国家出版基金项目

NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书 —— 51

间断有限元理论与方法

（修订版）

张 铁 著

科 学 出 版 社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书　51

间断有限元理论与方法

（修订版）

张　铁　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

有限元方法是现代科学与工程计算领域中最广泛使用的数值方法之一，间断有限元方法则是传统(连续)有限元方法的创新形式、改进和发展. 本书系统地阐述间断有限元基本理论、思想和方法.

本书主要针对椭圆方程、一阶双曲方程、一阶正对称双曲方程组、对流扩散方程、Stokes 方程和椭圆变分不等式等偏微分方程定解问题，介绍各种形式间断有限元方法的构造、稳定性和误差分析、超收敛性质、后处理技术、后验误差估计和自适应计算.

本书可供高等院校计算数学、应用数学、计算物理和计算力学等专业的研究生、教师以及从事科学与工程计算工作的科技人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

间断有限元理论与方法(修订版)/张铁著. —修订本. —北京：科学出版社，2015.4

(信息与计算科学丛书 51)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-043505-7

Ⅰ. ①间… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①有限元法-研究 Ⅳ. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 039304 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：张凤琴
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 4 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 4 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：317 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

修订版前言

在本次修订中，除了改正原书中一些印刷错误和笔误外，修改和增减了如下内容:

1. 增加 2.5 节，对椭圆问题间断有限元方法导出的离散方程组的条件数进行了讨论.

2. 重写 2.5.1 节 (修订版 2.6.1 节)，采用新方法对椭圆问题间断有限元方法的后验误差估计给出更准确的论证.

3. 改写 3.2.3 节有关 Stokes 方程高次间断有限元方法的内容.

4. 改写定理 3.12 和定理 3.19 的证明，修正了个别错误.

5. 改写 5.4 节和 5.5.2 节，使这两节讨论的三角元和矩形元的超收敛估计适用于方程对流项系数为变系数情形.

6. 重写 5.7.2 节和 5.7.3 节，采用新的分析方法对一般网格导出更有效的后验误差估计.

7. 增加 6.2.3 节，讨论一阶双曲方程组间断有限元方法的负范数误差估计以及相应的超收敛估计.

8. 鉴于一阶双曲方程组的后验误差分析并不成熟，删除原书 6.6 节的内容.

9. 增加 6.8 节，介绍求解一阶双曲方程组的半显式时空间断有限元方法.

本书中有关作者本人的研究工作获得国家自然科学基金项目资助 (No. 11371081)，作者对该基金的资助和科学出版社王丽平编辑对本书修订版的支持表示感谢!

作　者

2014 年 11 月于沈阳东北大学

前　　言

有限元方法是现代科学与工程计算领域中最重要的数值方法之一, 间断有限元方法则是传统 (连续) 有限元方法的创新形式、改进和发展. 与连续有限元方法相比, 间断有限元方法具有两个显著特征: 一是容许带有悬挂点 (hanging node) 的不相容网格剖分; 二是有限元分片多项式在跨越单元交界面时没有连续性要求. 这两个特征使得间断有限元方法具有许多良好的性质. 例如, 物理守恒性质可在单元上满足, 数值解具有高分辨率; 适于处理不同介质的物理问题 (解在区域内部有间断线); 容易实现局部网格加密和各单元多项式的独立选取, 这使得有限元 hp 自适应计算更为灵活和高效; 由于各单元自由度之间的联系减弱, 它所产生的离散方程组也具有良好的并行计算结构. 这些优点已经使间断有限元方法广泛地应用于求解各类偏微分方程定解问题.

间断有限元方法起源于一阶双曲问题和椭圆边值问题两类不同问题数值方法的研究. 对于一阶双曲问题, 间断有限元方法最初由 Reed 和 Hill 在 1973 年依据迎风差分格式的思想提出, 并应用于数值模拟中子输运方程; 对于椭圆边值问题, 间断有限元方法则是由基于 Nitsche 惩罚变分形式的非协调有限元方法演化而来. 起源于两个不同途径的间断有限元方法的主要区别是: 在处理间断有限元函数跨越单元交界面的不连续性时, 前者采用数值通量 (numerical flux), 而后者则使用内部惩罚 (interior penalty) 方法. 随着研究的深入, 人们也将数值通量形式的间断有限元方法应用于求解椭圆边值问题, 并且发现基于惩罚形式和基于数值通量形式的两类间断有限元方法具有内在的等价性. 在间断有限元方法提出后的最初十几年里, 人们并没有充分认识到它相对于连续有限元方法所具有的显著优点, 从而受到冷落. 进入 20 世纪 80 年代后期, 鉴于它在数值求解一阶双曲问题上所获得的成功以及在有限元自适应计算和并行计算方面所具有的优势, 间断有限元方法重新受到人们的青睐. 此后, 间断有限元方法进入了新的发展时期, 并且成为求解各类偏微分方程主流的数值方法之一.

目前国内外有关间断有限元理论与方法的研究已经取得了丰富的成果, 学术论文层出不穷, 但遗憾的是作者本人尚没有看到论述间断有限元方法的理论专著. 此外, 作者自 20 世纪 80 年代就开始从事间断有限元方法的研究工作, 在该领域中积累了较丰富的学识和一定的学术研究成果, 作者感到有必要将本人和国内外学者的研究工作进行系统的归纳和总结, 供有关人员阅读和参考. 上述这些因素促使作者

撰写了这本著作.

本书主要针对椭圆方程、一阶双曲方程、一阶正对称双曲方程组、对流扩散方程、Stokes 方程和椭圆变分不等式等偏微分方程定解问题, 介绍各种形式间断有限元方法的构造、稳定性和误差分析、超收敛性质、后处理技术、后验误差估计和自适应计算. 本书内容主要取自作者多年来在这一领域中的研究成果, 同时也参考了国内外学者的相关工作. 限于篇幅, 本书没有介绍非线性问题 (例如, 非线性双曲守恒率) 的间断有限元方法. 有关这方面的研究工作, 读者可参考书后所引文献.

本书中有关一阶双曲问题间断有限元方法的内容是国家自然科学基金资助项目 (No.11071033) 的研究工作, 作者对该基金的资助以及科学出版社王丽平编辑对本书出版的关心和支持表示感谢!

作　者

2011 年 5 月于沈阳东北大学

目　录

第1章　预备知识

本章介绍 Sobolev 空间、有限元空间及其性质, 并简要回顾椭圆问题的连续有限元方法. 需要指出, 本章中引进的形状正则剖分概念和局部投影逼近等是专门为间断有限元方法做准备的.

1.1　Sobolev 空间简介

设 $\mathbf{R}^d$ 为 d 维欧氏空间, Ω 为 $\mathbf{R}^d$ 中的有界区域. 用 $L_p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 表示所有定义在 Ω 上 p 次可积函数组成的集合, $L_\infty(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上本性有界的(即除去一个零测度集外是有界的) 可测函数组成的集合, 则按范数

$$\|u\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$
$$\|u\|_{0,\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |u(\boldsymbol{x})| \equiv \inf_{\mathrm{meas}(E)=0} \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega\setminus E} |u(\boldsymbol{x})|, \quad p = \infty$$

$L_p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 为 Banach 空间; 而 $L_2(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v) = \int_\Omega u\, v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

用 $C^m(\Omega)$ 表示区域 Ω 上 m 次连续可微的函数组成的集合, $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无穷次可微函数组成的集合. 记

$$\mathrm{supp}(u) = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \Omega :\ u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$$

并称之为函数 u 的支集. 用 $C_0^m(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别表示由 $C^m(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$ 中一切具有紧支集的函数组成的集合.

记区域 Ω 上的偏微分算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$, 其中 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ 为非负整数, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ 称为 d 重指标, 标记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

定义 1.1　设 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为区域 Ω 上的 Lebesgue 局部可积函数空间, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 如果存在 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 使得

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \ \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

则称 v 是 u 的 α 阶广义导数, 并记为 $v = D^\alpha u$.

由变分法基本引理可知, 广义导数若存在必唯一. 又容易验证, 若 u 的古典导数存在且属于 $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 则其广义导数存在且与古典导数一致. 因此广义导数是古典导数的推广.

广义导数具有如下性质:

(1) $D^\alpha(au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$, a, b 为常数;

(2) $D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u)$;

(3) $D(uv) = uDv + vDu$;

(4) $D^\alpha u = 0$ 对一切 $|\alpha| = m$ 成立, 当且仅当 u 几乎处处等于一个 $m-1$ 次多项式.

设 m 为非负整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, u:\ D^\alpha u \in L_p(\Omega),\, |\alpha| \leqslant m \,\}$$

这个空间依范数

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}},\ \ 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{0,\infty}, \quad p = \infty$$

构成一个 Banach 空间, 称之为 Sobolev 空间; 相应的半范数为

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}},\ \ 1 \leqslant p < \infty$$

$$|u|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{0,\infty},\ p = \infty$$

又令 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包, 则 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 也是一个 Banach 空间, 它一般是 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一个真闭子空间. 当 $p = 2$ 时, 简记

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),\ \ H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2},\ \ \|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2},\ \ |\cdot|_m = |\cdot|_{m,2}$$

于是 $H^m(\Omega)(H^0(\Omega) = L_2(\Omega))$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v),\ u, v \in H^m(\Omega)$$

Sobolev 空间具有如下性质:

(1) $W^{m,p}(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 是可分的;

(2) $W^{m,p}(\Omega)(1 < p < \infty)$ 是自反和一致凸的;

(3) $\{u \in C^\infty(\Omega): \|u\|_{m,p} < \infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密; 当 Ω 的边界是局部 Lipschitz 连续时, $C^m(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

再引进负指数 Sobolev 空间. 设 $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数. 显然, 对任一 $v \in L_{p'}(\Omega)$, 可确定 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函:

$$L_v(u) = (u, v),\ u \in W^{m,p}(\Omega)$$

将此泛函的范数记为

$$\|v\|_{-m,p'} (= \|L_v\|) = \sup_{u \in W^{m,p}(\Omega)} \frac{|(u,v)|}{\|u\|_{m,p}}$$

并称之为 v 的负范数. 显然

$$|(u,v)| \leqslant \|u\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'}$$

定义负指数 Sobolev 空间:

$$W^{-m,p'}(\Omega) \equiv L_{p'}(\Omega) \text{ 按范数 } \|\cdot\|_{-m,p'} \text{ 的完备化空间}$$

可以证明 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 等距同构于对偶空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$. 当 $p' = 2$ 时, 简记

$$H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$$

1.2 嵌入定理

Sobolev 空间更深刻的性质反映为下述的嵌入定理和迹定理.

定义 1.2 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间, 如果

(1) $X \subset Y$;

(2) 将 $\boldsymbol{x} \in X$ 映为 $I\boldsymbol{x} \in Y$ 的恒同算子 I 是连续的, 即存在常数 M 使得

$$\|I\boldsymbol{x}\|_Y \leqslant M \|\boldsymbol{x}\|_X,\ \forall \boldsymbol{x} \in X$$

则称 X 嵌入 Y, 记为 $X \hookrightarrow Y$. 又称 I 为嵌入算子, M 为嵌入常数.

Sobolev 嵌入定理 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是局部 Lipschitz 连续的, m, k 为非负整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则

$$\begin{aligned}
&W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), && m < d/p,\ 1 \leqslant q \leqslant dp/(d-mp) \\
&W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), && m = d/p,\ 1 \leqslant q < \infty \\
&W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), && m > d/p
\end{aligned}$$

特别地, 下述嵌入还是紧的:

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m < d/p,\ 1 \leqslant q < dp/(d-mp)$$
$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad m = d/p,\ 1 \leqslant q < \infty$$
$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k}(\overline{\Omega}), \quad m > d/p$$

需要说明的是, $W^{m,p}(\Omega)$ 中的元素是函数的等价类, 几乎处处相等的函数归为同一等价类. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ 的含义是: 任一 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ 必等价于 $C^0(\overline{\Omega})$ 中的一个函数 (仍标记为 u), 同时存在常数 M 使得

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leqslant M\|u\|_{m,p},\ \forall\, u \in W^{m,p}(\Omega)$$

现在考虑 $H^m(\Omega)$ 中函数的边界值, 即 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹. 由于 $\partial\Omega$ 为 d 维零测度集, 而 $H^m(\Omega)$ 中函数可以在零测度集上没有定义, 因此在通常意义下讨论 u 在 $\partial\Omega$ 上的取值是没有意义的. 下面将利用 $C^m(\overline{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的稠密性, 给出 $H^m(\Omega)$ 中函数在边界上迹的确切定义.

定义 1.3　设有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in C^m(\overline{\Omega})$. 线性算子 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1}$:

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{n}^j}\Big|_{\partial\Omega},\ j = 0, 1, \cdots, m-1$$

称之为迹算子, 此处 $\dfrac{\partial^j}{\partial \boldsymbol{n}^j}$ 表示沿边界 $\partial\Omega$ 外法方向的 j 次方向导数.

引理 1.1 [1, 113]　对上述区域, 存在常数 $C(\Omega) > 0$, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C(\Omega)\|u\|_{j+1},\ \forall\, u \in C^m(\overline{\Omega}),\ 0 \leqslant j \leqslant m-1$$

现在对 $u \in H^m(\Omega)$, 取序列 $\{u_k\} \subset C^m(\overline{\Omega})$ 使得 $\|u_k - u\|_m \to 0,\ k \to \infty$. 由引理 1.1 知, $\{\gamma_j u_k\}$ 是 $L_2(\partial\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 故存在极限 $v_j \in L_2(\partial\Omega)$, 显然 v_j 与 $\{u_k\}$ 的选取无关. 现在定义 $u \in H^m(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹:

$$\gamma_j u = v_j = \lim_{k\to\infty} \gamma_j u_k,\ j = 0, 1, \cdots, m-1$$

迹嵌入定理　设有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in H^m(\Omega)$, 则存在与 u 无关的常数 $C(\Omega)$, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C(\Omega)\|u\|_{j+1},\ \forall\, u \in H^m(\Omega),\ 0 \leqslant j \leqslant m-1 \tag{1.1}$$

特别地,

$$\|u\|_{0,p,\partial\Omega} \leqslant C(\Omega)\|u\|_{1,p},\ \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 < p \leqslant \infty \tag{1.2}$$

此不等式 (通常称有嵌入 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\partial\Omega)$) 只要求 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的.

由于 $H_0^m(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化空间, 则根据迹算子的定义可有

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) : \left.\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{n}^j}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}$$

关于迹嵌入定理的更精确形式涉及分数次 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$ 为任意实数. 此时, 对任意 $u \in H^{1+s}(\Omega)$, 迹算子 $\gamma_j : H^{1+s}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \cdots, [s]$ ($[s]$ 表示不大于 s 的最大整数) 有意义, 并且

$$\|\gamma_j u\|_{\frac{1}{2}+s-j,\partial\Omega} \leqslant C(\Omega)\|u\|_{1+s},\ j = 0, 1, \cdots, [s]$$

特殊情况是: 当 $s > \dfrac{1}{2}$ 时, 可有 $H^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega)$, 并且

$$\|u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C(\Omega)\|u\|_s,\quad s > \frac{1}{2}$$

迹算子 γ_j 是 $H^{1+s}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$ 的满映射 (但不是一一对应的), 对任何 $g \in H^{\frac{1}{2}+s-j}(\partial\Omega)$, 存在 $u \in H^{1+s}(\Omega)$(与 γ_j 有关), 使 $\gamma_j u = g$ 且

$$\|u\|_{1+s} \leqslant \|\gamma_j u\|_{\frac{1}{2}+s-j,\partial\Omega},\ j = 0, 1, \cdots, [s]$$

(参见文献 [1] 定理 7.53).

最后介绍 Sobolev 空间中的两个常用的不等式.

Poincaré 不等式 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\mathrm{meas}(\Gamma) > 0$, 则存在常数 C, 使得

$$\|u\|_{1,p} \leqslant C\left(|u|_{1,p} + \left|\int_\Gamma u\,\mathrm{d}s\right|\right),\ u \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{1.3}$$

特别当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时, 此不等式给出了 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间中范数 $\|\cdot\|_{1,p}$ 与半范数 $|\cdot|_{1,p}$ 的等价性, 此时可有

$$\|u\|_{1,p} \leqslant C|u|_{1,p},\ u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{1.4}$$

内插不等式 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, $k = s(1-\theta) + m\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant m$, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_k \leqslant C\|u\|_s^{1-\theta}\|u\|_m^\theta,\ u \in H^m(\Omega) \tag{1.5}$$

进一步设 $1 < p \leqslant q < \infty$, $\alpha = d/p - d/q \leqslant 1$, 则有

$$\|u\|_{0,q} \leqslant C\|u\|_{0,p}^{1-\alpha}\|u\|_{1,p}^\alpha,\ u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{1.6}$$

这两个内插不等式取自文献 [6] 和 [14].

1.3 有限元空间及其性质

有限元方法是求解偏微分方程变分问题的一种近似方法. 变分问题的近似方法实质上就是用有限维空间近似无穷维空间, 从而将无穷维空间中求解的变分问题转化为一个有限维的近似问题. 有限维近似空间的选取方法可以有多种, 一种最常用的近似空间就是有限元空间, 它是建立在区域剖分基础上满足一定约束条件的分片多项式空间. 本节将介绍有限元空间的有关概念和知识.

1.3.1 有限元空间

在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 上建立一个剖分 $\mathcal{T}_h$: 将 $\overline{\Omega}$ 分割为有限个具有 Lipschitz 连续边界的、互不重叠且内部非空的有界闭集 $\{K\}$ 之和, 即 $\overline{\Omega} = \bigcup\{K : K \in \mathcal{T}_h\}$. K 称为剖分单元, $h = \max h_K$ 称为剖分直径, $h_K = \mathrm{diam}(K)$ 为单元直径.

定义 1.4 有限维空间 S_h 称为相应于剖分 $\mathcal{T}_h$ 的有限元空间, 如果

(1) 对每一 $K \in \mathcal{T}_h$, 集合 $P_K = \{p : p = v_h|_K, \forall v_h \in S_h\}$ 是 K 上的某一多项式函数类;

(2) 存在一个自由度集合 $\Sigma_K = \{l_j, 1 \leqslant j \leqslant N\}$(即一组线性无关的线性泛函, 它通常由插值节点和插值条件来规定), 它是 P_K 唯一可解的, 即对任意给定的一组实数 $\{\alpha_j, 1 \leqslant j \leqslant N\}$, 存在唯一的一个函数 $p \in P_K$ 满足

$$l_j(p) = \alpha_j,\ 1 \leqslant j \leqslant N$$

(3) S_h 中的函数在 Ω 上具有一定的有界性或者光滑性, 如 $S_h \subset L_2(\Omega)$, 或者 $S_h \subset C^m(\overline{\Omega}), m \geqslant 0$.

三元集合 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ 称为一个有限元.

如果自由度集合 Σ_K 中含有导数值插值条件, 则称 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$ 为 Hermite 型有限元; 反之称为 Lagrange 型有限元. 此外, 当仅有 $S_h \subset L_2(\Omega)$ 时, 称 S_h 为间断有限元空间; 而当 $S_h \subset C^m(\overline{\Omega})(m \geqslant 0)$ 时, 称 S_h 为连续有限元空间. 此时, 利用 Green 公式和广义导数定义, 可推得如下结果:

$$S_h = \{v_h \in C^m(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in P_K,\ K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^{m+1}(\Omega),\ m \geqslant 0$$

下面给出两个最简单的有限元例子.

例 1.1 三角剖分情形. 设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 可分割为有限个三角形之和, 则可建立区域 Ω 的三角剖分 $\mathcal{T}_h = \bigcup\{K\}$, K 为三角单元. 记 $P_k(K)$ 为单元 K 上总次数不超过 k 的多项式集合, 也即

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} a_{ij}x^i y^j,\ \forall p \in P_k(K)$$