元素的乘积并冠以正负号. 其规律也遵循对角线法则，如图 1.1 所示.

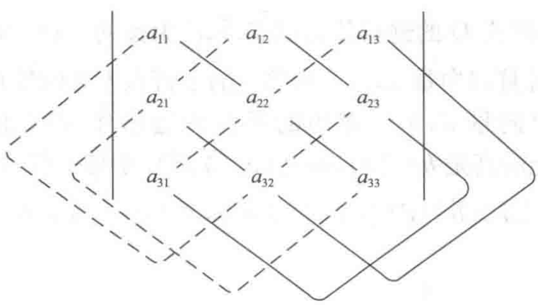


图 1.1

【例 1.1】 求解方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

解 由对角线法则得

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\times1\times x + 9\times1\times2 + x^2\times1\times3 - 4\times1\times3 - 9\times1\times x - x^2\times1\times2 \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

$$= (x-2)(x-3)$$
$$= 0$$

解得 $x_1=2, x_2=3$. □

1.1.2 二阶、三阶行列式的几何意义

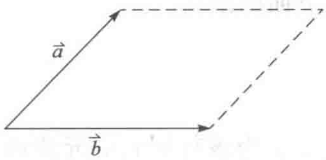


图 1.2

(1) 设二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 令向量 $\vec{a}=(a_{11}, a_{21}), \vec{b}=(a_{12}, a_{22})$，则二阶行列式 D 的绝对值 $|D|$ 为由向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 为边构成的平行四边形的面积. 如图 1.2 所示.

事实上，由初等数学平面向量知识，平行四边形的面积为

$$\begin{aligned} S &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})} \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\frac{(\vec{a},\vec{b})^2}{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a},\vec{b})^2} \\ &= \sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{22}^2)-(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})^2} \\ &= \sqrt{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2} = |a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| = |D|. \end{aligned}$$

(2)* 设三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. 令向量 $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1), \vec{b}=(x_2, y_2, z_2), \vec{c}=(x_3, y_3, z_3)$，则三阶行列式 D 的绝对值为以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 下面我们使用向量的相关知识计算以向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积.

如图 1.3 所示，以向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形作为底面，那么底面积为 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$，而这个底面上的高是 $h=|\vec{c}|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$. 于是平行六面体的体积

$$V = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

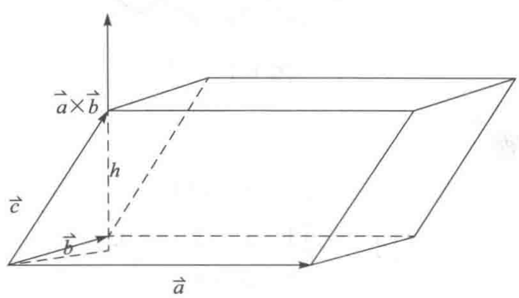


图 1.3

这就是用向量计算平行六面体的体积的公式. 因为体积只能取正值，故上式要取绝对值.

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积，记作 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. 所以平行六面体体积为

$$V=|D|=\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|.$$

1.1.3 排列及其逆序数

需要注意的是对于四阶及以上的行列式，对角线法则便不适用了. 下面我们用排列的概念引出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如 2341 是一个四级排列；三级全排列的全体共有 6 种，分别为

$$123,231,312,132,213,321.$$

n 个不同数码的不同 n 级排列总数用 P_n 表示，容易验证，$P_n=n!$，将任意一个 n 级排列记成 $p_1p_2\cdots p_n$.

定义 1.2 在一个排列中，如果某一个较大的数码排在较小的数码之前，就称这两个数码构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的逆序数. 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记成 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，有时简记为 t.

显然，标准排列 $123\cdots n$ 的逆序数是 0. 下面我们给出一般排列逆序数的求法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 1 到 n 的一个排列. 对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，计算出排在 p_i 前面比 p_i 大的元素个数 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称元素 p_i 的逆序数为 t_i. 从而，该排列的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n.$$

【例 1.2】 求排列 32514 的逆序数.

解 排列 32514 共有 5 个元素. 图 1.4 表示各个元素的逆序.

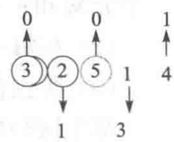


图 1.4

比如，3 排在首位，所以 3 的逆序数为 0；2 前面比 2 大的数是 3，故 2 的逆序数为 1；5 是最大数，逆序数为 0；1 前面比 1 大的数有 3 个，故 1 的逆序数为 3；类似的 4 的逆序数为 1.

因此排列 32514 的逆序数为 $t=\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$. □

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 43152 是偶排列，排列 321 是奇排列.

1.1.4* 对换

下面对排列中元素之间的位置关系进行讨论，引入对换的概念.

定义 1.4 在一个排列中，把任意两个元素的位置对调，而其它元素不动，就得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样一个变换叫做一个对换. 将相邻的两个元素对换，叫做相邻对换.

例如，排列 3124，经元素 3 和 4 对换，变成新排列 4123.

在对换下,排列的奇偶性会有变化.

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性.

证*　(1) 先看相邻对换的情形. 设有排列 $p_1p_2\cdots p_kpqq_1q_2\cdots q_m$,对调 p、q,得到 $p_1p_2\cdots p_kqpq_1q_2\cdots q_m$. 可以看出,经对换后,元素 $p_1,\cdots,p_k$ 和 $q_1,\cdots,q_m$ 的逆序数没有改变,而元素 p、q 的逆序数可能改变. 当 $p<q$ 时,p 的逆序数增加 1,q 的逆序数不变;当 $p>q$ 时,p 的逆序数不变,q 的逆序数减少 1.

总之,对换后的新排列与原来排列的逆序数相差 1,它们的奇偶性相反.

(2) 一般对换的情形. 设有排列 $p_1\cdots p_kpq_1\cdots q_mqr_1\cdots r_n$,对换 p、q,将排列变成 $p_1\cdots p_kqq_1\cdots q_mpr_1\cdots r_n$. 这一对换可以看成是经若干次相邻对换得到的. 先将元素 p 与 $q_1,\cdots,q_m$ 依次作相邻对换,经 m 次以后,变成 $p_1\cdots p_kq_1\cdots q_mpqr_1\cdots r_n$;然后再将元素 q 与 $p,q_m,\cdots,q_1$ 依次作相邻对换,经 $m+1$ 次以后,变成 $p_1\cdots p_kqq_1\cdots q_mpr_1\cdots r_n$,即为上述的新排列. 这就是说,经过 $2m+1$ 次相邻对换,把原来的排列变成新排列.

由(1)知,经 $2m+1$ 次相邻对换后,排列的奇偶性改变. 所以原排列与新排列的奇偶性不相同. □

因此,根据定理 1.1,经过奇数次对换后,排列改变其奇偶性;经过偶数次对换后,排列不改变其奇偶性. 而标准排列是偶排列,于是有:

推论　奇排列调成标准排列的对换次数是奇数,偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

定理 1.2　$n(n\geqslant 2)$个元素的所有排列中,奇排列和偶排列的个数相等,各为 $n!/2$ 个.

1.1.5　n 阶行列式的定义

认真分析二阶、三阶行列式的表达式,我们发现有如下共同的特征:

(1) 每一项都是不同行和不同列的元素的乘积,确切地说,每一项都包含了每一行的一个元素和每一列的一个元素.

(2) 在每一项前面都冠以正号或负号.

(3) 所包含的项数为所有可能的乘积,例如三阶行列式共有 6 项,即 3! 项.

基于这些特征,使用排列及其逆序数的性质,对于三阶行列式可以得到如下的表达式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(123)+\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} = \sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

求和号“$\sum$”表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和,即上式等于所有取自不同行不同列的三个元素的乘积的 6 项代数和.

类似的,可以给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.5　设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$,定义 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_1p_1}a_{q_2p_2}\cdots a_{q_np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$，$q_1q_2\cdots q_n$ 是两个 n 级排列. 特别的

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
$$=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

注 (1) 有时把行列式 D 简记作 $D=|a_{ij}|$，或者 $D=\Delta(a_{ij})=\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为 D 的元素；

(2) 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$. 注意和 a 的绝对值区分开，需要时加以说明；

(3) 行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**.

【例 1.3】 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 我们利用定义 $D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

在 D 的第 n 行中除了 a_{nn} 外，其它元素均为 0，因此只能取 $p_n=n$；第 $n-1$ 行除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 两个元素外，其它元素均为 0，因此 p_{n-1} 可以取 $n-1$ 和 n，而前面已取 $p_n=n$，所以只能取 $p_{n-1}=n-1$，…，依次类推，可得 $p_2=2$，$p_1=1$. 这样，D 中可能不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 其符号 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^0=1$，

故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. □

上例中的行列式，它的主对角线以下的元素都是 0，称其为**上三角行列式**. 类似地，主对角线以上的元素都是 0 的行列式，称为**下三角行列式**：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式与下三角行列式统称为**三角行列式**. 在计算行列式时，它们可作为公式应用，即常常把行列式化为三角行列式，以简化计算.

【例 1.4】 证明

(1) $D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$（其中未写出的元素均为 0）.

(2) $D=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$（其中未写出的元素均为 0）.

证 (1) 这是例 1.3 特例. 这样的行列式称为**对角行列式**.

(2) 此行列式称为反对角行列式. 使用定义,该行列式中除了 $a_1a_2\cdots a_n$ 一项外,其余项都等于 0. 而此项的列标排列为 $n(n-1)\cdots 21$,它的逆序数

$$\tau(0+1+2+\cdots+(n-1))=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

□

1.2 行列式的性质

根据 n 阶行列式的定义,计算一个 n 阶行列式,需要求 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和. 当阶数 n 比较大时,这样的计算量是很大的,因此我们有必要讨论行列式的计算方法. 在这一节,先研究行列式的一些运算性质,然后利用其性质给出简便的计算方法.

定义 1.6 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,把 D 的各行换成同序号的列,得到另一个行列式,记成

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**. 易见,D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式的值相等. 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 $D=\Delta(a_{ij})$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\Delta(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

则有元素 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 由定义 $D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D$. □

注 由性质 1.1 知,行列式中“行”与“列”的地位是等同的,行与列具有相同的性质.

性质 1.2 互换行列式的其中两行(列),行列式改变符号.

证 设 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换 $i,j(i<j)$ 两行得到的,那么有 $b_{ip}=a_{jp}, b_{jp}=a_{ip}(p=1,2,\cdots,n)$.

当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}(p=1,2,\cdots,n)$. 于是 $D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$,最后一式中的