高职高专“十二五”经济管理系列规划教材

经济数学

王凤章 主 编
杨 丽 徐新荣 孙李红 副主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高职高专“十二五”经济管理系列规划教材

经济数学

王凤章　主　编

杨　丽　徐新英　孙李红　副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 王凤章主编. —北京：电子工业出版社，2012.8
高职高专“十二五”经济管理系列规划教材
ISBN 978-7-121-18532-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①经济数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 222257 号

责任编辑：李　静
印　　刷：北京京师印务有限公司
装　　订：北京京师印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　印张：14.25 字数：319 千字
印　　次：2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：26.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。
质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。
服务热线：（010）88258888。

前　言

随着我国教育制度的深化改革，大专院校由原先的精英式教育，逐渐转变为大众式教育，我们高职高专的教学应有所改变，特别是数学学科，也应由注重理论的教学，转变为注重实际的教学，强调数学知识的条件与结论，重点是应用。

经济数学课程是高等专科教育、高等职业教育中经济类专业的一门必修的、重要的基础课程和工具课。通过本课程的学习，使学生掌握微积分的初步知识、基本理论、基本运算，并通过各个教学环节，逐步培养学生初步抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力，使学生初步具备综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，重视培养学生用数学方法来解决实际问题的能力。

本书在人才培养过程中的地位、作用主要体现在：一是培养学生用数学思想、方法来消化吸收经济要领和经济原理的能力；二是培养学生把实际问题转化为数学问题并进行求解的能力；三是培养学生逻辑思维的能力。

本书的特色为：

（1）例题类型和数量丰富；

（2）各例题均配有详细的求解过程；

（3）注重数学在经济问题中的应用；

（4）文字叙述通俗易懂，对重要公式给出记忆方法、使用注意等，便于学生自习和预习。

本书共 8 章，主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，偏导数与全微分，线性代数，概率论。

本书由哈尔滨金融学院王凤章担任主编，哈尔滨金融学院杨丽、哈尔滨商业大学徐新荣和孙李红担任副主编。其中，王凤章编写第 1 章、第 8 章，杨丽编写第 4 章、第 7 章，徐新荣编写第 2 章、第 3 章，孙李红编写第 5 章、第 6 章。全书的结构安排、统稿、定稿工作由王凤章承担。

本书的编写得到了哈尔滨金融学院白素英教授的大力支持和热情帮助，她对本书的编写进行指导，提出了许多宝贵的意见并担任本书主审，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，编写时间较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。本书在编写过程中参阅和借鉴了大量的相关文献资料，在此对其作者表示感谢。

所有意见和建议请发往：wangfengzhang@sina.com。

编　者

目　录

第 1 章

函数、极限与连续

学习目标

1. 掌握极限与连续的概念；
2. 掌握极限运算的计算公式及运算法则.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念与性质

1. 函数的概念

在自然界中，存在着各种变化着的量，一些变量之间存在着相互之间的联系，函数就是描述变量之间相互依赖关系的基本工具.

引例 1 移动通信推出的一项业务，手机每月基础费 15 元，在此基础上，每分钟通话 0.25 元，则每月通话 x 分钟的话费（元）.

$$y = 15 + 0.25x . \tag{1.1}$$

对于每一个给定的通话时间 x，根据式（1.1），有唯一确定的话费 y 与之对应.

引例 2 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜的气温变化，如图 1.1 所示，可见对于一昼夜的每一个时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应.

定义 1.1 在某变化过程中有两个变量 x，y，如果变量 x 在数集 D 内任取一个数值，按照某种对应法则，变量 y 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记为：

$$y = f(x) \quad x \in D ,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量．自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，y 的对应值称为函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，f 称为函数的对应法则.

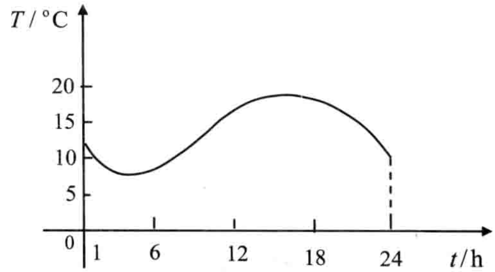

图 1.1　气温变化图

对于 $x_0 \in D$，按照对应规则 f，有确定的值 y_0 [记为 $f(x_0)$]与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值．当自变量 x 取遍 D 中所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合称为函数的值域，记为 W，即：

$$W = \{y \mid y = f(x),\quad x \in D\}$$

在许多纯数学问题中，函数关系经常用一个解析表达式表示，如果不加特殊说明，函数的定义域就是使函数表达式中涉及的所有运算都有意义的实数集合．这样的定义域成为函数的自然定义域．在实际问题中，函数的定义域需要根据问题的实际意义确定．

函数的定义域与对应规则是函数的两个要素．两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应规则均相同．

2．函数的常用表示法

1）解析法：自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又称解析表达式）来表示的方法．但是并非一个关于 x 与 y 的解析式一定表示一个函数关系．如 $y = \sqrt{-2-x^2}$，在实数范围内没有意义，不是一个函数关系．

2）图像法：在坐标系中用图形来表示函数关系的方法．

3）表格法：自变量的值与对应的因变量的值列成表格的方法．

例 1.1　确定函数的定义域 $y = \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \arcsin\dfrac{x-1}{5}$．

解　根据函数，可以得不等式方程 $\begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right| \leqslant 1 \end{cases}$，

解之得　$-4 \leqslant x < 5$．

例 1.2　判断下列两个函数是否是同一函数：$y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$．

解　由于 $y=x$ 的定义域是 $x\in R$，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的实数，因此两者不是同一函数．

例 1.3　设 $f(x)=x^2$，求 $f(2), f(a), f(x+1), f(-\dfrac{1}{y}), f[f(x)]$．

解　$f(2)=2^2=4$；　$f(a)=a^2$；　$f(x+1)=(x+1)^2$；

$f(-\dfrac{1}{y})=(-\dfrac{1}{y})^2=\dfrac{1}{y^2}$；　$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$．

3．函数的几种特性

（1）函数的奇偶性．

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．若任给 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若任给 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

例 1.4　判别下列函数的奇偶性．

$$(1) f(x)=\frac{1}{1+x^2}；\quad (2) f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})．$$

解　（1）$\because f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=f(x)$，　$\therefore f(x)$ 是偶函数；

（2）$\because f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，　$\therefore f(x)$ 是奇函数．

（2）函数的单调性．

定义 1.3　函数 $y=f(x)$，对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是增函数；若对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是减函数．区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间；或称为函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调函数．

例 1.5　研究下列函数的单调性．

（1）$f(x)=2x+1$；

（2）$f(x)=3x^2+2$．

解（1）对于 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=2x+1$ 是增函数．

（2）对于任意的 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)-f(x_2)=3(x_1+x_2)(x_1-x_2)$．

在 $(-\infty,0)$ 内，若 $x_1<x_2$，则有 $x_1<x_2<0$，$x_1+x_2<0$，$x_1-x_2<0$，因此 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $f(x)=3x^2+2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是减函数．

在 $(0,+\infty)$ 内，若 $x_1<x_2$，则有 $0<x_1<x_2$，$x_1+x_2>0$，$x_1-x_2<0$，因此 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)=3x^2+2$ 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数.

（3）函数的周期性.

定义 1.4 函数 $y=f(x)$，若存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于 x 在定义域内的一切值，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期. 习惯上，函数的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的 T 中的最小正数.

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, T=2\pi; y=\tan x, y=\cot x, T=\pi$.

而函数 $y=\sin 3x, T=\dfrac{2\pi}{3}; y=\tan 3\pi x, T=\dfrac{3\pi}{\pi}=3$.

（4）函数的有界性.

定义 1.5 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 存在常数 $M>0$，使对于 (a,b) 内的任何 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的（或称为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界函数）；反之，称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

1.1.2 反函数和复合函数

1. 反函数

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 A，值域是 B，若对 B 中的每一个 y，都有唯一的确定的 $x\in A$，使 $f(x)=y$，则这时 x 也是 y 的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，此时，$y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，人们用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以，将反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

互为反函数的两个函数关于直线 $y=x$ 对称（见图 1.2）.

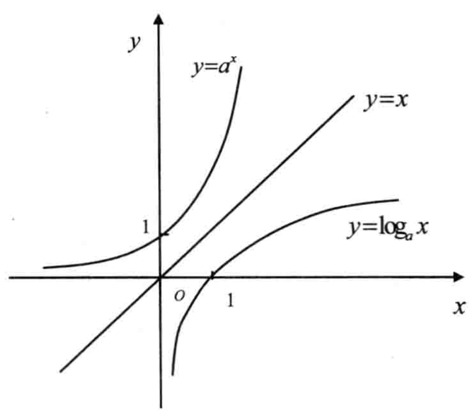

图 1.2 互为反函数的函数图像

例 1.6 开学后，班委买练习本，每本 2 元. 现在要买 x 本，问共花钱多少元? 若共有 y

元，可以买本多少个？

解　函数表达式为 $y=2x$；函数表达式为 $x=\dfrac{y}{2}$. 上述两个函数是描述同一过程不同角度列出的两个表达式，互为相反数. 第二个函数还可以表示为第一个函数的反函数，即 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$.

2. 复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量而联系起来的. 这样通过中间变量复合而成的函数称为复合函数.

定义 1.7　设函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$ 的值域和 $y=f(u)$ 的定义域交集非空，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称这样的函数是由函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量. 而没有中间变量的函数称为简单函数.

例 1.7　$y=\arcsin u$，$u=x^2+1.5$ 就不能进行复合，因为 $y=\arcsin(x^2+1.5)$ 没有实际意义，只是一些符号的堆砌而已.

例 1.8　将下列复合函数分解.

(1) $y=\cos^2(x^2+1)$；(2) $y=a^{\sin^3\frac{1}{x}}(a>0)$.

解　（1）$y=u^2$；$u=\cos v$；$v=x^2+1$；

（2）$y=a^u$；$u=v^3$；$v=\sin w$；$w=\dfrac{1}{x}$.

例 1.9　将函数 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln(x^2+2)$ 复合.

解　$y=\cos\sqrt{\ln\left(x^2+2\right)}$.

1.1.3　初等函数

1. 基本常量函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 我们已经学习过这些函数.

（1）常值函数.

常量函数 $y=c$ ，c 为常数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ，如图 1.3 所示.

（2）幂函数.

幂函数 $y=x^a$（a 是任意实数），其定义域要依 a 具体的值而定. 几种常用的幂函数如图 1.4 所示.

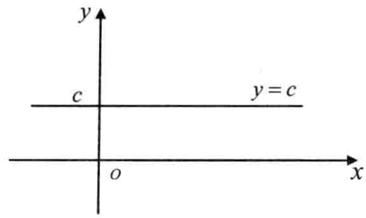

图 1.3 常值函数

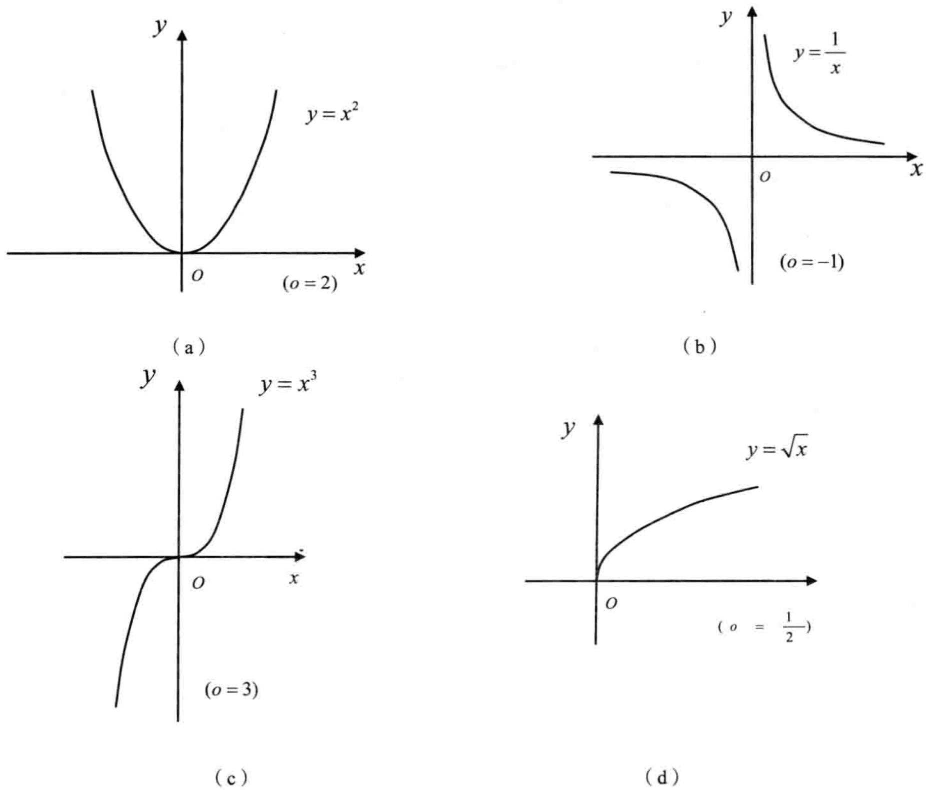

图 1.4 幂函数

（3）指数函数.

指数函数 $y=a^x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq 1$），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$．当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调减少． $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称，如图 1.5 所示.

（4）对数函数.

对数函数 $y=\log_a x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq 1$），为指数函数 $y=a^x$ 的反函数．其定义

域为 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时函数 $y=\log_a x$ 单调减少. 如图 1.6 所示.

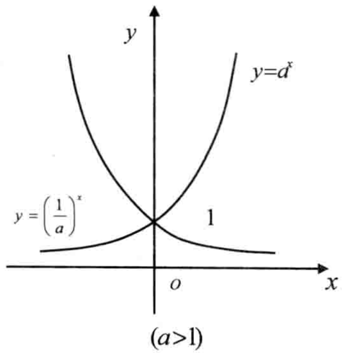

图 1.5　指数函数

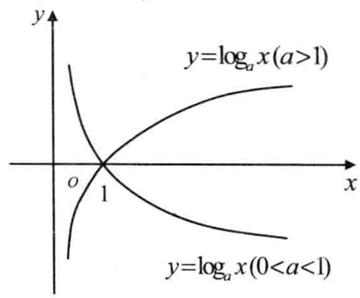

图 1.6　对数函数

（5）三角函数.

常用的三角函数有：正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是周期为 2π 的奇函数，如图 1.7 所示.

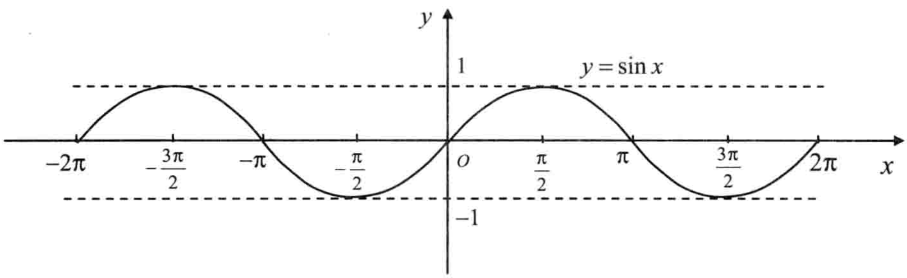

图 1.7　正弦函数

余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是周期为 2π 的偶函数，如图 1.8 所示.

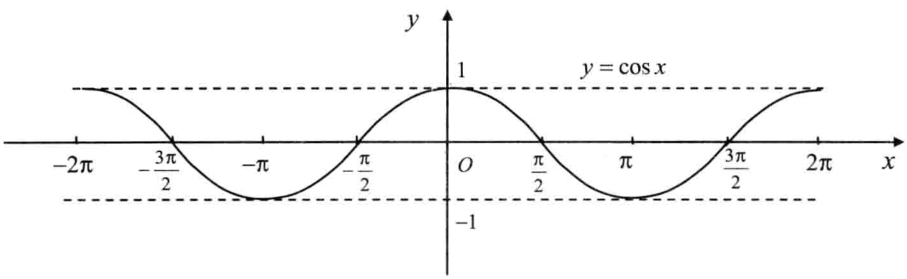

图 1.8　余弦函数

正切函数 $y=\tan x$，定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是周期为 π 的奇函数，如图 1.9 所示.

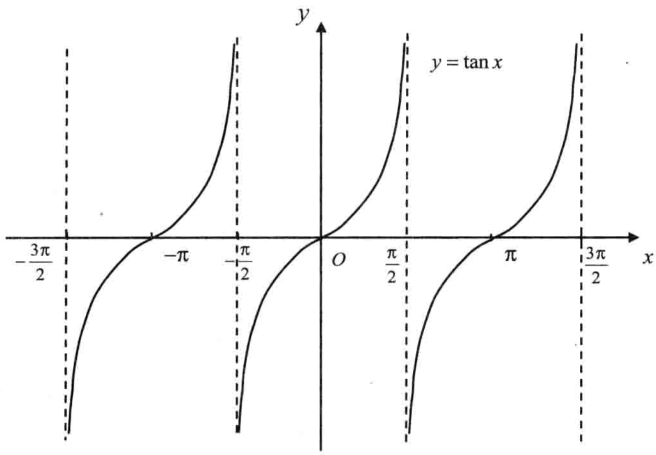

图 1.9　正切函数

余切函数 $y=\cot x$，定义域为 $x\neq k\pi,k\in Z$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是周期为 π 的奇函数，如图 1.10 所示.

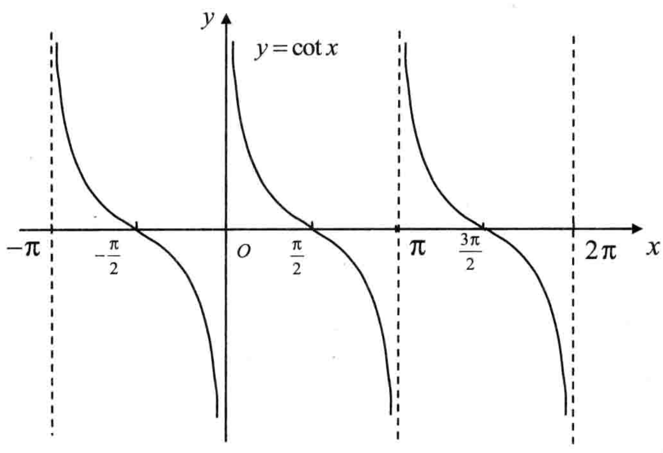

图 1.10　余切函数

（6）反三角函数.

三角函数的反函数称为反三角函数，由于三角函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$，不是单调函数，为了定义其反函数，对这些函数限定在“主值”区间来讨论反函数. 常用的反三角函数有：

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，如图 1.11 所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，如图 1.12 所示.

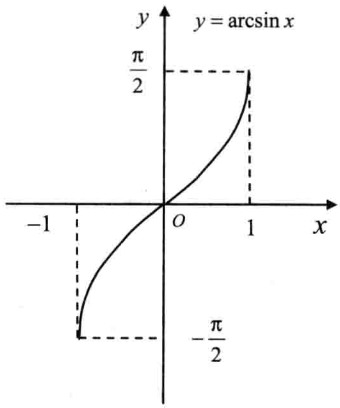

图 1.11　反正弦函数

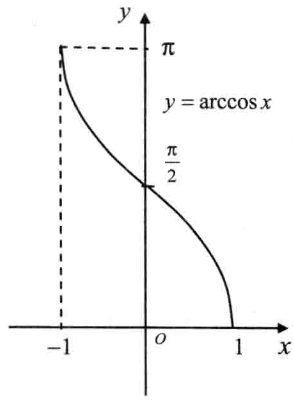

图 1.12　反余弦函数

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，如图 1.13 所示.

反余切函数 $y=arc\cot x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，如图 1.14 所示.

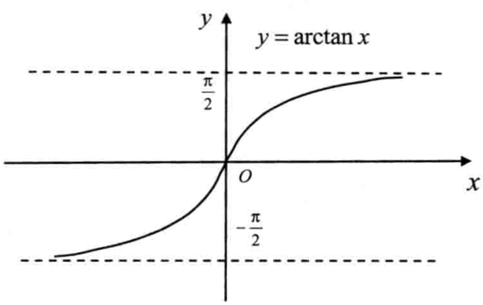

图 1.13　反正切函数

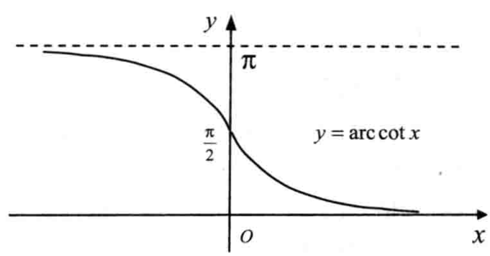

图 1.14　反余切函数

2. 初等函数

由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的复合所构成的函数统称为初等函数.