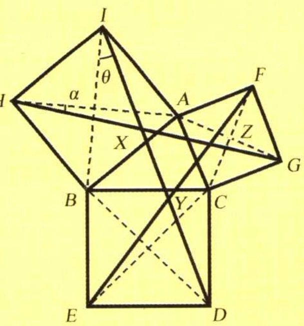

平面几何专题研究

郭小全 编著

PING MIAN JI HE ZHUAN TI YAN JIU

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

平面几何专题研究

郭小全　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书通过大量的几何定理和命题归纳出一道具有代表性的命题，给出了多种证法，从不同的证法和回顾证法过程中，得出一系列的方法和命题.

本书可供中学数学师生和业余数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

平面几何专题研究/郭小全编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.6(2014.5 重印)

ISBN 978-7-5603-4086-9

Ⅰ.①平… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①平面几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 104438 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 34.25 字数 613 千字
版 次 2013 年 6 月第 1 版 2014 年 5 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4086-9
定 价 98.00 元

前 言

提高初等数学解题和证明题的能力是加强和巩固数学各分支基础知识的一项重要手段.在掌握各基础知识的前提下,做一定数量的练习,对初学者来说是必不可少的一项任务.在解题和证明题方法上强调基本功的训练和总结,对证明一个定理或命题运用学过的数学知识中的前后和相互联系,采用多种方法解题、证明定理或命题时,自然有利于提高和培养初学者的逻辑思维、推陈出新、触类旁通和以类相从的能力,则打破了各学科用自身知识方法去解或证类型题的约束,也发展各学科纵横内在的联系.在这种思想指导下,编写了《平面几何专题研究》一书,该书证法有 170 多种,还有 300 多个说明.其中,说明里还包括 100 多种证法,实际大致有 200 多种证法.从证法和说明中还引出 100 多个定理、命题和其他问题.共三章:第一章介绍了平面几何基础概论、证题思想、证题方法和辅助线变化等内容;第二章介绍了平面几何命题多证法、常见辅助线作法、证题结论相互转化证法和其他类型证明题归类;第三章介绍了专题多种证法,采用了不同的证法,从证法中得到了再生的多种方法,新命题和以退为进的方法,每一种证法都配有说明,说明里概述了辅助线的作法、第三量和第四量为代换的方法,也从部分说明里给读者留下了一些思考问题.另外还归类了一些证题的方法,如:利用全等、中位线、等腰形、平行四边形、平行线、平行投影、锥投影、相似形、直角形、比例和差积商的特殊值、圆幂、共点线、共点圆、圆共点、共线点、切线、正余弦、角和差三角函数、面积、第三和第四量、定比、椭圆、等分合更比、一量化几量的和差、平角倍数关系、方程求根、代数恒等式、轨迹、

翻折、旋转、平移、仿射、射影、质点、向量、数轴、坐标和空间等方法证明，其次，证明述程曲折迂回，过程繁琐，不够自然，当然换一个角度看，也并非是件坏事，它能够引起大家去思考和研究更简单的主题方法，因为，也可达到“举一反三”意想不到的效果．该《平面几何专题研究》众多的证明方法，但有简单与繁琐、巧妙与笨拙的证明方法富有启发性，特别是证明方法有推广和引伸的余地，由此还可以得出许多新的结论，前者的证明方法可能不具备这种特点．但从证法中引出了一些著名的定理、命题、推广和几何学部分分支最初的印象“定义”．

本书将有助于读者巩固和加深所学平面几何基础知识和推而广之，解脱传统观念、开拓思路、与日求进步、提高解题和证题的能力．读了该书后，会感觉数学学海无涯和自得其乐，同时也希望读者有新的证法、其他新见长和见识等给予提出！

由于笔者学知所限，错误一定存在，望读者给予批评和指正为盼．

编　者

二〇〇九年四月十日于内蒙东乌旗

目　录

第 1 章　基本概论及方法

平面几何是几何学中的一个分支,它是学习其他几何分支(如立体几何、射影几何等)必须具备的基本知识,要学好几何,首先要从学习平面几何开始,但是平面几何的基本概念和方法比其他几何都多.因此,就要善于学习和研究它.

平面几何的证明题非常多,证法千变万化,往往要采用一定形式的方法获得定理(或命题)的证明.因此,必须懂得一些常见的基本概念和证题方法.

1.1　主要定义、公理和公设

1.点是不可分的.线的界是点.线或面是有长或有宽,但无厚的.面的界是线.直线或平面是这样的直线或平面,它对于它的任何直线或平面而言,是同一样的放置着.以上为主要的定义.

2.从每一点到另一点可引直线.每条直线都可以无限地延长.以任意点为中心,作半径等于任意长的圆.同一平面上的两条直线与第三条直线相交,若其中一侧的两内角之和小于 $180°$,则这两条直线必在该侧相交.前三段称作图公法,全部称为公设.

3.通过两个不同点的直线必定存在,且只有一条.

推论:任意两个不同点,确定唯一通过它们的直线.两不同直线最多有一个公共点,即相交点.在每一条直线上最少有两点,不同在一条直线上的点最少有三点,过这三点的平面必定存在,并且只有一个.推论:任意三个不同在一条直线上的三点,确定唯一的通过它们的平面.以上称为结合公理.

(1)设 AB 是给定的线段,$A'X'$ 是自点 A' 出发的一条射线,则在 $A'X'$ 上有且只有一点 B' 使得线段 $AB = A'B'$,对于每条线段 AB,都有 $AB = BA$(指字母首尾对换位置).

(2)若线段 $A'B' = AB$,并且 $A''B'' = AB$,则 $A'B' = A''B''$(指等于同一量的量相等).

(3)设点 B 在 A 和 C 两点之间,点 B' 在 A' 和 C' 两点之间,若线段 $AB = A'B'$,并且 $BC = B'C'$,则 $AC = A'C'$.

(4)设$\angle XOY$是给定的一个非平角(不等于180°的角),$O'X'$是自点O'出发的一条射线,则存在唯一的一条自 O'出发的射线$O'Y'$,使得$\angle X'O'Y'$等于$\angle XOY$角,对于每一个$\angle XOY$都有$\angle XOY$等于$\angle X'O'Y'$以及等于$\angle YOX$(指角边上的两个字母对换).

(5)设A,B,C是不在同一条直线上的三点,A',B',C'也是不在同一条直线上的三点,若线段$AB=A'B'$,$AC=A'C'$,并且$\angle BAC=\angle B'A'C'$,则$\angle ABC=\angle A'B'C'$,$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

以上(1),(2),(3),(4)和(5)称为合同公理或称全等公理.

通过不在已知直线(或线段)上的一点(指定点),最多可引唯一的一条与此已知直线(或线段)平行的直线.此公理称为平行公理.

不论给定怎样的两个线段,其中短的线段的若干倍,总会大于长的线段,此公理称为阿基米德(Aristoteles)公理(此公理为他体系的一部分).

1.2 数学证明

数学这门学科是研究现实世界空间形式和数量关系的一门学科,是自古以来人们认识自然、改造自然和利用自然最重要的工具之一,它来源于实践,在实践中自我丰富、发展、完善和强化.所以,能应用于更多的实践中去.数学证明还要在实践中经受检验,加以提炼,深化提高.

1.几何直观和推理

几何图形的直观能化抽象为具体,往往是启发抽象思维的有力武器.但几何图形无论作图如何准确,都无法代替逻辑思维,单靠直观不一定可靠,往往与实际情况不一样,甚至相反或复杂化,这样几何直观在证明中就无能为力了.所以尽管几何直观对我们获得几何感性认识起到了重要作用,但数学证明往往还是主要依靠逻辑推理.(见证法173说明2)

2.命题证明

定义、公理和定理都是命题.命题(或定理)由两部分组成,第一部分称为前提或假设,第二部分称为结论.前者为全部已知条件,后者为由前提或假设经过严密推理得出的结论,推理的每一步都要求言必有据,逐步深入,这样的过程称为数学证明.

1.3　定理(或命题)的四种变化及举一反三

1. 任何一个定理(或命题)都可以得出四种定理(或命题). 即原定理(或原命题),逆定理(或逆命题),否定理(或否命题),逆否定理(或逆否命题),具体如下:

已知条件 m 一定
- a. 若 A 是 B,则 C 是 D,称为原定理(或原命题)
- b. 若 C 是 D,则 A 是 B,称为逆定理(或逆命题)
- c. 若 A 不是 B,则 C 不是 D,称为否定理(或否命题)
- d. 若 C 不是 D,则 A 不是 B,称为逆否定理(或逆否命题)
- (A 和 B 称为互逆定理(或互逆命题))

2. 只要证得上述四种定理(或命题)的任一种结论成立,其余三种定理(或命题)的证法以及辅助线一般是不变的. 但这里是就已知条件 m 是一定情况而言. 这样就达到了举一反三的效果,下面为定理(或命题)的关系图(图 1.1).

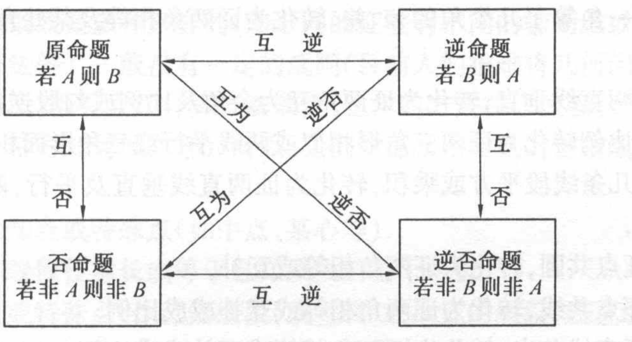

图 1.1

1.4　结论的位置

任何一个几何定理或命题都有已知条件和要求证的结论,但已知条件和要求证的结论都在该定理或命题的图形上. 因此,欲证结论的图形位置有如下可能:

1. 同在一个三角形或圆上或其内外.

2. 同在一直线(或线段)的同侧或异侧.

3. 同在一四边形上或内外.

4. 同在某一定点的几条线段(或直线)上.

5. 分居在几个三角形或圆上.

6. 分居在两三角形或两圆的同侧及异侧.

1.5 结论的转化形式

在证明某些定理(或命题)时,往往不“直接”去证明结论成立,而是证明辅助结论成立,即转化成证明别的量之间的关系成立(如证明了 A 是 B,即证明了结论 D 是 C). 但其转化形式是多样化的,以下归纳一些常见的转化形式:

1. 证两线段相等,转化为证两角相等或证其他两线段相等.

2. 证两线段相等,转化为证此两线段同等于某一线段或成反比例.

3. 证两角相等,转化为证两线段相等或平行或两三角形相似.

4. 证两角相等,转化为证此两角同等于某一角或几个角的和、差、倍分.

5. 证一线段等于几个线段的和、差,转化为证两线段或两角相等及成比例.

6. 证一角等于几个角的和、差,转化为证两角相等及某些角(或定理)和、差相等.

7. 证两直线垂直,转化为证两角互为余角及比例或勾股逆定理.

8. 证比例转化为证两三角形相似或两线平行或三角形面积比.

9. 证几条线段平方或乘积,转化为证两直线垂直及平行,两三角形相似及两角相等.

10. 证点共圆,转化为证两角相等或互补.

11. 证点共线,转化为证两角相等或互补或成比例.

12. 证直线共点,转化为证两角相等或互补或成比例.

13. 证圆共点,转化为证两角相等或互补或两三角形相似(转化为点共圆).

14. 证面积相等(包括和、差、倍分),转化为证四条线段或比例及两线段或两角相等.

1.6 辅助线的证题思想

1. 非借用辅助线的证题思想

根据已知公理(或公设)和定理(或成立的命题),找出已知条件与结论相联系的关系式. 若不能达到结论成立的目的,可根据定理(或成立的命题)的已知条件,找出一个起着“架桥铺路”(实际是辅助图)的第三关系式为代换,若还不

能达到结论成立的目的，可证别的量以辅助前者有关系式的条件（即辅助已知条件）.

2. 借用辅助线证题思想

根据已知公理（或公设）和定理（或成立的命题），借用辅助线（包括特殊点和线段）把已知分散的条件及结论化为集中或容易发生联系的条件及结论，然后用上述证题思想证结论成立，若还不能达到结论成立的目的，根据已知定理（或成立的命题）的条件、结论的位置，作第三辅助量（或第四辅助量），证第三量（或第四量）及别的量有关关系式，以辅助已知条件与结论成立的条件.

1.7 几何图形的辅助线

一、证明几何定理（或命题），首先要根据已知定理（或命题）分析图中的已知条件和有关线段及角（或圆）的关系，看能否证明结论成立，在这一般的分析中，若不能证明结论成立，就要增添一些有用的辅助线，以使得结论成立. 但是，几何证明题的辅助线是多种多样的（即不同的证法有不同的辅助线或相同的辅助线有不同的证法等），一般没有一定的规则（目前人们很难将几何问题的证法化成有程序的证法，但有人用计算方法硬算，这样的方法往往过程长和复杂，使证题人烦恼没有学习几何的兴趣）. 所以，我们就证题中常见的辅助线作如下归纳：

1. 连接两已知点或特殊点（如中点、某心等）.

2. 延长已知线段任意长或等于已知线段的若干倍份.

3. 过已知点或特殊点，作已知线段（或直线）或欲证的线段（或直线）.

4. 过已知点或特殊点，作线段或直线的平行线或等角线及垂线（或中垂线）.

5. 过某一已知点，作直线（或线段），使它与已知直线（或线段）所成的角等于已知角（或几个）.

6. 从已知点引已知圆的切（或公切）线或割线.

7. 过已知三点（或两点及某中心点）作圆.

8. 过若干已知共圆点作圆.

9. 过已知点或特殊点作第三量及第四量.

10. 以某一已知点为圆心，以已知长为半径作圆.

11. 连接两圆圆心（相交、相切、外离、内含）.

12. 连接两已知圆相交点，作公割线.

13. 过两已知圆的切点作公切线.

二、辅助线的目的

1. 把图形中的已知条件和所要证明的结论集中在一处，使它们相互之间发生内在联系.

2. 找出第三量(或第四量)，用作代换使所要证明的结论发生联系.

3. 找出定理(或命题)中所有的和、差、积倍分量，以达到结论成立的条件.

4. 找出新的关系式，辅助题设(即已知条件)的关系式，借此证得所要证明的结论成立.

5. 找出新的图形，能应用某些已知定理(或特殊定理)，借此证得所要证明的结论成立.

6. 更改图形，使原定理(或原命题)成为一个比较容易证明的定理(或命题).

三、常见作辅助线的几种方法

在证明某些定理(或命题)时，往往有时需要添设很多辅助线，手续比较多. 但是，有些辅助线的作法是可以采用几种比较简单的方法完成的(这仍然要根据作图法).

1. 平移法

把某一部分图形的大小形状不变，沿着一定的(或指定)方向，平行地移动到另一个图形的位置上. 这种作辅助线的方法叫作平移法. 一般形成的图形是平行四边形及等腰三角形.

2. 折法

把某一部分图形大小形状不变，以某一直线(或两已知点的连线)为轴，翻折到此直线的另一方，这种作辅助线的方法叫作翻折法(对应顶点连线的中垂线为翻折的直线轴).

3. 旋转法

把某一部分图形大小形状不变，以某已知点为中心，按着指定的旋转角及方向把这部分图形旋转到指定位置. 这种作辅助线的方法叫作旋转法. 当旋转角等于180°时，所形成的图形，称为原图形的中心对称图形，从而可知平移法和翻折法都是旋转法的特殊方法.

以上三种方法在证明定理(或命题)时是常用的方法，统称为合同变换(或正交变换)法.

4. 相似法

若两多边形成位似，则对应角相等，对应边成比例，我们把位似跟运动或轴