SHUXUEFENXIJIANMINGJIAOCHENG

数学分析简明教程

（上册）

主　编　汪义瑞　石卫国
副主编　邵春芳　王秋芬

西南交通大学出版社

安康学院教材建设基金资助

数学分析简明教程

（上册）

主　编　汪义瑞　石卫国
副主编　邵春芳　王秋芬

西南交通大学出版社
·成　都·

前　言

“数学分析”是数学与统计学专业所含知识量最大，开课时间最长的一门课；对学生储备数学知识，端正数学思维品质，形成数学能力起着不可低估的作用. 同时数学分析知识作为载体寄寓着丰富的数学思想方法.

本教材的编写汇集了各家教学成果和经验，把握了最新内容，体现了最基本的数学理论知识，提供了灵活多样的数学思想和思维方式、解题策略等. 具体作法是：

（1）在内容选取上注重实用性；

（2）充分运用了作者在科研和教学中获得的新观点、新方法和新材料；

（3）通过提出更多更新的问题或课题，给读者以广泛的思维空间和探究的机会；

（4）引入建模常用知识点，并将之融入现代技术、现代管理、生态环境及生活应用中的例子.

本教材的编写考虑了学生的接受能力，在编排与写法上坚持可接受性原则，增强了教材的可读性，便于学生自学.

本书分上、下两册，上册包含：实数集与函数、数列极限、函数极限、函数连续性、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、非正常积分等九章；下册包含：数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限和连续、多元函数的微分学、隐函数定理及其应用、曲线积分、重积分、曲面积分等九章. 书中标有*的内容为选学内容.

本书由汪义瑞、石卫国担任主编；邵春芳、王秋芬担任副主编. 第一章、第二章、第九章至第十五章由汪义瑞编写；第三章至第六章由石卫国编写；第七章、第八章由王秋芬编写；第十六章至第十八章由邵春芳编写.

本书由安康学院教材建设基金资助出版.

由于水平所限，难免存在不足与错误之处，恳切读者批评指正.

编　者

2014 年 3 月

目　录

第一章 实数集与函数

在自然科学、工程技术, 甚至某些社会科学中, 函数是被广泛应用的数学概念之一, 是数学分析这门课程研究的对象.

第一节 实 数

本节包括实数及其性质、绝对值与不等式两部分内容, 简要介绍实数的无限十进制表示、大小关系、性质, 并介绍绝对值及实数绝对值的有关性质.

一、实数及其性质

1. 实 数

在中学, 我们知道实数由有理数与无理数组成. 有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p,q 为整数且 $q\neq 0$) 表示, 或用有限十进制小数或无限十进制循环小数表示; 无理数可用无限十进制不循环小数表示.

例 1 设 a 为有理数, x 为无理数, 证明 $a+x$ 是无理数.

证明 反证法. 设 $a+x$ 是有理数, 则设 $a+x=\frac{n}{m}$ (m,n 为整数且 $m\neq 0$). 由于 a 为有理数, 则设 $a=\frac{p}{q}$ (p, q 为整数且 $q\neq 0$). 于是

$$x=\frac{n}{m}-\frac{p}{q}=\frac{nq-mp}{mq}\ (\ mq, nq-mp \text{ 为整数且 } mq\neq 0\ ),$$

所以 x 是有理数, 这与 x 为无理数矛盾. 因此 $a+x$ 是无理数.

2. "有限小数"的表示

"有限小数"(包括整数)也可以表示为"无限小数".

(1) 正有限小数(包括正整数): $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时, 其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9$, $i=1,2,\cdots n, a_n\neq 0$, a_0 为非负整数, a_i 为整数, 记为 $x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\,9\cdots$,

例如, $x=2.001$ 记为 $x=2.000\,999\,9\cdots$;

(2) 正整数: $x=a_0$ 时, 记为 $x=(a_0-1).999\,9\cdots$,

例如, $x=2$ 记为 $x=1.999\,9\cdots$;

(3) 负有限小数(包括负整数): y, 需先将 $-y$ 表示为无限小数, 再在所得无限小数前加负号.

例如, -8 记为 $-7.999\,9\cdots$;

(4) 规定: 数 0 表示为 $0.000\,0\cdots$.

因此, 任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

3. 两实数的大小关系

定义 1.1 (1) 给定两个非负实数 $x=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1\cdots b_n\cdots$, 其中 a_0,b_0 为非负整数,

$a_k, b_k\ (k=1,2,\cdots)$ 为整数，$0 \leqslant a_k \leqslant 9,\ 0 \leqslant b_k \leqslant 9$．若有 $a_k=b_k, k=0,1,2,\cdots$，则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$．

(2) 若 $a_0>b_0$ 或存在非负整数 l，使得 $a_k=b_k, k=0,1,2,\cdots,l$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则称 x 大于 y 或 y 小于 x，分别记为 $x>y$ 或 $y<x$．

(3) 对于负实数 x,y，若按上述规定分别有 $-x=-y$ 或 $-x>-y$，则分别称为 $x=y$ 与 $x<y$（或 $y>x$）．

任何非负实数大于任何负实数.

4. 不足近似与过剩近似

定义 1.2 (1) 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数，称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n **位不足近似**；

(2) 有理数 $\overline{x}_n=a_0.a_1a_2\cdots(a_n+1)=x_n+\dfrac{1}{10^n}$ 称为 x 的 n **位过剩近似**；

(3) 对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots(a_n+1)=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n} \quad 与 \quad \overline{x}_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

例 2 若 $x=1.4142\cdots$，则

$$x_1=1.4,\ x_2=1.41,\ x_3=1.414,\ x_4=1.4142$$

$$\overline{x}_1=1.5,\ \overline{x}_2=1.42,\ \overline{x}_3=1.415,\ \overline{x}_4=1.4143\cdots$$

注 (1) $x_n \leqslant x \leqslant \overline{x}_n$（其中 x_n 为 x 的 n 位不足近似，$\overline{x}_n$ 为 x 的 n 位过剩近似）;

(2) 实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减，即有 $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$；过剩近似 $\overline{x}_n$ 当 n 增大时不增，即有 $\overline{x}_0 \geqslant \overline{x}_1 \geqslant \overline{x}_2 \geqslant \cdots$.

5. 等价命题

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 为两个实数，则 $x>y$ 的等价条件是：存在非负整数 n，使得 $x_n>\overline{y}_n$，（其中 x_n 为 x 的 n 位不足近似，$\overline{y}_n$ 为 y 的 n 位过剩近似）.

例 3 设 x,y 为实数，$x<y$，证明存在有理数 r，满足 $x<r<y$.

证明 由于 $x<y$，故存在非负整数 n，使得 $\overline{x}_n<y_n$．令 $r=\dfrac{1}{2}(\overline{x}_n+y_n)$，则 r 为有理数，且

$$x \leqslant \overline{x}_n<r<y_n \leqslant y,$$

即

$$x<r<y.$$

为方便，将全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，即 $\mathbf{R}=\{x \mid x 为实数\}$.

6. 实数的性质

(1) 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是**封闭**的，即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为 0）仍然是实数.

(2) 实数集是**有序**的，即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一：$a<b,\ a>b,\ a=b$.

(3) 实数的大小关系具有**传递性**，即若 $a>b,\ b>c$，则有 $a>c$.

(4) 实数具有**阿基米德**（Archimedes）**性**，即对任何 $a,b \in \mathbf{R}$，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

(5) 实数集 $\mathbf{R}$ 具有**稠密性**，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

(6) 实数集与数轴上的点**一一对应**.

例 4 设 $a,b \in \mathbf{R}$，证明：若对任何正数 ε，有 $a<b+\varepsilon$，则 $a \leqslant b$.

证明　反证法. 若结论不成立，则根据实数集的有序性，有 $a>b$. 令 $\varepsilon=a-b$，则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$，这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a\leqslant b$.

二、绝对值与不等式

1. 绝对值的定义

实数 a 的绝对值定义为：$|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

注　$|a|=\sqrt{a^2}$.

2. 几何意义

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离，$|x-a|$ 表示数轴上点 x 与 a 之间的距离.

3. 性　质

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$；$|a|=0\Leftrightarrow a=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h\ (h>0)$.

(4) 三角不等式：对任何 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

(5) $|ab|=|a|\cdot|b|$.

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

4. 几个重要不等式

(1) 均值不等式：$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$；$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\ a,b\geqslant 0$.

推广：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$. 对任何 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集合)，等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立. 即

算术平均值≥几何平均值≥调和平均值.

(2) Bernoulli 不等式：$(1+x)^n>1+nx,\ (n>1,x>0)$.

证明　对任何 $x>0$，由二项展开式知

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+x^n\Rightarrow(1+x)^n>1+nx,\ (n>1).$$

习题一

1. 试在数轴上表示出下列不等式的解.

(1) $x(x^2-1)>0$；　　(2) $|x-1|<|x-3|$.

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，证明：若对任何正数 ε，有 $|a-b|<\varepsilon$，则 $a=b$.

3. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$（$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集合）. 证明：$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$. 你能说明此不等式的几何意义吗？

第二节 数集和确界原理

一、区间与邻域

1. 区 间

设 $a,b\in\mathbf{R}$, 且 $a<b$, 我们称介于 a 与 b 之间所有的实数构成的集合为区间, a 与 b 称为这个区间的端点, 不含两个端点的区间称为开区间, 记为 (a,b); 含两个端点的区间称为闭区间, 记为 $[a,b]$; 含有一个端点的区间称为半开半闭区间, 记为 $[a,b),(a,b]$. 仿此可以界定无限区间, 这里不一一赘述, 下面给出区间的分类. 这里 ∞ 读作无穷大.

$$
\text{区间}\begin{cases}
\text{有限区间}\begin{cases}
\text{开区间}: (a,b)=\{x\mid a<x<b\}.\\
\text{闭区间}: [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.\\
\text{半开半闭区间}\begin{cases}[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.\\(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无限区间}\begin{cases}
[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}.\\
(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}.\\
(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}.\\
(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}.\\
\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.
\end{cases}
\end{cases}
$$

2. 邻 域

邻域是一种特殊的区间.

(1) **点 a 的 δ 邻域**: 设 $a\in\mathbf{R}$, $\delta>0$, 满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a;\delta)$, 或简记为 $U(a)$, 即

$$U(a;\delta)=\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

(2) **点 a 的空心 δ 邻域**:

$$\mathring{U}(a;\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-a|<\delta\},$$

简记为 $\mathring{U}(a)$.

另外, 我们还会遇到单侧邻域.

点 a 的 δ 右邻域: $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$, 简记为 $U_+(a)$.

点 a 的空心 δ 右邻域: $\mathring{U}_+(a;\delta)=(a,a+\delta)$, 简记为 $\mathring{U}_+(a)$.

点 a 的 δ 左邻域: $U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$, 简记为 $U_-(a)$.

点 a 的空心 δ 左邻域: $\mathring{U}_-(a;\delta)=(a-\delta,a)$, 简记为 $\mathring{U}_-(a)$.

二、有界集 · 确界原理

1. 有界集

定义 2.1 设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集, 若存在实数 $M(L)$, 使得对一切 $x\in S$ 都有

$$x\leqslant M\ (x\geqslant L),$$

则称 S 为**有上（下）界的数集**, 数 $M(L)$ 称为 S 的**上界（下界）**. 若数集 S 既有上界, 又有下界, 则称 S 为**有界集**; 若 S 不是有界集, 则称 S 为**无界集**; 若 S 既有上界又有下界, 则称 S 有界.

注 引进记号: 存在 $\exists$, 任意 $\forall$, 则有:

(1) S有上界的充要条件是$\exists M, \forall x \in S$, 有$x \leqslant M$；

(2) S有下界的充要条件是$\exists L, \forall x \in S$, 有$x \geqslant L$；

(3) S有界的充要条件是$\exists M>0, \forall x \in S$, 有$|x| \leqslant M$；

(4) S无上界的充要条件是$\forall M, \exists x_0 \in S$, 使得$x_0 > M$；

例 1　证明：数集$\mathbf{N}_+ = \{n \mid n$为正整数$\}$有下界无上界.

证明　显然，对任取的$n \in \mathbf{N}_+$，都有$n \geqslant 1$，所以$\mathbf{N}_+$有下界1；

对任何正数M，取$n_0 = [M]+1$，则$n_0 \in \mathbf{N}_+$，且$n_0 > M$，即$\mathbf{N}_+$无上界 ($[M]$表示不超过数M的最大整数，例如，$[3.9]=3$).

2. 数集的上确界和下确界

若数集S有上界，则显然它有无穷多个上界，而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集S的上确界.

同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界.

定义 2.2　设S为$\mathbf{R}$中的一个数集. 若数η满足：

(i) 对一切$x \in S$, 有$x \leqslant \eta$，即η是S的上界；

(ii) 对任何$\alpha < \eta$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$，即η是S的最小上界（比η小的数就不是上界），则称数η为数集S的**上确界**，记作$\eta = \sup S$.

定义 2.3　设S为$\mathbf{R}$中的一个数集. 若数ξ满足：

(i) 对一切$x \in S$, 有$x \geqslant \xi$，即ξ是S的下界；

(ii) 对任何$\beta > \xi$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 < \beta$，即ξ是S的最大下界（比ξ大的数就不是S的下界），则称数ξ为数集S的**下确界**，记作$\xi = \inf S$.

上确界与下确界统称为**确界**.

例 2　设$S = \{x \mid x$为区间$(0,1)$中的有理数$\}$，试按上、下确界的定义验证：$\sup S = 1, \inf S = 0$.

分析　要证$\sup S = 1$，首先要证1是上界，即证$\forall x \in S$, 有$x \leqslant 1$，这是显然成立的. 其次要证1是最小的上界，即证比1小的不是上界. 即要证对任何$\forall \alpha < 1$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$. 若$\forall \alpha \leqslant 0$，则任取$x_0 \in S$都有$x_0 > \alpha$；若$0 < \alpha < 1$，（要$x_0 \in S = \{x \mid x$为区间$(0,1)$中的有理数$\}$，又要$x_0 > \alpha$，即在$(\alpha, 1)$中找，有理数$x_0$，这由稠密性保证）则由有理数在实数集中的稠密性知，在$(\alpha,1)$中必有有理数x_0，即存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$.

证明　下面证明$\sup S = 1$.

(1) $\forall x \in S$, 显然有$x \leqslant 1$，即1是上界.

(2) $\forall \alpha < 1$，若$\forall \alpha \leqslant 0$，则任取$x_0 \in S$都有$x_0 > \alpha$；若$0 < \alpha < 1$，则由有理数在实数集中的稠密性知，在$(\alpha,1)$中必有有理数$x_0$，即存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$.

类似地可验证$\inf S = 0$.

注　(1) 由上（下）确界的定义可见，若数集S存在上（下）确界，则一定是唯一的. 又若数集S存在上、下确界，则有$\inf S \leqslant \sup S$.

(2) 从上面一些例子可见，数集S的确界可能属于S，也可能不属于S. 例如，$S = \left\{x \mid x = \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}_+\right\}$的上确界1就不属于该数集.

例 3　设数集S有上确界，证明$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S$.

证明　$(\Rightarrow)$设$\eta = \sup S \in S$，则η是上界，即对一切$x \in S$有$x \leqslant \eta$，而$\eta \in S$，故η是数集S中最大的数，即$\eta = \max S$.

$(\Leftarrow)$设$\eta = \max S$，则$\eta \in S$，下面验证$\eta = \sup S$：

(1) 对一切$x \in S$有$x \leqslant \eta$，即η是S的上界；

(2) 对任何 $\alpha<\eta$，只需取 $x_0=\eta\in S$，则有 $x_0>\alpha$，即 η 是 S 的最小上界.

因此 $\eta=\sup S$.

3. 确界原理

有了确界概念，就可将实数的完备性叙述成下面的定理.

定理 2.1（确界原理） 设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

注 非空有界数集一定有上下确界，但不一定有最大值最小值.

例 4 设 A,B 为非空数集，且满足：对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$ 有 $x\leqslant y$，试证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，且 $\sup A\leqslant\inf B$.

证明 (1) $\forall x\in A$，在 B 中任取元素 y，有 $x\leqslant y\Rightarrow A$ 有上界 $\Rightarrow A$ 有上确界.

(2) $\forall y\in B$，在 A 中任取元素 x，有 $y\geqslant x\Rightarrow B$ 有下界 $\Rightarrow B$ 有下确界.

(3) $\forall x\in A$ 和 $\forall y\in B$ 有 $x\leqslant y\Rightarrow y$ 是 A 的上界；再由 $\forall y\in B\Rightarrow B$ 中任何 y 都是 A 的上界，而 $\sup A$ 是数集 A 中最小的上界，故有 $\sup A\leqslant y$. 此时有 $\forall y\in B$，$y\geqslant\sup A\Rightarrow\sup A$ 是数集 B 的一个下界. 而 $\inf B$ 是 B 中最大的下界，故 $\sup A\leqslant\inf B$.

例 5 设 A,B 为非空有界数集，$S=A\cup B$，证明：

(1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$； (2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证明 (2) 由 A,B 有界，则 $S=A\cup B$ 有界，由确界原理知 $\inf S$ 存在.

一方面，$\forall x\in S$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，由 $\inf A$ 和 $\inf B$ 分别是 A 和 B 的下界，有

$$x\geqslant\inf A\quad\text{或}\quad x\geqslant\inf B\Rightarrow x\geqslant\min\{\inf A,\inf B\}.$$

即 $\min\{\inf A,\inf B\}$ 是数集 S 的下界. 由 $\inf S$ 是数集 S 的最大下界，因此有

$$\inf S\geqslant\min\{\inf A,\inf B\}.$$

另一方面，$\forall x\in A$，有 $x\in S$，因此有 $x\geqslant\inf S$，即 $\inf S$ 是 A 的下界. 而 $\inf A$ 是 A 中最大的下界，因此有 $\inf A\geqslant\inf S$. 同理有 $\inf B\geqslant\inf S$. 于是有

$$\inf S\leqslant\min\{\inf A,\inf B\}.$$

综上，有 $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

(1) 可类似证明.

习题二

1. 用区间表示下列不等式.

(1) $|x|>3$； (2) $|1-x|-x\geqslant 0$； (3) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(4) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a,b,c 为常数，且 $a<b<c$).

2. 证明：(1) 任何有限区间都是有界集；(2) 无限区间都是无界集；(3) 由有限个数组成的数集是有界集.

3. 设 A,B 为非空有界数集，$A\subseteq B$，则 $\sup A$ 与 $\sup B$ 有什么关系？并证明.

4. 求下列集合的上、下确界，并用定义加以验证.

(1) $S=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n}{n+1},n\in\mathbf{N}_+\right\}$； (2) $S=\left\{x\,\middle|\,x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$；

(3) $S=\{x\,|\,x$ 为 $(1,2)$ 内的无理数$\}$； (4) $E=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$.

第三节　函　数

关于函数概念，在中学数学中我们已有初步的了解，本节对此作进一步的讨论.

一、函数概念

1. 函数的定义

定义 3.1　给定两个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，使对 D 内每一个数 x，都有唯一的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$\begin{aligned} f:D&\to M,\\ x&\mapsto y. \end{aligned} \tag{1}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**，x 所对应的数 y 称为 f 在点 x 的**函数值**，常记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}(\subset M)$$

称为函数 f 的**值域**.

2. 几点说明

(1) 函数定义的记号中“$f:D\to M$”表示按法则 f 建立 D 到 M 的函数关系，$x\mapsto y$ 表示这两个数集中元素之间的对应关系，也记作 $x\mapsto f(x)$. 习惯上称 x **自变量**，y 为**因变量**.

(2) 当对应法则和定义域确定后，值域便自然确定下来. 因此，函数的基本要素有两个：定义域和对应法则. 所以函数也常表示为：$y=f(x),x\in D$. 由此，说两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则.

例如，① $f(x)=1,x\in\mathbf{R}$；$g(x)=1,x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.（不相同，对应法则相同，但定义域不同）.

② $\varphi(x)=|x|,x\in\mathbf{R}$；$\psi(x)=\sqrt{x^2},x\in\mathbf{R}$.（相同，只是对应法则的表达形式不同）.

(3) 函数用公式法（解析法）表示时，函数的定义域常取使该运算式子有意义的自变量的全体，通常称为**存在域**（自然定义域）. 此时，函数的记号中的定义域 D 可省略不写，而只用对应法则 f 来表示一个函数. 即“函数 $y=f(x)$”或“函数 f”. 若是具有实际意义的函数，它的定义域要满足实际意义.

(4) 从“映射”的观点来看，函数 f 本质上是**映射**，对于 $a\in D$，$f(a)$ 称为映射 f 下 a 的**象**. a 称为 $f(a)$ 的**原象**.

(5) 函数定义中，$\forall x\in D$，只能有唯一的一个 y 值与它对应，这样定义的函数称为“**单值函数**”；若对同一个 x 值，可以对应多于一个 y 值，则称这种函数为**多值函数**. 本书中只讨论单值函数（简称函数）.

二、函数的表示法

1. 主要方法

解析法（公式法）、列表法和图像法.

2. 可用“特殊方法”来表示的函数

（1）**分段函数**：在定义域的不同部分用不同的公式来表示.

例 1　$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$ 是分段函数，称为**符号函数**（见图 1.1）. 如 $f(x)=|x|=x\operatorname{sgn}x$.

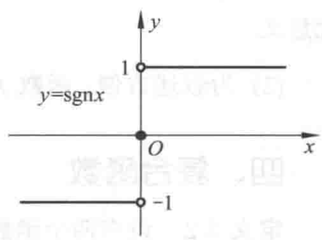

图 1.1

（2）**用语言叙述的函数**.（注意：以下函数不是分段函数）

例 2 $y=[x]$（取整函数）(见图 1.2)．如：$[3.5]=3$，$[-3.5]=-4$．

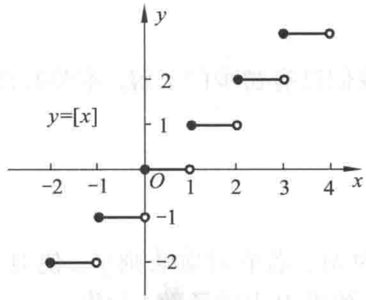

图 1.2

常有：$[x]\leqslant x<[x]+1$ 及 $x-1<[x]\leqslant x$．

注 对应的 $\{x\}=x-[x]$ 是一个函数（见图 1.3）．

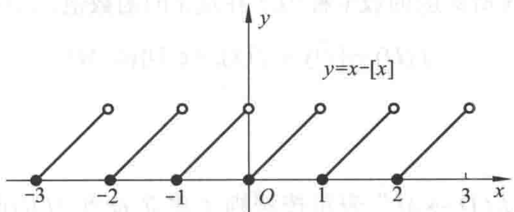

图 1.3

例 3 狄利克雷（Dirichlet）函数：$D(x)=\begin{cases}1, \text{当} x \text{为有理数},\\ 0, \text{当} x \text{为无理数}.\end{cases}$

例 4 黎曼（Riemman）函数：$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{当} x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}_+, \dfrac{p}{q} \text{为既约真分数}\right),\\ 0, \text{当} x=0,1 \text{和} (0,1) \text{内的无理数}.\end{cases}$

三、函数的四则运算

给定两个函数 $f, x\in D_1$, $g, x\in D_2$，记 $D=D_1\bigcap D_2$，并设 $D\neq\varnothing$(见图 1.4)．定义 f 与 g 在 D 上的和、差、积运算如下：

$$F(x)=f(x)+g(x), x\in D\text{；}$$
$$G(x)=f(x)-g(x), x\in D\text{；}$$
$$H(x)=f(x)g(x), x\in D.$$

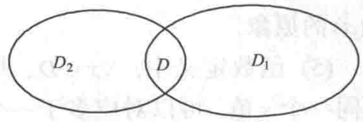

图 1.4

若在 D 中除去使 $g(x)=0$ 的值，即令 $D^*=D\setminus\{x|g(x)\neq 0, x\in D_2\}\neq\varnothing$，可在 D^* 上定义 f 与 g 的商运算如下：

$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D^*.$$

注 (1) 若 $D=D_1\bigcap D_2=\varnothing$，则 f 与 g 不能进行四则运算．如 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x^2-4}$，$f(x)+g(x)$ 无意义．

(2) 为叙述方便，函数 f 与 g 的和、差、积、商常分别写为：$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$．

四、复合函数

定义 3.2 设有两个函数 $y=f(u), u\in D$, $u=g(x), x\in E$，记 $E^*=\{x|g(x)\in D\}\bigcap E$，若 $E^*\neq\varnothing$，则对每

一个 $x\in E^*$，通过 g 对应 D 内唯一一个值 u，而 u 又通过 f 对应唯一一个值 y，这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，它以 x 为自变量，y 因变量，记作

$$y=f(g(x)),x\in E^* \quad 或 \quad y=(f\circ g)(x),x\in E^*.$$

简记为 $f\circ g$. 称为函数 f 和 g 的**复合函数**，并称 f 为**外函数**，g 为**内函数**，u 为**中间变量**.

例 5 函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u\in D=[0,+\infty)$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2$, $x\in E=\mathbf{R}$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2} \quad 或 \quad (f\circ g)(x)=\sqrt{1-x^2},$$

其定义域 $E^*=[-1,1]\subseteq E$.

复合函数也可由多个函数相继复合而成. 例如，由三个函数 $y=\sin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$,（它们的定义域取为各自的存在域）相继复合而得的复合函数为 $y=\sin\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$.

注 (1) 当且仅当 $E^*\neq\varnothing$（即 $D\cap g(E)\neq\varnothing$ 时），函数 f 与 g 才能进行复合. 例如，以 $y=f(u)=\arcsin u$, $u\in D=[-1,1]$ 为外函数，$u=g(x)=2+x^2, x\in E=\mathbf{R}$ 为内函数，就不能复合. 这是因为外函数的定义域 $D=[-1,1]$ 与内函数的值域 $g(E)=[2,+\infty)$ 不相交.

(2) 不仅能够将若干个简单函数复合，而且还要善于将复合函数分解为若干个简单函数. 例如，函数 $y=\log_a\sqrt{1-x^2}, x\in(0,1)$ 是简单函数 $y=\log_a u$, $u=\sqrt{z}$, $z=1-x^2$ 复合而成的函数.

五、反函数

在函数 $y=f(x)$ 中把 x 叫做自变量，y 叫做因变量. 但需要指出的是，自变量与因变量的地位并不是绝对的，而是相对的，例如：$f(u)=\sqrt{u}$, $u=t^2+1$, 那么 u 对于 f 来讲是自变量，但对 t 来讲，u 是因变量.

习惯上说函数 $y=f(x)$ 中 x 是自变量，y 是因变量，是基于 y 随 x 的变化而变化. 但有时我们不仅要研究 y 随 x 的变化状况，也要研究 x 随 y 的变化的状况. 对此，我们引入反函数的概念.

定义 3.3 设函数 $y=f(x), x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，D 中有且只有一个值 x，使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的**反函数**，记作

$$f^{-1}:f(D)\to D,(y\mapsto x) \quad 或 \quad x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

注 (1) 由反函数的定义不难看到，反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域.

(2) 并不是任何函数都有反函数. 从映射的观点看，函数 f 有反函数，意味着 f 是 D 与 $f(D)$ 之间的一个一一映射，称 f^{-1} 为映射 f 的**逆映射**. 它把集合 $f(D)$ 映射到集合 D，即把 $f(D)$ 的每个值 $f(a)$ 对应到 D 中唯一的一个值 a. 这时称 a 为逆映射 f^{-1} 下 $f(a)$ 的象，而 $f(a)$ 则是 a 在逆映射 f^{-1} 下的原象.

从上述讨论还可看到，函数 f 也是函数 f^{-1} 的反函数，或者说，f 与 f^{-1} 互为反函数，并有

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,x\in D, \quad f(f^{-1}(x))\equiv y,y\in f(D).$$

(3) 在反函数 f^{-1} 的表示式中，是以 y 为自变量，x 为因变量. 若按习惯仍用 x 作为自变量的记号，y 作为因变量的记号，则函数 $y=f(x)$ 的反函数可改写为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D).$$

六、初等函数

1. 基本初等函数

常量函数: $y=C$（C 为常数）;

幂函数: $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$;

指数函数: $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$;

对数函数: $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$;

三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$;

反三角函数: $y=\arcsin x$(反正弦函数), $y=\arccos x$(反余弦函数),

$y=\arctan x$(反正切函数), $y=\operatorname{arc}\cot x$(反余切函数).

2. 初等函数

定义 3.4 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数, 统称为**初等函数**. 不是初等函数的函数, 称为**非初等函数**, 如在本节给出的狄利克雷函数和黎曼函数, 都是非初等函数.

习题三

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}+\sqrt{x-1}$;　(2) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$;　(3) $y=\lg(\lg x)$;

(4) $y=\lg\left(\arcsin\dfrac{x}{10}\right)$;　(5) $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^{2}}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant1,\\ -2, 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

3. 试作下列函数的图像.

(1) $y=(x+1)^{2}$;　(2) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$;　(3) $y=\begin{cases}3x, |x|>1,\\ x^{3}, |x|<1,\\ 3, |x|=1.\end{cases}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x-3, x\geqslant10,\\ f[f(x+5)], x<10.\end{cases}$ 求 $f(5)$.

5. (1) 已知 $f(1-x)=x^{2}+x+1$, 求 $f(x)$.　(2) 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^{2}+\dfrac{1}{x^{2}}$, 求 $f(x)$.

6. 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=1-x^{2}$, 求 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$, 并求其定义域.

第四节　具有某些特性的函数

在本节, 我们将介绍以后常用的几类具有某些特性的函数, 如有界函数、单调函数、奇偶函数与周期函数. 其中, 有些概念在中学里已经叙述过, 这里只是简单地提一下. 与"有界集"的定义类似, 先谈谈有上界函数和有下界函数.

一、有界函数

定义 4.1 设 f 为定义在 D 上的函数, 若存在数 $M(L)$, 使得对每一个 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant M\ (f(x)\geqslant L),$$

则称 f 为 D 上的**有上(下)界函数**, $M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上(下)界.

定义 4.2 设 f 为定义在 D 上的函数. 若存在正数 M, 使得对每一个 $x\in D$ 有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 f 为 D 上的**有界函数**.

注 (1) f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(D)$ 是一个有界集 $\Leftrightarrow$ f 在 D 上既有上界又有下界;

(2) 几何意义: f 为 D 上的有界函数, 则 f 的图像完全落在 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如, 正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有界函数, 因为对任意一个 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$.

定义 4.3 设 f 为定义在 D 上的函数, 若对任何 M(无论 M 多大), 都存在 $x_0\in D$, 使得 $f(x_0)>M$, 则称 f 为 D 上的**无上界函数**.

例 1 证明: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无上界函数.

证明 对任何正数 M, 取 $(0,1]$ 上一点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$, 则有 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$. 故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无上界函数.

二、单调函数

定义 4.4 设 f 为定义在 D 上的函数, $\forall x_1,x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时,

(1) 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的**增函数**; 若 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的**严格增函数**.

(2) 若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的**减函数**; 若 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的**严格减函数**.

例 2 证明: $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增函数.

证明 因为对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时总有

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=(x_2-x_1)\left(\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right)>0,$$

即 $x_1^3<x_2^3$, 即 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增函数.

例 3 讨论函数 $y=[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性.

证明 函数 $y=[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上增. 因为当 $x_1<x_2$ 时显然有 $[x_1]\leqslant[x_2]$. 但在 $\mathbf{R}$ 上不是严格增的, 若取 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_1<x_2$, 但 $[x_1]=[x_2]=0$.

严格单调函数的图像与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点, 这一特性保证了它必定具有反函数.

定理 4.1 设 $y=f(x),x\in D$ 为严格增(减) 函数, 则 f 必有反函数 f^{-1}, 且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)函数.

证明 设 f 在 D 上严格增, 则对任一 $y\in f(D)$, 有 $x\in D$ 使 $f(x)=y$. 下面证明这样的 x 只能有一个.

事实上, 对于 D 内任一 $x_1\neq x$, 由 f 在 D 上的严格增性, 当 $x_1<x$ 时 $f(x_1)<y$; 当 $x_1>x$ 时有 $f(x_1)>y$, 总之 $f(x_1)\neq y$. 这说明, 对每一个 $y\in f(D)$, 都只存在唯一的一个 $x\in D$, 使得 $f(x)=y$, 从而函数 f 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, $y\in f(D)$.

现证 f^{-1} 也是严格增的. 任取 $y_1,y_2\in f(D)$, $y_1<y_2$. 设 $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$, 则 $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$. 由 $y_1<y_2$ 及 f 的严格增性, 显然有 $x_1<x_2$, 即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1} 是严格增的.

例 4 证明 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 严格递增.

证明 当 $x_1<x_2$ 时,

$$\sin x_2-\sin x_1=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)-\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

则 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有反函数，记为 $\arcsin x$．由原函数的定义域是反函数的值域，原函数的值域是反函数的定义域，因此 $\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$．

三、奇函数和偶函数

定义 4.5 设 D 为对称于原点的数集，f 为定义在 D 上的函数．若对每一个 $x\in D$ 有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为 D 上的**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 f 为 D 上的**偶函数**．

从函数图形上看，奇函数的图像关于原点对称（中心对称），偶函数的图像关于 y 轴对称．

例 5 讨论函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性．

解 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，显然定义域是对称区间．又

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

则 $f(x)$ 为奇函数．

四、周期函数

定义 4.6 设 f 为定义在数集 D 上的函数，若存在常数 $T>0$，使得对一切 $x\in D$ 有

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 f 为**周期函数**，T 称为 f 的一个**周期**．

注 (1) 若 σ 是 f 的周期，则 $n\sigma(n\in\mathbf{N}_+)$ 也是 f 的周期，所以周期若存在，则不唯一．若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期，则称此最小周期为 f 的**基本周期**，简称**周期**．

(2) $y=C$ (C 为常数)，任何正数都是它的周期，但不存在最小周期．

例 6 证明 $f(x)=x-[x]$ 的周期为 1（见图 1.3）．

证明 因为 $[x+1]=[x]+1$，因此

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=f(x),$$

则 $f(x)=x-[x]$ 的周期为 1．

习题四

1. 举一个反例说明周期函数不一定有最小正周期．

2. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}(0\leqslant x<+\infty)$ 的单调性和有界性．

3. 判别下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$；　　(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$．

4. 下列函数那些是周期函数？若是周期函数，指出其周期．

(1) $\cos(x-2)$；　(2) $2+\sin x$；　(3) $x\cos x$；　(4) $\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{3}$．

5. 设函数 f 定义在 $[-a,a]$ 上，证明 f 可表示为某个奇函数与偶函数之和．