混沌同步控制方法
及在保密通信中的应用

主编　任涛　井元伟　姜囡

HUNDUN TONGBU KONGZHI FANGFA
JI ZAI BAOMI TONGXIN ZHONG DE YINGYONG

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

混沌同步控制方法及在保密通信中的应用

主　编　任　涛　井元伟　姜　囡

机　械　工　业　出　版　社

近几年，混沌控制在工程技术上表现出了重大的研究价值和很好的应用前景，混沌同步控制及在保密通信中的应用问题已经引起了国际上非线性动力系统和工程控制专家的极大关注，成为非线性科学研究的热点之一。

本书总结了作者及其团队近几年来对混沌同步控制方法及其在保密通信中应用的研究成果，并对近年来混沌同步控制学术界的研究现状进行了客观的总结与回顾，列举了作者部分重要的创新性研究成果。

本书可供理工类大学教师和研究生阅读参考，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

混沌同步控制方法及在保密通信中的应用/任涛，井元伟，姜囡主编. —北京：机械工业出版社，2015.2
ISBN 978－7－111－49387－7

Ⅰ.①混… Ⅱ.①任…②井…③姜… Ⅲ.①混沌理论－应用－保密通信 Ⅳ.①TN918.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 033572 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：林春泉　责任编辑：林春泉
版式设计：常天培　责任校对：李锦莉
责任印制：刘　岚
北京京丰印刷厂印刷
2015 年 3 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm × 239mm · 11 印张 · 1 插页 · 209 千字
0 001—2 000 册
标准书号：ISBN 978－7－111－49387－7
定价：49.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　　　　　　　　　网络服务
服务咨询热线：010-88361066　机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
　　　　　　　010-88379203　金 书 网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版　　　教育服务网：www.cmpedu.com

序

“混沌”一词，中国古代早已有之，中国古人想象中天地未开辟以前宇宙模糊一团的状态，即混沌状态，后用以形容模糊隐约的样子。在中国的文学作品中，混沌一词经常出现，如：

汉班固《白虎通·天地》：“混沌相连，视之不见，听之不闻，然后剖判。”

施耐庵《西游记》第一回：“混沌未分天地乱，茫茫渺渺无人见。”

郭沫若《七里山渠》：“相传在昔有盘古，劈开混沌造区宇。”等。

无独有偶，在西方，古希腊哲学家对于宇宙起源也持混沌论，主张宇宙是由混沌状态逐渐形成现今有条不紊的世界。在古代，为描述未知的宇宙，几乎所有民族都构造了自己的混沌自然哲学。

当今，为理解宏观复杂性，世界各国的科学家创立了具有革命性的混沌科学。早在 1963 年，美国麻省理工学院教授、气象学家、混沌学开创人之一爱德华·洛伦兹提出了混沌理论。该理论解释了确定性系统可能产生随机结果这一现象，理论的最大贡献是用简单的模型获得明确的非周期结果。1972 年，洛伦兹发表了题为《蝴蝶效应》的论文，提出一个貌似荒谬的论断：在巴西一只蝴蝶拍打翅膀能在美国得克萨斯州产生一个龙卷风，并由此提出了天气的不可准确预报性。时至今日，这一论断仍为人津津乐道，更重要的是，它激发了人们对混沌学的浓厚兴趣。其实，中国古语“差之毫厘，失之千里”揭示的就是这种现象；在西方，流传的一首民谣“钉子缺，蹄铁卸；蹄铁卸，战马蹶；战马蹶，骑士绝；骑士绝，战事折；战事折，国家灭。”其含义是初始条件十分微小的变化（马蹄铁上一个钉子的丢失），但其“长期”效应却是一个帝国存与亡的根本差别，这就是军事领域中的“蝴蝶效应”。因此，混沌的本质是系统的长期行为对初始条件的敏感性，即在混沌系统中，初始条件十分微小的变化经过不断放大，对其未来状态会造成极其巨大的差别。

混沌不是偶然的、个别的事件，而是普遍存在于宇宙间各种各样的宏观及微观的系统。混沌也不是独立存在的科学，它与其他各门科学互相促进、互相依靠，由此派生出许多交叉学科，如混沌气象学、混沌经济学、混沌数学等，甚至在国际政治学，生物学和艺术领域都有混沌现象的存在。混沌学不仅极具研究价值，而且有现实应用价值，能直接或间接创造财富。从大的范围看，混沌研究是复杂性科学中的一支，新的自然哲学必然建立在整个复杂性科学的基础之上。当前，混沌理论研究的目是希望揭示混沌的本质、刻画它的基本特征、了解它的动

力性态，并力求对它加以控制，使之为人类服务。在过去20年中，混沌在工程系统中逐渐从被认为是一种有害的现象转变到被认为是具有实际应用价值的现象来加以探讨。近年来的大量研究工作表明，混沌与工程技术联系愈来愈密切，主要包括混沌信号同步化和保密通信等。同时，混沌控制技术已经被应用到激光、化学反应过程、流体力学、非线性电路、神经网络、机械振动系统、医疗的研究工作中去。

今天，伴随计算机等技术的飞速进步，混沌控制已发展成为一门影响深远、发展迅速的前沿科学，因此，对混沌控制的研究有着重要的意义，我很高兴应作者之邀为《混沌同步控制方法及在保密通信中的应用》一书作序。作者从控制论的角度对混沌的发展、定义给出了系统的归纳和总结，并对混沌同步存在的若干问题进行了深入的研究与探讨，给出了混沌系统的同步控制方法和结论。这本书不但可以供从事混沌研究的科学工作者和工程技术人员参考、借鉴，也适用于对混沌现象感兴趣的同学们学习，相信这本书能为混沌控制的发展做出有益的贡献。

中国科学院院士

张嗣瀛

2015, 1.31.

前　言

混沌，广泛地存在于自然界。混沌理论与相对论、量子力学并称为20世纪自然科学的三大发现。它揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性，是有序与无序的统一，确定性与随机性的统一，拓展了人们的视野，加深了人们对客观世界的认识。当前，混沌科学与其他科学互相渗透，无论是在物理学、生物学、电子信息科学，还是在天文学、经济学，混沌现象都有着广泛的应用。随着时间的推移，混沌理论的研究成果正在影响着人类社会和自然科学的发展，并会在将来的科学发展中发挥重要的作用。近几年，混沌控制在工程技术上表现出了重大的研究价值和很好的应用前景，混沌控制问题已经引起了国际上非线性动力系统和工程控制专家的极大关注，成为非线性科学研究的热点之一。同时，混沌保密通信问题的研究也越来越多地引起学者们的兴趣，因此针对混沌控制问题，无论是在理论方面的研究还是实际应用的探索，都将是一个极其重大而又意义深远的课题，必将对人类生活产生深刻的影响。

基于以上出发点，本书针对近年来混沌同步控制的热点，难点问题及在保密通信的应用展开了深入详细的讨论，全书共分7章，每章均紧密围绕混沌同步控制问题展开叙述。第1章简要介绍了混沌系统的概念、发展，典型的混沌系统，混沌同步控制方法以及混沌保密通信的方法，为后续混沌同步控制的研究及应用做好铺垫。第2~6章主要介绍了团队近几年针对混沌同步控制的理论研究成果。其中，第2章论述了一类特殊的混沌同步——旋转同步问题，并给出了同步控制方法；第3章分别讨论了混沌系统的双向同步以及有限时间同步控制问题，并将两种同步技术相结合，给出了混沌系统的双向有限时间同步控制方法；第4章针对混沌采样控制系统存在的采样数据丢失的问题，分别采用零输入策略和保持输入策略实现含有采样数据丢失的混沌系统的同步；第5章考虑混沌系统的外部扰动，参数不确定性等问题，对混沌系统的鲁棒同步控制问题展开研究；第6章主要针对含有故障（系统故障，控制器故障）的混沌系统，设计了容错同步控制器实现混沌系统的同步。本书的最后（第7章），基于上述理论研究成果，介绍了混沌系统的电路实现并将混沌系统分别应用于有线和无线的语音保密通信中，取得了良好的效果。全书编撰的目的是向广大读者介绍近年来混沌同步控制领域存在的主要问题及团队给出的解决方案，因此各章只给出了问题描述，主要结论及仿真结果，省略了烦琐的证明过程，希望这样可以有助于读者方便地抓住主要问题，而对书中各章定理推导过程感兴趣的读者可以查阅团队所发表的相关学术

论文。

本书科研团队从2009年接触混沌，到现在已经经历近6个年头，团队已经毕业了4届研究生，在本书编写过程中，团队的研究生们参与了编写工作，给予了我们莫大的支持和帮助，他们是2011年毕业的姜勇强、刘亚奇、林司森、王文滨，2012年毕业的付强、王猛、李景岩、邓佳佳、于元元，2013年毕业的温建新、杨燕飞、刘东美、赵亚飞、沈道清、李勇亮、郑旭超，2014年毕业的张启超、毕宁军、李彩娟、陈曦，还有目前正在学校攻读硕士学位的张健、张霞、王艳娇、李萌、武冬梅、程晓燕、姜伟月、段欣磊、孙杨、张强、王一帆、唐梦倩。激情四射，充满活力的你们让我们时刻提醒自己要永远保持一颗年轻的心，要永远乐于面对挑战。此外，参与本书编写的还有郑艳老师。

感谢东北大学于海、付冲、王智良、石海滨、钱晓龙、董久祥等教授对本书的热心帮助与指导，特别感谢东北大学软件学院朱志良教授长期以来对整个研究工作的大力支持。

另外，本书的研究工作得到了国家自然科学基金（61104074，61473073），中国博士后自然科学基金-特别资助（2013T60294），中央高校基本科研业务费（N130417006，N110417005），辽宁省高等学校优秀人才支持计划（LJQ2014028）的资助，在此一并表示感谢。

最后，感谢家人长期以来对我们工作的理解和支持。

由于作者水平有限，对混沌同步的研究还不够深入全面，且书中大多数成果都是近期完成，因此难免有错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

作者于东北大学
2014年12月

目 录

第 1 章　绪　　论

1.1　混沌系统概述

1.1.1　混沌系统的发展

混沌，广泛地存在于自然界，产生于确定性系统，对初始条件极端敏感，类似于随机运动而且具有长期不可预测性。混沌揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性，是有序与无序的统一，确定性与随机性的统一，从而拓广了人们的视野，加深了人们对客观世界的认识。

19 世纪中期，自然科学家首先讨论的混沌问题是热力学。众所周知，当达到热力学平衡时，系统内部中每一点的温度、压强、浓度、化学势等均无差别，处处相同，熵极大，即分子的混乱度极高。可见，热力学的平衡态实际上是一种传统意义上的混沌态。

现代科学意义上混沌的发现，可以追溯到 19 世纪末 20 世纪初，法国数学家 Poincare 在研究三体问题时遇到了混沌问题。发现三体问题，如太阳、月亮和地球三者的相对运动与单体问题、二体问题不同，它是无法求出精确解的。多年来这成了牛顿力学中遗留的难题，于是 1903 年 Poincare 在他的《科学与方法》一书中提出了庞加莱猜想。他把动力学系统和拓扑学有机地结合起来，并指出三体问题中，在一定范围内，其解是随机的。实际上这是一种保守系统中的混沌，从而他成为世界上最先了解混沌存在可能性的第一人。

1963 年，美国著名气象学家、科学院院士 Lorenz 在研究气象的变化时，前后两次将偏差只为 0.000127 的数据输入计算机，结果令人诧异不已，前后两次的短期行为相差不多，但随着时间的推移，两次的长期行为却大相径庭，只是因为 0.000127 这个微小的初始值偏差，因此 Lorenz 认为长期的准确预报天气是不可能实现的[1]。后来，Lorenz 发表一篇名为“一只蝴蝶拍一下翅膀会不会在得克萨斯州引起龙卷风”的论文，文中指出即使某系统的初始条件只偏差一点点，结果会很不稳定，这种现象被他称作“蝴蝶效应”[2]。后来他提出了天气预报的一种简化模型——Lorenz 模型，为混沌学的发展奠定了深厚的理论基础，因此 Lorenz 被誉为“混沌之父”。1964 年，法国天文学家 Henon 在研究星团和 Lorenz 吸引子的过程中受到启发，发现了 Henon 映射，建立了“热引力崩坍”这一理论

体系，对几百年来一直未解决的太阳系稳定问题做出了合理解释。

1971 年，法国物理学家 Ruelle 和荷兰学者 Takens 在“论湍流的本质”一文中，提出用混沌的概念来描述湍流形成机理的观点，引入了“奇怪吸引子”这一概念，并通过严格的数学理论分析，给出了“奇怪吸引子”与混沌运动的关系，开辟了一条混沌发展的新道路。1975 年，美籍华人科学家李天岩和美国著名数学家 Yorke 发表了“周期三意味着混沌”一文，提出了著名的 Li-Yorke 定理[3]，“混沌”一词，首次出现在科学文献中，并取得了人们的认可。1976 年，美国生态学者 May 发表了名为“具有极复杂的动力学的简单数学模型”的文章[4]，指出生态学领域中，一些确定性数学模型也能产生类似随机的行为，同年，法国天文学家 Henon 简化了 Lorenz 方程，得到了 Henon 二维映射，通过实验验证发现简单的平面映射也可以产生较为复杂的混沌运动，拓展了混沌学的研究范畴。1977 年，意大利举行的第一次国际混沌大会标志着混沌科学的诞生。1978 ~ 1979 年期间，Feigenbaum 在 May 所研究的基础上发现了倍周期分叉过程中的普适常数和标度性，为混沌科学的发展奠定了坚实的基础。

20 世纪 80 年代后，混沌的研究得到了更进一步的发展。1983 年，美国加州大学的蔡少棠教授提出了一个结构简单、容易实现的三阶自治电路——Chua’s 电路[5]。该电路可以产生混沌现象，受到了广泛的关注和研究，成为最早经过严谨的理论说明和实验验证的混沌模型。1984 年，我国科学院院士郝柏林编写的《混沌》一书在新加坡出版，为混沌科学的发展，尤其在亚洲地区的发展起到了一定的推动作用。1986 年，我国在桂林召开第一次关于混沌研究的学术会议，使得混沌科学在中国的传播与研究有了更进一步的发展。1988 年，美国 SIAM（工业和应用数学）协会，发表了“控制理论未来的发展方向”一文，把混沌的控制作为未来一个极具潜力的研究方向。随后，陈关荣、吕金虎等人在对混沌的研究中发现了 Chen 系统、LV 系统等。

混沌控制的研究起源于 20 世纪 90 年代，其重要标志是 1990 年美国马里兰州立大学的 Ott、Grebogi 和 Yorke 提出了一种抑制混沌的方法——参数微扰控制法（OGY 方法），该方法的提出，不在于它自身能解决一个什么样的问题，而在于让人们从新的角度重新认识混沌，对初始条件的微小变化如此敏感、长期行为无法预测的类随机行为，竟然可以通过合适的策略、方法、途径进行控制，达到预期的目的[6]。伴随着 OGY 方法的提出，社会各界掀起了研究混沌的浪潮。

20 世纪 90 年代以后是混沌理论高速发展的年代，是混沌理论在众多领域被广泛研究和应用的时代。混沌理论与许多其他学科开始相互交叉被研究，如数学、物理学、化学、信息科学、电子学、气象学，甚至生物学、医学、美术等众多领域都可看到它广泛而深远的影响。诸如：基于混沌同步的保密通信和混沌信

息技术，将在信息时代产生极大的影响；强流加速器驱动的放射性洁净核能系统，比常规核电更干净、更安全、更便宜；在生物医学工程中，混沌理论对探索生物复杂性、人脑奥秘、控制心脏系统等提供了新思路和新方法；混沌可以大大提高激光输出功率，并且改善激光性能，使激光应用范围更加广阔等[7]。伴随着科学技术的进步，混沌与混沌控制在国防和国民经济领域也将展示出越来越大的应用潜力。

近年来，伴随着复杂网络研究的兴起，人们开始广泛关注网络结构的复杂性及其网络运行之间的关系。关于复杂网络的研究主要集中在复杂网络的特性、复杂网络的建模、网络动力学研究三个方面。其中对于复杂网络动力学的研究，特别是复杂网络的混沌同步研究正引起国内外学者极大的兴趣。

1.1.2 混沌系统的定义

混沌是一种普遍存在于从宏观到微观非线性系统(包括自然科学、社会科学几乎每一个分支)内在的无规则而不稳定的运动状态，尽管目前混沌引起学术界的广泛关注，但作为科学术语，至今仍没有被统一认可的定义，早在19世纪末，法国数学家Poincare就曾预言过混沌运动的一些行为，但由于条件的限制，他的预言并没有引起更多的注意。1963年混沌现象发现者之一，研究混沌理论的美国著名气象学家Lorenz指出，混沌系统是指敏感依赖于初始条件的内在变化的系统。1975年李天岩和Yorke首先提出了现代科学意义上为后续学者普遍接受的“混沌”概念，并给出了混沌的一种数学定义，即Li-Yorke定义。

【Li-Yorke定义】[3]：设连续自映射f: $I \to I \subset \mathfrak{R}$，$I$是$\mathfrak{R}$中一个子空间，如果存在不可数集合$S \subset I$满足：

1）S不包含周期点。

2）任何X_1，$X_2 \in S(X_1 \neq X_2)$，有$\begin{cases} \limsup |f^t(X_1) - f^t(X_2)| > 0 \\ \liminf |f^t(X_1) - f^t(X_2)| = 0 \end{cases}$

式中，$f^t(\cdot) = f(f(\cdots f(\cdot)))$表示$t$重函数关系。

3）任给$X_1 \in S$及f的任意周期点$P \in I$，有$\limsup\limits_{t \to \infty} |f^t(X_1) - f^t(P)| > 0$，则称$f$在$S$上是混沌的。

这一定义所提出的“周期三意味着混沌”，实际上是原苏联学者Sarkovskii在1964年关于连续函数“周期点”出现顺序定理的一个特例。

此定义中，由于前两个极限说明子集的点X_1，$X_2 \in S$相当分散而又相当集中，第三个极限说明子集不会趋于任意周期点，所以该定理本身只是预言有非周期轨道存在，而其中涉及的集合S的勒贝格测度有可能为零，因此混沌是不可观测的，但人们研究所关心的往往是可测集情形，即此时S有一个正的测度。

根据 Li-Yorke 定义，1983 年 Day 认为一个混沌系统应具有如下 3 个特性：

1）存在所有阶的周期轨道。

2）存在一个不可数集合，该集合只含有混沌轨道且任意两个轨道既不趋向远离也不趋向接近，同时任意一条轨道不趋于任一轨道，即该集合不存在渐近周期轨道。

3）混沌轨道具有高度的不稳定性。

1989 年 Devaney 给出了混沌的另外一种定义。

【Devaney 定义】[8]：设 V 是一个度量空间，一个连续映射 f：$V \to V$ 称为 V 上的混沌。如果：

1）f 对初始条件的敏感依赖性。这意味着混沌映射具有长期不可预测性，如果初始条件发生极其微小的变化，在短时间内的结果还可以预测但通过长时间的变化后，它的状态根本无法确定，即所谓的“蝴蝶效应”。

2）f 是拓扑传递的。它说明混沌系统是不能被细分或不能被分解为两个在 f 下相互影响的子系统，其轨道具有规律性的成分。

3）f 的周期点在 V 中稠密，这说明混沌映射具有不可分解性，也即混沌系统具有稠密的周期轨道，其运动最终落在混沌吸引子之中，使其呈现出多种看似混乱无序却又颇具有规则的自相似结构(分形)。混沌吸引子中的运动能在一定范围内按其自身的规律遍历每一条轨道，既不自我重复又不自我交叉。

除了上述混沌定义之外，还有诸如 Samle 马蹄横截同宿点、拓扑混合及符号动力系统等定义，尽管如此，但关于混沌迄今仍没有一个公认的普遍适用的数学定义。因为从事不同领域研究的学者都是基于各自对混沌的理解研究并进行各自的应用。

1.1.3 混沌系统的判断方法

混沌属于非线性系统，但并不是指非线性系统就是混沌的。对于一般的非线性系统，现在通常由以下几种方法来定量和定性的刻画系统是否是混沌的[9]。

1. 直接观测法

直接观测法是根据动力学系统的数值运算结果，画出相空间中相轨迹随时间的变化图，以及状态变量随时间的历程图。通过对比和分析来确定系统是否为混沌系统。在相空间中，周期运动对应于封闭曲线，而混沌运动则对应于一定区域内随机分离的永不封闭也不相交的轨迹(奇异吸引子)。利用这种方法可确定分叉点和普适常数。

2. 分频采样法

对周期外力作用下的非线性振子，研究其倍周期分叉和混沌现象，可采用频闪采样法，该方法是试验物理学中闪烁采样法的推广。为避免复杂运动在相空间

中轨迹的混乱不清，可以只限于观察一定时间间隔(称为采样周期)在相空间的代表点(称为采样点)，这样原来在相空间的连续轨迹就被一系列离散点所代表。分频采样法目前是辨认长周期混沌带的最有效的方法。

3. 庞加莱截面法

利用相图的方法可以简化复杂运动系统，但是对有些非常复杂的系统，研究其轨道是极其困难的。例如有些倍周期运动的周期倍数非常高，则其轨道看起来似乎可能很混乱，从轨道来看很难把其与非周期运动区分开来，这时就要用庞加莱截面方法来研究。它不仅容易区别周期和非周期，而且也能清楚地反映出动力系统在庞加莱截面上的相应结构。庞加莱截面法是在多维相空间中选取一个适当的截面，称为庞加莱截面。通过计算机画出庞加莱截面上的截点，然后观察截点的分布，从而可以判断出运动的性质。根据混沌研究结果表明：当庞加莱截面上是一封闭曲线时，运动是准周期的；当庞加莱截面上只有一个不动点或少数离散点时，运动是周期的；当庞加莱截面上是一些成片的密集点时，就是混沌运动。

4. 空间重构法

重构相空间的轨线反映了系统状态的演化规律。定态对应一个点；周期运动对应有限的点；混沌运动则对应具有一定分布形式或结构的离散点。

5. Lyapunov 指数法[10]

Lyapunov(李雅普诺夫)指数是反映系统动力学特性的一个重要定量指标，是对非线性映射产生的运动轨道相互趋近或分离的整体效果进行的定量刻画。混沌运动的基本特点是运动对初始条件极为敏感，两个靠得很近的初值所产生的轨道随时间的推移按指数方式分离，Lyapunov 指数就是定量描述这一现象的量。对混沌系统而言，正的 Lyapunov 指数表明轨道在每个局部都是不稳定的，相邻轨道按指数分离。但是由于吸引子的有界性，轨道不能分离到无限远处，所以只能在一个局限区域内反复折叠，但又永远互不相交。由此形成了混沌吸引子的特殊结构。同时，正的 Lyapunov 指数也表示相邻点信息量的丢失，其值越大，信息量丢失越严重，混沌程度越高。

Lyapunov 指数是系统在相空间中相邻的两条轨道随时间的推移，按指数收敛或分离的平均变化率。设连续的自治系统：

$$\dot{x} = f(x)$$

式中，$x \in R^n$，系统经过初始条件 x_0 的流在相空间中形成一条轨道 $x(t)$，如果初始条件有一个很小的偏差 Δx_0，则由 $x_0 + \Delta x_0$ 出发会形成另一条轨道，它们形成一个切空间向量 $\Delta x(x_0, t)$，其欧氏模为 $\| \Delta x(x_0, t) \|$，令 $w(x_0, t) = \Delta x(x_0, t)$，则会满足

$$\dot{w} = M(x, t)w$$

式中，$M(x, t)=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$，则当$\|\Delta x(x_0, t)\|\to 0$时，$n$维流的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda(x_0, w)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\|\Delta x(x_0, t)\|}{\|\Delta x(x_0, 0)\|}$$

Lyapunov 指数是系统相空间中相近轨道的平均收敛性或平均发散性的一种度量。如果 Lyapunov 指数 λ 为正，说明系统的相邻轨道是发散的，即系统是混沌的。如果 $\lambda=0$，则表示系统处于临界状态。如果 λ 为负，则表示系统处于稳定状态，收敛于不动点或者是周期解。

通过以上介绍，可以发现，对于混沌系统，必须同时满足以下条件：①至少存在一个正的 Lyapunov 指数大于 0，②至少存在一个 Lyapunov 指数小于 0，③所有 Lyapunov 指数之和为负。其中第一个条件表明相空间在某一方向上相邻轨道是成指数分离的，这是混沌的主要特征。第二个条件说明了混沌系统的周期性。第三个条件则说明了系统在整体上的稳定性。通过以上分析可以知道，对于三维混沌系统，Lyapunov 指数的符号只能为(+， -，0)这种情况。

关于 Lyapunov 指数计算的研究，也已经取得了显著的成果。目前，Lyapunov 指数的计算方法有很多，但是总的来看，大致可分为两种情况，一种情况是只知道实验中观察到的一组数据，另一种情况是已知系统满足的微分方程或映射关系。在这两种情况下，人们计算 Lapunov 指数的方法不同。通过从实验观察到的数据，计算系统的 Lyapunov 指数，可采用 Wolf 方法、BBA 方法等。其中 Wolf 方法仅适用于求取系统的最大 Lyapunov 指数，而 BBA 方法则可求出系统的 Lyapunov 指数谱。不过这些方法都对噪声敏感，于是人们提出了小波滤波变换法等改进算法。对于已知系统微分方程或映射关系的情况主要是利用系统的 Jacobi (雅克比)矩阵方法计算，下面给出 Lyapunov 指数的计算。

1）对于一维映射：

$$x_n=f(x_n)$$

由于一维映射只有一个拉伸或压缩方向，因此可以考虑初值 x_0 和它的邻近值 $x_0+\Delta x$，根据上述映射迭代一次后，这两点之间的距离为

$$\delta x_1=|f(x_0+\delta x_0)-f(x_0)|=\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\Delta x_0$$

经过 n 次迭代后，这两点之间的距离以指数分离，Lyapunov 指数可以来度量这种分离性，如下所示：

$$LE=\frac{1}{n}\ln\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0}=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x_0)}{\mathrm{d}x}\right|=\frac{1}{n}\left|\prod_{i=0}^{n-1}f'(x_i)\right|$$

或者写为

$$LE = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|$$

对于一维映射，只有一个 Lapunov 指数。因此，当 LE 由负变正时，表明系统的运动开始由稳定向混沌转变。

2）高维映射的 Lyapunov 指数计算，对于三维混沌方程

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n,\ y_n,\ z_n) \\ y_{n+1} = f_2(x_n,\ y_n,\ z_n) \\ z_{n+1} = f_3(x_n,\ y_n,\ z_n) \end{cases} \tag{1-1}$$

如果初始点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$的偏差为$(\delta x_0,\ \delta y_0,\ \delta z_0)$，则从初始点出发，利用式(1-1)逐次迭代得$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，…，$(x_n,\ y_n,\ z_n)$。Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

前 n 个 Jacobi 矩阵分别为 J_0，J_1，J_2，…，J_{n-1}。

$$\begin{bmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \\ \delta z_n \end{bmatrix} = J_{n-1},\ J_{n-2},\ \cdots,\ J_1,\ J_0 \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix}$$

如果上述 Jacobi 矩阵的特征值分别为 λ_1，λ_2，λ_3，…，λ_n，则高维映射的 n 个 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = \dfrac{1}{n}\ln|\lambda_1|$，$LE_2 = \dfrac{1}{n}\ln|\lambda_2|$，…，$LE_n = \dfrac{1}{n}\ln|\lambda_n|$。

令 $\Delta x_i = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}$，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，为矩阵 J_0，J_1，J_2，…，J_{n-1}的特征向量，则有

$$\Delta x_n = J_{n-1},\ J_{n-2},\ \cdots,\ J_1,\ J_0\Delta x_0$$

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} = J_{n-1},\ J_{n-2},\ \cdots,\ J_1,\ J_0$$

对上式两边同时取模可得

$$\frac{\|\Delta x_n\|}{\|\Delta x_0\|}=\frac{\|\Delta x_n\|}{\|\Delta x_{n-1}\|}\cdot\frac{\|\Delta x_{n-1}\|}{\|\Delta x_{n-2}\|}\cdots\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|}=\lambda_{n-1},\ \lambda_{n-2},\ \cdots,\ \lambda_0$$

由此可知高维映射的 Lyapunov 指数为

$$LE=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\|\Delta x_n\|}{\|\Delta x_0\|}\right)=\frac{1}{n}\ln(\lambda_{n-1},\lambda_{n-2},\cdots,\lambda_0)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\lambda_i$$

对于高维系统，如果具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数，则该系统就是超混沌系统。超混沌系统相对于一般的低维混沌系统具有更好的保密特性，在保密通信中有着更广泛的应用。关于 Lyapunov 指数的计算方法，目前还存在很多问题，比如精度不高、受噪声影响大、计算量太大、收敛速度慢、很难应用等。因此，如何能够既准确又快速地计算 Lyapunov 指数，仍然是研究者关注的重要问题。

1.1.4 几种典型的混沌系统

1. 蔡氏电路

1983 年，美国 Berkeley 大学的蔡少棠教授发明蔡氏电路（Chua's Circuit），蔡氏电路因其简洁性和代表性而成为研究非线性电路中混沌的典范。（构造的）蔡氏电路是第一个真正能够用物理手段实现的混沌系统。蔡氏电路的原理图如图 1-1 所示。蔡氏电路由一个电感 L，两个电容 C_1、C_2，一个线性电阻 R 和一个分段线性电阻 g（即蔡氏二极管）组成。然而，它确有丰富的动力学行为，包括各种分岔和混沌。

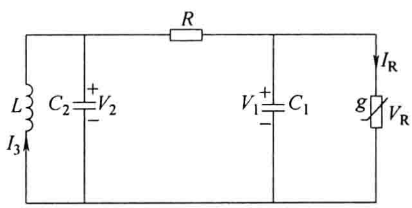

图 1-1 蔡氏电路

蔡氏电路的数学模型可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{dV_1}{dt}=\dfrac{V_2-V_1}{RC_1}-\dfrac{f(V_1)}{C_1}\\[2mm]\dfrac{dV_2}{dt}=\dfrac{V_1-V_2}{RC_2}+\dfrac{I_3}{C_2}\\[2mm]\dfrac{dI_3}{dt}=-\dfrac{V_2}{L}\end{cases}$$

式中，$f(V_1)=G_1V_1+0.5(G_0-G_1)(|V_1+E|-|V_1-E|)$ 为蔡氏二极管的伏安特性函数，E 为转折点电压。$f(V_1)$ 由 3 个分段线性函数组成，如图 1-2 所示。采用双运放和 6 个线性电阻构成，如图 1-3 所示。