offcn中公·考研

最新 2016 二维码版

考研数学

真题精讲

20年真题分类精讲（数学一）

全国硕士研究生招生考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司

offcn 中公·考研

考研数学

20年真题分类精讲
(数学一)

全国硕士研究生招生考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·20年真题分类精讲. 数学一 / 全国硕士研究生招生考试研究委员会编著. —北京:世界图书出版公司北京公司，2015.3

ISBN 978-7-5100-9489-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学-研究生-招生考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第053805号

考研数学·20年真题分类精讲(数学一)

编　　著：全国硕士研究生招生考试研究委员会
责任编辑：夏　丹　孙志荣
装帧设计：中公教育图书设计中心

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(地址：北京朝内大街137号　邮编：100010　电话：64077922)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：三河市海新印务有限公司

开　　本：850mm×1168mm　1/16
印　　张：24.5
字　　数：588千
版　　次：2015年5月第1版　2015年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5100-9489-7　　**定　价**：45.00元

如有质量或印装问题，请拨打售后服务电话010－82838515

亲爱的读者，本书中的二维码为对应的题目视频讲解，只要扫一扫码，就可以听中公名师讲解，提高学习效率。建议在 Wi－Fi 环境下观看。

分类研究真题是考研数学提分的有效途径

科目分类复习　体系分类掌握　考点分类攻克

近几年，考研竞争日趋激烈，且备考难度也在逐年上升。考研数学（一）难，主要由于其包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个科目，每个科目又可分为多个知识体系，每个知识体系又包含众多考点，考生既需要综合复习，又需单独进行分类复习。另外，虽然考研数学试卷题量不大，一共 23 道题目，但 150 分的总分值使得每道题分值很高，考生一旦复习不到位，很容易丢分。所以考研想要获得高分，一定要有效提高数学分数。

为了实现考研数学有效提分，考生要了解考研数学的试题特点和命题规律，最好的途径就是研究历年真题。经研究发现，在历年真题中，考研数学命题重心和考查方向相对稳定，很多核心考点经常被考查，因此本书对 1996 年 ～ 2015 年共 20 年的真题按照科目、体系、考点分类，各个突破，帮助考生在较短时间内有效提高考研数学分数。

科目分类复习

考研数学（一）包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个科目，所占试卷分值比例分别为 56%、22%、22%。由于三个科目各具特点，因此针对不同科目需要采取不同的复习方法。

高等数学复习难度相对较大，所含考点较多，需要记忆的定理和公式较复杂，而且题型变化多端。考生在复习该学科时，不仅需要牢记相关定理和公式，还需通过研究真题把握不同题型的考查核心，以不变应万变。

线性代数知识点之间的综合性较强，几乎没有需要记忆的定理和公式，但计算量相对较大，考生需要在理清整个学科知识体系的前提下通过练习巩固做题思路。

概率论与数理统计复习难度相对高等数学要小很多，计算过程也没有线性代数复杂，考生复习时只需重点记忆常用的公式，熟悉解题步骤。

总之，考研数学(一)三个科目之间交叉内容少，且考试的题目不会跨科考查。所以，复习考研数学(一)要分科目进行。因此，本书按科目分为三篇，帮助考生根据各个科目的特点有针对性地复习。

体系分类掌握

考研数学(一)的三个科目中，每个科目都可以分成多个知识体系，不同的知识体系考查的侧重点不同。因此考生在掌握了不同科目的特点之后，应该将每个科目分体系复习，并将考研数学真题按照不同体系分类研究。

将每个科目分体系复习，能使考生清楚掌握科目的重点。例如，高等数学的体系分类相对复杂，依据历年考查情况可以分为九个知识体系。

下表是高等数学的体系分类以及每个体系在20年内的出题频率，根据下表可以看出，多元函数积分学被考查了54次，而向量代数和空间解析几何只考查了5次。考生在复习高等数学时，考查次数少的知识可以简单掌握，而考查次数多的知识需要重点掌握。

1996年～2015年(数学一)高等数学体系分类及出题频率

体系	函数、极限与连续	一元函数微分学	一元函数积分学	中值定理	向量代数和空间解析几何	多元函数微分学	多元函数积分学	微分方程	级数
考查次数	31次	36次	27次	8次	5次	38次	54次	29次	31次

因此，本书对每个科目的知识体系分类编排为章。每章开头都设有“本章考试要求”，考生可以从中了解最新大纲对本章内容的基本要求；同时，每章均设有“历年真题分布统计表”，考生可以了解本章知识在历年真题中的考查情况，从而对不同知识体系有重点地进行复习。

考点分类攻克

考研数学(一)的每个科目虽然考点众多，但绝大多数真题涉及的考点较为单一。考生在研究真题时，应按照不同考点将真题分类攻克，以便达到举一反三的效果。

例1:(2015年第10题)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$______.

【分析】本题的考点是高等数学中的对称区间上的一元函数积分学，没有出现高等数学中的其他

考点。考生在复习的时候，应该把所有属于对称区间上的一元函数积分学这一考点的真题放在一起，便于对该部分知识熟练掌握。

例 2:(2015 年第 13 题)n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ______.

【分析】本题的考点是线性代数中的 n 阶行列式的计算，需要记忆行列式的性质，该题目与线性代数的其他考点毫无关系，考生在复习行列式时，可将真题中利用行列式性质计算 n 阶行列式的题目放在一起研究，以便更好地掌握该考点有关的知识。

因此，本书将 20 年真题按照不同的考点归类。

第一，针对每个考点都归纳出了“解题核心要点”，给出了与该考点有关的定理、公式、方法等，便于考生记忆。

第二，将真题按照考点分类，真题的答案包括三部分:“思路分析”是对本题的主体思路和核心考点的概括;“解析”是本题的详细解题过程和步骤，多数题目为一题多解;“评注”是对每种题型核心考点和解题方法的归纳。

第三，书中近五年的真题均配有二维码，考生扫码即可观看题目视频讲解。

《考研数学 · 20 年真题分类精讲(数学一)》一书，旨在从科目、体系、考点三个角度全方位地帮助考生透彻研究 20 年真题，在最短的时间内实现考研数学的有效提分。

全国硕士研究生招生考试研究委员会

二〇一五年五月于北京

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限与连续

本章考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

历年真题分布统计

1996 年 ～ 2015 年本章真题分布统计

考点 年份	对收敛性及极限性质的考查	无穷小量的比较	极限的计算	渐近线	总计
1996 年		3 分	3 分＋5 分		11 分
1997 年			3 分		3 分
1998 年			3 分＋6 分		9 分
1999 年			3 分		3 分
2000 年			5 分		5 分
2001 年					0 分
2002 年		6 分			6 分
2003 年	4 分		4 分		8 分
2004 年		4 分			4 分
2005 年				4 分	4 分
2006 年			4 分＋12 分		16 分
2007 年	4 分	4 分		4 分	12 分
2008 年	4 分		9 分		13 分
2009 年		4 分			4 分

（续表）

年份 \ 考点	对收敛性及极限性质的考查	无穷小量的比较	极限的计算	渐近线	总计
2010年			4分+4分		8分
2011年			10分+10分		20分
2012年				4分	4分
2013年		4分		4分	8分
2014年			10分		10分
2015年		10分	4分		14分
总计	12分	35分	99分	16分	162分

概述：本章在考研中属于必考考点，除了极个别年份之外，每年都会有考查，考题以客观题为主，也会有一部分解答题，平均每年的分值（1996年～2002年的满分为100分，折合成满分150之后再计算）约为8分. 本章的考点分布有两个特点需要引起考生重视：一是考点分布比较集中，约有60%以上的分值分布在极限的计算中；二是考点之间的关联比较明显：无穷小量的比较、渐近线的计算从本质上讲考查的都是极限的计算. 所以，考生在复习本章时，极限的计算应该是绝对的核心，主要的复习任务就是掌握各类极限的常用计算方法.

历年真题分类精讲

考点一　对收敛性及极限性质的考查

（一）解题核心要点

本题型主要考查极限收敛的条件及性质，常见的结论有：

极限的四则运算法则

收敛 + 收敛 = 收敛，收敛 + 发散 = 发散，发散 + 发散 = ?；

$$收敛\times收敛=收敛，收敛\times发散=\begin{cases}发散，收敛\neq 0,\\ ?，收敛=0,\end{cases}\quad 发散\times发散=?.$$

（上述结论中的问号表示结果不确定）

夹逼定理

若存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

单调有界收敛定理

单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限；单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

极限的保号性

有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$：

若从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n\geqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

若有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则从某一项 N 开始，以后所有项都有 $x_n>y_n$.

（二）历年真题精讲

1.（2003年－4分） 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）

(A) $a_n<b_n$对任意n成立.　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

【答案】 D

【思路分析】 直接借助极限的性质进行推理得出正确选项或是举反例排除错误选项.

【解析】方法一：推理法.

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在并记为$A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=A$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在. 所以选项D正确.

方法二：排除法.

取$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，而$a_1=1$，$b_1=0$，$a_1>b_1$，A不正确；

取$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，$c_n=n-2$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而$b_1=0>-1=c_1$，B不正确；

取$a_n=\dfrac{1}{n}$，$c_n=n-2$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，C不正确.

评 注

(1) 选项A，B容易和极限的保号性混淆，根据保号性：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，所以存在$N>0$，当$n>N$时，有$a_n<b_n$. 但要注意的是这里$a_n<b_n$只有对足够大的$n(n>N)$才成立，无法保证对每一项都成立.

(2) 结合本题的推理过程和极限的四则运算法则，可以总结出如下结论：两个收敛的数列相乘一定是收敛的；收敛的数列和发散的数列相乘之后是否收敛取决于收敛的数列极限值，如果该极限值不为零，则一定发散，如果该极限值为零，则有可能收敛也有可能发散. 同样的结论对函数极限也是成立的.

2.（2007年－4分） 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$，令$u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$则下列结论正确的是（　　）

(A) 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(B) 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

(C) 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(D) 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

【答案】 D

【思路分析】 对于这种类型的题目，常用举反例法，

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}>0(x>0).\ u_n=f(n),\lim_{n\to+\infty}f(n)=0.$$

又如，

$$f(x)=\frac{1}{x}-x\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}>0(x>0).$$

$$u_n = f(n) = \frac{1}{n} - n,\text{但}\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

因此 A,B 不正确.

设 $f(x) = x^t,(t \geqslant 2)$,则可知 C 不正确,而 D 正确,因此选 D.

【解析】方法一:设 $f(x) = x^2$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0, u_1 < u_2$,但 $\{u_n\} = \{n^2\}$ 发散,排除 C.

设 $f(x) = \frac{1}{x}$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$,但 $\{u_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ 收敛,排除 B.

设 $f(x) = -\ln x$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$,但 $\{u_n\} = \{-\ln n\}$ 发散,排除 A. 故应选 D.

方法二:由拉格朗日中值定理,有

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)(n+1-n) = f'(\xi_n),$$

其中 $\xi_n \in (n, n+1), (n = 1,2,\cdots)$. 由 $f''(x) > 0$ 知,$f'(x)$ 单调增加,故

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) < \cdots < f'(\xi_n) < \cdots,$$

所以 $$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_1 + \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) > u_1 + nf'(\xi_1) = u_1 + n(u_2 - u_1),$$

于是当 $u_2 - u_1 > 0$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = +\infty$,故选 D.

3. (2008 年一 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 B

【思路分析】 由题干的信息很容易联想到单调有界收敛定理,所以应该把讨论的焦点放在哪个选项能确保所给数列满足单调有界收敛定理的条件上.

【解析】方法一:推理法.

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,可知不管数列 $\{x_n\}$ 取成什么,数列 $\{f(x_n)\}$ 总是有界的. 如果再有条件能保证 $\{f(x_n)\}$ 单调,就能得到 $\{f(x_n)\}$ 收敛了. 注意到函数 $f(x)$ 本身是单调的,可见,如果 $\{x_n\}$ 单调,那么 $\{f(x_n)\}$ 也是单调的,从而可以得到 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 可知,B 是正确的.

方法二:排除法.

如果 $f(x)$ 连续,那么在 $\{x_n\}$ 收敛的前提下是可以得到 $\{f(x_n)\}$ 收敛的. 可见,选项 A 的问题在于不能确保函数 $f(x)$ 是连续的. 可以举反例:$f(x) = \begin{cases} \arctan x + 1, x > 0, \\ \arctan x, \quad x \leqslant 0, \end{cases}$ 容易检验 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调有界的;再取 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,容易检验 $\{x_n\}$ 收敛,但 $\{f(x_n)\}$ 发散(n 取奇数和偶数时极限不一致). 可知,选项 A 是错误的.

由于只要 $\{x_n\}$ 单调就可以保证 $\{f(x_n)\}$ 收敛,故可以取 $x_n = n$,此时 $\{f(x_n)\}$ 是收敛的,但 $\{x_n\}$ 发散. 同样,对于上述的 $\{x_n\}$,$\{f(x_n)\}$ 也是单调的,但 $\{x_n\}$ 发散. 可知选项 C 和 D 都是错误的.