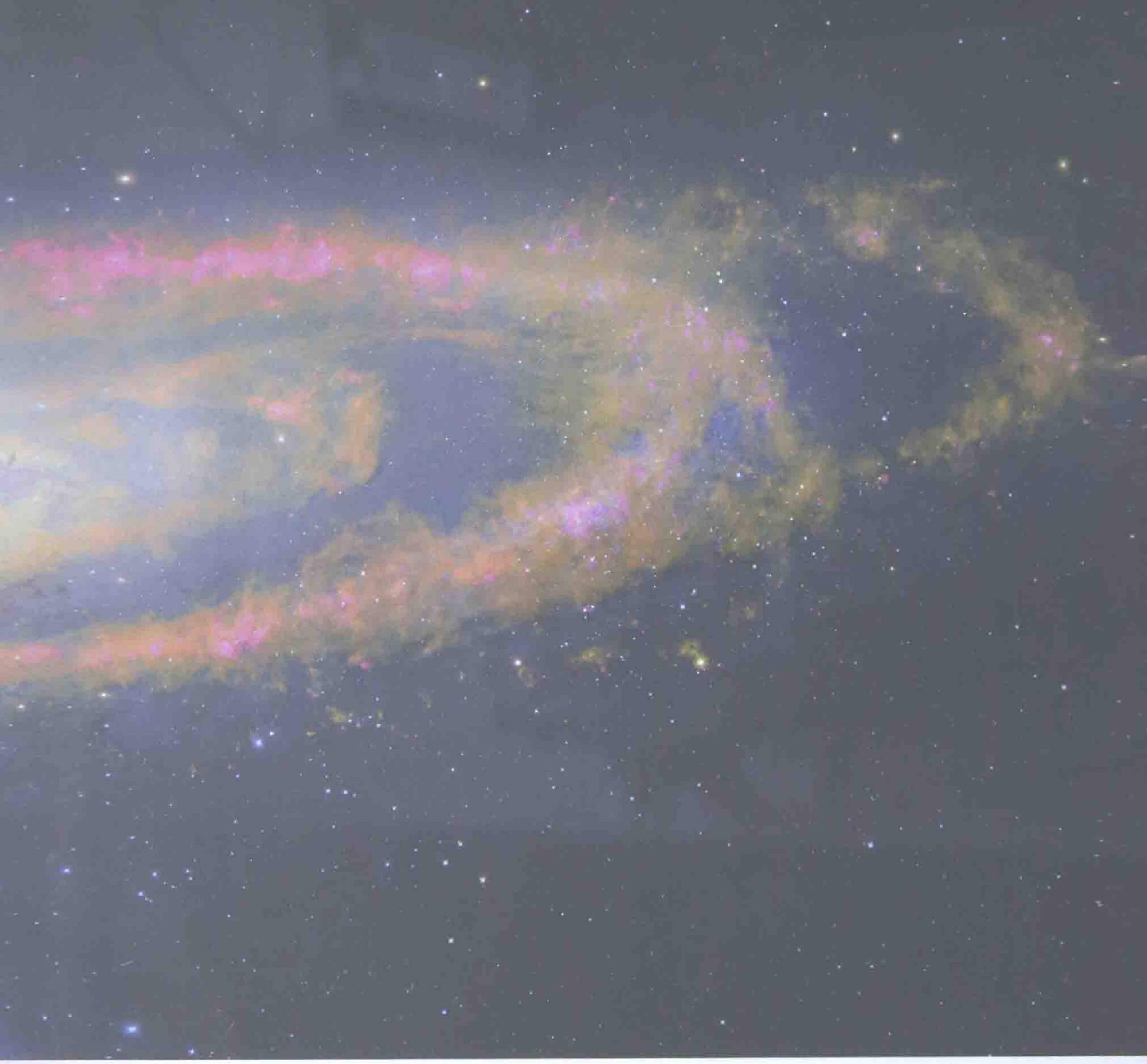

University Physics
大学物理（下册）

主编 吴亚非

高等教育出版社

Daxue Wuli

大学物理

（下册）

主编　吴亚非

编者（按音序排列）

顾洪恩 李增智 梁麦林 刘新典

孟湛祥 吴亚非 杨红波

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为大学物理基础教材，是参照教育部物理基础课程教学指导分委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2010年版）的要求，本着“概念准确、叙述简练、易教易学”的宗旨，对传统教材的内容进行了必要调整和整合后编写而成的。

本书分为上、下两册，并配有相应的学习指导书。上册内容包括：力学、气体动理论及电磁学；下册内容包括：振动、波动、几何光学、波动光学、狭义相对论基础、物质的波粒二象性、量子力学基础、固体的量子理论及原子核和粒子物理。

本书可作为高等学校非物理专业大学物理课程的教材，也可供社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理．下册/吴亚非主编．－－北京：高等教育出版社，2015.3

ISBN 978－7－04－041974－0

Ⅰ．①大… Ⅱ．①吴… Ⅲ．①物理学－高等学校－教材 Ⅳ．①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第024005号

策划编辑 缪可可　责任编辑 张海雁　封面设计 张志奇　版式设计 杜微言
插图绘制 宗小梅　责任校对 窦丽娜　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17	版　　次	2015年3月第1版
字　　数	360千字	印　　次	2015年3月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	30.20元

物 料 号　41974－00

第九章
振动

就运动形态而言，物质的运动可以分为机械运动、热运动、电磁运动等；而就运动形式而言，物质的运动又可以分为平动、转动和振动。振动是物质的一种基本运动形式。自然界中到处都存在着振动。例如，一切正在发声的物体都在振动，人的心脏有规律的跳动也是振动，机器的运转、海浪的起伏以及地震也都是振动。同样，交流电路中的电流和电压也在振动，即使晶体中的原子也都在不停地振动着。物体在某一位置（通常是平衡位置）附近所作的周期性的往复运动称为机械振动。本章主要讨论机械振动的特征和规律。

振动的基本特征之一是其周期性。广义地说，任何一个物理量随时间的周期性的变化都称为振动。例如，电磁场中的电场强度和磁感应强度都可能随时间做周期性的变化，这种振动称为电磁振动或电磁振荡。各种振动形式的机理虽然不尽相同，但都有着类似的规律性，可以用同一类数学方程来描述。因此，研究一种振动形式的规律，有助于理解其他振动形式的规律。振动有简单和复杂之别，最简单的振动是简谐振动。它也是最基本、最重要的振动。任何复杂的振动都可以认为是由许多简谐振动合成的。

9.1 简谐振动

9.1.1 简谐振动方程

简谐振动可以用一个弹簧振子来演示。如图 9-1 所示，将质量为 m 的物体（可视为质点）系于一端固定弹簧的自由端，放置于光滑水平面上，当弹簧的质量忽略不计时，该系统就构成了一个弹簧振子。将物体沿水平方向自平衡位置移开一些距离（以使弹簧产生形变）后释放，物体便在水平面上作往复的自由振动。

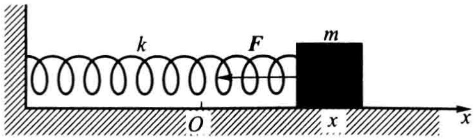

图 9-1　弹簧振子的简谐振动

为了描述这种自由振动，可以沿水平方向建立一个坐标轴 x，用来描述物体所在的位置。将坐标原点 O 设定在弹簧的松弛位置，即弹簧松弛时自由端所在的

位置，在此位置处，物体所受的合外力为零。由于在这一位置处物体所受合外力为零，所以该位置也称为平衡位置。

当物体离开平衡位置的位移为 x 时，物体所受的合外力即为弹簧的弹性力。依据胡克定律，此力可以表示为

$$\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$$

考虑到该弹簧谐振子是在一维空间的运动，所以上式可以写成

$$F=-kx$$

式中，k 是弹簧的劲度系数。由上式可知，物体所受的合外力与物体离开平衡位置的位移成正比，方向与位移方向相反，始终指向平衡位置，习惯上称这种力为线性恢复力或线性弹性力。线性恢复力是物体作简谐振动的根本原因。

依据牛顿运动定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，在一维情况中：$F=ma$。考虑到在该系统中，物体所受的只有线性恢复力，即 $F=-kx$。并考虑到加速度可以表示为 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，于是可以得到以微分方程形式表示的简谐振动的牛顿运动定律

$$-kx=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

整理后可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

为了求解上式，将变量 x 前的常系数用 ω_0^2 来代替，即 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。于是得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0 \tag{9.1.1}$$

通常称 ω_0 为简谐振子的角频率、固有频率或简谐振动的圆频率。由于上式来自于牛顿第二定律，所以也称之为简谐振动的动力学方程。从数学角度上来说，方程（9.1.1）又称为简谐振动的微分方程，或二阶常系数线性微分方程。若分析任何物理量的运动也能得出类似这样的方程，就可以断定，这种物理量的运动是一种简谐振动。

由现成的数学方法，可以将微分方程（9.1.1）的解写成正弦、余弦、复数等函数形式，本书采用余弦函数形式，其解可以写为

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi) \tag{9.1.2}$$

在数学上认为式中 A、ϕ 是求解微分方程所得到的待定常量，在物理中分别称 A、ϕ 为振幅和初相位。由于式（9.1.2）反映了弹簧谐振子的位移 x 与时间 t 的函数关系，所以物理学中称式（9.1.2）为简谐振动的运动学方程。凡物理量与时间的关系可以表示成如式（9.1.2）所示的余弦（或正弦）函数形式的，则该物理量必作简谐振动。

由简谐振动运动方程（9.1.2）可以得到作简谐振动物体的速度和加速度的方程，即

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)=A\omega_0\cos\left(\omega_0 t+\phi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{9.1.3}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi)=-\omega_0^2 x \tag{9.1.4}$$

以上两式表明，作简谐振动物体的速度、加速度也是以余弦（或正弦）函数形式变化的，因而其速度和加速度也在作简谐振动。式（9.1.4）还表明，作简谐振动的物体的加速度与位移成正比，方向与位移相反，这无疑是弹性（合外力）所导致的必然结果。为了使简谐振动的特征更加清晰，下面进一步讨论式（9.1.2）中各物理量所表示的物理意义。

9.1.2 描述简谐振动特征的物理量

1. 振幅 A

振幅是振动物体离开平衡位置的最大位移，反映振动强弱程度。在国际单位制中，简谐振子振幅的单位是米（m）。

2. 角频率 ω

在一般情况下，角频率用 ω 表示，角频率表征振动的快慢程度及周期性。角频率越大，振动越快。同时也可以用每秒物体振动的次数——频率 ν 或物体完成一次全振动所用的时间——周期 T 来表征物体振动的快慢程度及周期性。它们与角频率 ω 的关系为

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T} \tag{9.1.5}$$

在国际单位制中，角频率 ω 的单位为弧度每秒（$\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$）；周期 T 的单位为秒（s）；频率 ν 的单位为每秒（$\mathrm{s^{-1}}$），称为赫兹（Hz）。

振动系统作自由振动时，都是以振动系统的固有角频率 ω_0（或固有频率 ν_0、固有周期 T_0）振动。任何振动系统都有决定振动系统本身性质的固有角频率 ω_0，它可以通过对振动系统所建立的形式如式（9.1.1）的简谐振动动力学方程而得到。例如弹簧谐振子的固有角频率 ω_0 为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.1.6}$$

相应的固有频率 ν_0 和固有周期 T_0 分别为

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.1.7}$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{9.1.8}$$

3. 相位（$\omega_0 t+\phi$）

（$\omega_0 t+\phi$）称为振动系统在时刻 t 的相位，其中 ϕ 是振动系统在时刻 $t=0$ 时的相位，称为初相位。相位的单位为弧度（rad）。相位（$\omega_0 t+\phi$）既出现在简谐振动的运动方程式（9.1.2）中，也出现在速度、加速度的表达式（9.1.3）和

(9.1.4) 中，因此，已知相位便可确定振动物体的振动状态，所以相位是一个非常重要的物理量。在振动的描述中，相位是相对的，重要的是相位差的概念。相位差反映了两个振动步调上的差异。比较式 (9.1.2)、(9.1.3) 和 (9.1.4) 可知，作简谐振动的物体速度超前其位移 $\pi/2$ 相位，或称位移滞后速度 $\pi/2$ 相位；而加速度与位移反相位。依据相位 $(\omega_0 t+\phi)$，可以进一步理解角频率 ω_0 的含义。角频率是相位的时间变化率，角频率越大，相位随时间变化得就越快，因而物体振动得越快。在振动过程中，相位 $(\omega_0 t+\phi)$ 随时间做周期性的变化，相位每变化 2π，振动的物体就完成一次全振动。

振幅、角频率和初相位是描述简谐振动的三个重要物理量。知道了这三个物理量，就可以完全确定振动系统在任一时刻的运动状态。通常称振幅 A、角频率 ω_0 和初相位 ϕ 为描述简谐振动的三个特征物理量。

一个作简谐振动的系统，它的固有角频率 ω_0 由式 (9.1.1) 确定。对于弹簧谐振子，则由式 (9.1.6) 所确定。但振动系统的振幅 A 和初相位 ϕ 则因初始时刻物体的运动状态（位移和速度）不同而有所不同，所以知道了振动系统的固有角频率 ω_0 后，可由 $t=0$ 时刻物体的运动状态来决定振动系统的振幅 A 和初相位 ϕ。

把 $t=0$ 代入式 (9.1.2) 和式 (9.1.3) 得

$$x_0 = x\big|_{t=0} = A\cos\phi$$

$$v_0 = v\big|_{t=0} = -\omega_0 A\sin\phi$$

由以上两式可以得到

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega_0)^2} \tag{9.1.9}$$

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \tag{9.1.10}$$

式中，x_0 和 v_0 表示 $t=0$ 时刻弹簧谐振子的位移和速度，称为初始条件。由式 (9.1.9) 和 (9.1.10) 即可求出弹簧谐振子的振幅和初相位，就可以完全确定简谐振动的位移和时间的函数关系，从而也就完全确定了该简谐振动。

利用三角函数与复数的关系，简谐振动也可以表示为

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\phi)} \quad 或 \quad x = A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{9.1.11}$$

式中，$A'=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 也是复数，称为复振幅。

复振幅是一个不含时间的物理量，因此它是由初始条件决定的，采用复振幅表示的优点是，它不仅包括了振幅，还包括了初相位。复振幅综合反映了简谐振动的振幅和初相位的信息。应该注意，由于采用了余弦函数表示简谐振动，所以式 (9.1.11) 只有实部有意义。

9.1.3　简谐振动的图示法——旋转矢量法

为了直观地表示简谐振动，可以采用图示法。如图 9-2 所示，以时间 t 为横坐标轴，位移 x 为纵坐标轴，可将式 (9.1.2) 中简谐振动的 $x(t)$ 函数关系描绘出来，称为振动曲线，图中还画出了相应的 $v(t)$ 曲线和 $a(t)$ 曲线。

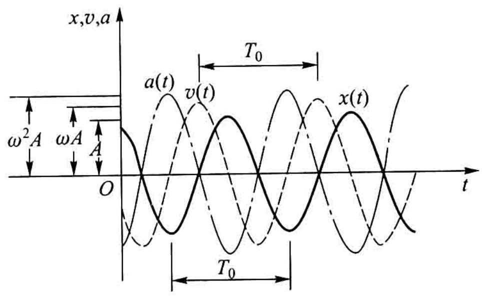

图 9-2 用曲线表示简谐振动

简谐振动还可以用旋转矢量来表示。如图 9-3 所示，自坐标原点画一条长度等于振幅 A 的矢量 $\boldsymbol{A}$，开始时（$t=0$），让矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角等于振动的初相位 ϕ，令矢量 $\boldsymbol{A}$ 以角速度 ω_0 绕坐标原点 O 沿逆时针方向旋转，则 t 时刻 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影就表示振动的位移 x。这种表示简谐振动的方法称为旋转矢量法。

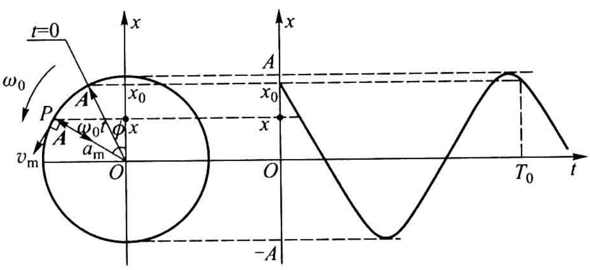

图 9-3 用旋转矢量的投影表示简谐振动

旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示了简谐振动的三个特征物理量 A、ω_0 和 ϕ，它的端点 P 在坐标轴上的投影描绘了简谐振动。端点 P 作匀速圆周运动，其运动轨迹是一个圆，因此旋转矢量法又叫参考圆法。另外，由端点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}_m$ 在 x 轴上的投影也可以描绘简谐振动的速度随时间的变化情况；由端点 P 的向心加速度 $\boldsymbol{a}_m$ 在 x 轴上的投影，还可以描绘作简谐振动的物体的加速度随时间的变化情况。旋转矢量法在确定简谐振动的初相位及进行简谐振动的合成时特别有用。

在历史上，意大利著名物理学家伽利略用他自制的望远镜在 1610 年发现了木星的四颗卫星。根据伽利略的观测资料，在地球上的观察者看来，卫星作简谐振动。由简谐振动与匀速圆周运动的关系可以判断，这些卫星在绕木星作匀速圆周运动。这是简谐振动与匀速圆周运动之间密切关系的很好实例。

例题 9-1 把两个劲度系数分别为 $k_1=3\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 和 $k_2=1.5\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 的轻质弹簧串接在一起，一端固定，另一端与一质量为 $m=0.1$ kg 的小物块相连，置于光滑水平台面上，如图 9-4 所示。把物块自平衡位置拉开一段距离后释放，物块将在平衡位置附近往复运动。问：（1）物块的运动是否为简谐振动；（2）设 $t=0$ 时，物块位于 $x_0=4$ cm 处，此时速度为 $v_0=300\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$，写出物块的运动方程；（3）求物块从初始（$t=0$）状态运动到 $x_1=4$ cm，$v_1=-300\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$

的状态所需的最短时间。

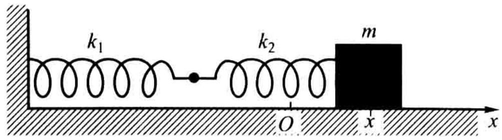

图 9-4 例题 9-1 图

解：(1) 以平衡位置，即两弹簧均未发生形变的位置作为坐标原点 O，建立如图 9-4 所示的坐标系。当物块的位置坐标为 x 时，设弹簧 k_1 的形变为 x_1，弹簧 k_2 的形变为 x_2，则有

$$x=x_1+x_2$$

忽略弹簧本身的质量，由两个弹簧受力分析可知

$$k_1x_1=k_2x_2$$

把两个弹簧的组合视为一个弹簧，其等效劲度系数为 k，则有

$$kx=k_1x_1=k_2x_2$$

以上三个方程联立，可以得出等效劲度系数为

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

由于 k_1 和 k_2 均为常量，所以 k 也是常量，其值为

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{3\times10^3\times1.5\times10^3}{3\times10^3+1.5\times10^3}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}=10^3\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

由以上分析可知，物块在运动过程中，所受的合外力为线性恢复力 $F=-kx$，因此可以判断出，物体所作的运动是简谐振动。

(2) 设物块的运动方程为

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi)$$

式中，

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{10^3}{0.1}}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=100\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{300}{100}\right)^2}\ \mathrm{cm}=5\ \mathrm{cm}$$

$$\phi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0x_0}\right)=\arctan\left(-\frac{300}{100\times4}\right)\ \mathrm{rad}=-0.64\ \mathrm{rad}$$

因此，所求物块的运动方程为

$$x=5\cos(100t-0.64)\ (\mathrm{cm})$$

(3) 设所需的最短时间为 t_1。由旋转矢量很容易判定，与 $x_1=4\ \mathrm{cm}$、$v_1=-300\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$的状态相应的相位应为 $\phi_1=0.64\ \mathrm{rad}$，依题意有

$$\omega_0t_1-0.64=100t_1-0.64=0.64\ (\mathrm{rad})$$

由此得出

$$t_1=\frac{0.64+0.64}{100}\ \mathrm{s}=1.28\times10^{-2}\ \mathrm{s}$$

9.1.4 简谐振动的能量

振动系统具有能量。现仍以图 9-1 所示的水平放置的弹簧谐振子为例来讨论简谐振动系统的能量问题。当物体的位移为 x，速度为 v 时，系统的弹性势能 E_p 和动能 E_k 分别为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0t+\phi)$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0t+\phi)$$

因此，弹簧谐振子的总机械能为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \tag{9.1.12}$$

由此可知，弹簧谐振子的总机械能是一个不随时间变化的常量，即系统的机械能守恒。这也是简谐振动的一个显著的特征。

式（9.1.12）还表明，弹簧谐振子的总能量与振幅的平方成正比。这一结论对其他的简谐振动也是正确的。振幅不仅给出了简谐振动的运动范围，而且还反映了振动系统总能量的大小，或者说反映了振动的强度。

此外，还可以求出弹簧振子的势能和动能对时间的平均值 $\overline{E}_p$ 和 $\overline{E}_k$。根据物理量对时间的平均值的定义可得

$$\overline{E}_p=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_p\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0t+\phi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_k\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0t+\phi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

即，弹簧谐振子的势能平均值和动能平均值（可以分别称为平均势能和平均动能）相等并且等于总机械能的一半。这一结论同样适用于其他简谐振动。

例题 9-2 LC 振荡是一个非力学的简谐振动的例子。如图 9-5 所示，用电源 $\mathscr{E}$、电容 C 和电感 L 组成电路。先将开关 S 接到电源 $\mathscr{E}$ 一侧，使电源给电容器充电，然后再将开关 S 搬向另一侧接通 LC 回路。此后即可通过电流计 G 观察到回路中产生了大小和方向都交替变化的电流。用两种方法讨论电容器极板上的电荷以及回路中的电流随时间变化的规律。

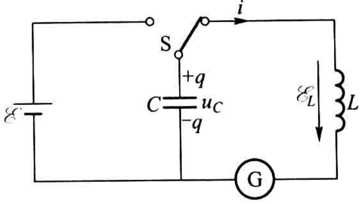

图 9-5 LC 振荡

解： 方法 1：利用基尔霍夫回路电压方程。

设某时刻 t，电容器极板上的电荷量为 q，图中以箭头表示回路中电流 i 和感生电动势 $\mathscr{E}_L$ 的正方向，在忽略电流计和导线电阻的情况下，有

$$-\mathscr{E}_L-u_C=0$$

又

$$u_C=\frac{q}{C},\ i=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\ \mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$$

代入 $-\mathscr{E}_L-u_C=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q}{LC}=0 \tag{9.1.13}$$

这也是一个类似式（9.1.1）那样的微分方程。因此可知，电容器极板上的电荷量也是按简谐振动形式变化的，上式的解为

$$q=q_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0t+\phi)$$

LC 振荡回路的固有角频率 ω_0 和固有频率 ν_0 分别为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\qquad \nu_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

回路电流的表达式为

$$i=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\omega_0q_{\mathrm{m}}\sin(\omega_0t+\phi)$$

即回路中的电流也按简谐振动的形式变化，这种电流称为振荡电流。而图9-5所示的电路称为 LC 振荡电路。

方法 2：利用能量关系。

从能量的角度分析，也可以得到 LC 回路微分方程式（9.1.13）。在电流计和导线的电阻忽略不计，以及不考虑电磁辐射的情况下，可知，系统电磁能量没有任何耗散，所以系统能量守恒。设某一瞬时，电容器极板上的电荷量为 q，流过回路的电流为 i，则系统的电磁能量可以表示为

$$E=E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{m}}=\frac{q^2}{2C}+\frac{Li^2}{2}$$

由于系统的能量不随时间变化，所以上式对时间的导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{m}})=\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$$

将 $i=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$代入上式，即可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q}{LC}=0$$

9.1.5 其他简谐振动

1. 单摆（数学摆）

将一个小球（视为质点）系于不可伸长、质量忽略不计的细绳下端，将细绳上端固定，如图 9-6 所示。当细绳处于垂直方位时，小球处于平衡状态。将小球略微偏离其平衡位置，使得细绳与竖直方向成一较小角度 θ（θ 一般控制在 5°以内），然后释放，小球就会左右摆动起来。

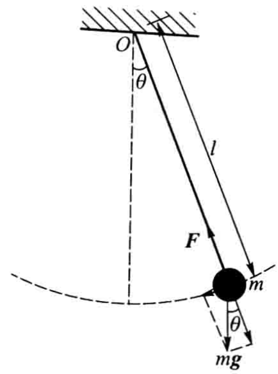

图 9-6 单摆

设小球的质量为 m，细绳长度为 l，用坐标 θ 作为描写小球位置的变量，并规定小球在平衡位置右侧时 θ 为正，在平衡位置左侧时 θ 为负。作用在小球上的力有两个，一个是小球的自身重力 mg，另一个是细绳的张力 F。将重力分解为相互垂直的两个分力：一个分力与细绳的张力 F 平行反向，大小为 $mg\cos\theta$；另一个分力沿小球运动的方向，大小为 $mg\sin\theta$，方向指向小球的平衡位置。前一个分力与细绳张力的合力，其方向与小球的运动方向垂直，对小球的切线运动没有贡献；后一个分力则直接影响小球的切向运动，若只考虑小球的切向运动，则小球运动的动力学方程为

$$-mg\sin\theta = ma_t$$

由于切向加速度 a_t 与角加速度 β 存在如下的关系：

$$a_t = l\beta = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

所以得到全为角量的动力学方程为

$$-g\sin\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.1.14}$$

考虑到摆角 θ 很小，通常限定在 5°之内，所以有 $\sin\theta \approx \theta$，将其代入上式，并整理，得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{9.1.15}$$

此式称为单摆或数学摆运动的动力学方程，从数学角度上讲，它也是一个与式（9.1.1）形式上完全一样的二阶常系数线性微分方程，与其相对应的运动方程也与式（9.1.2）形式上完全相同。

$$\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{9.1.16}$$

式中，$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 为单摆振动的固有角频率。与此相应的单摆振动的固有频率 ν_0 和固有周期 T_0 分别为

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

式（9.1.16）中，θ_m 为最大角位移，称为角振幅；ϕ 为初相位，它们都是由初始条件决定的。当单摆的摆长 l 一定时，其振动的周期由单摆所在地区的重力加速度 g 决定，所以，可以通过测量单摆振动的周期来确定单摆所在地区的重力加速度。

下面比较一下弹簧谐振子和单摆。

对于弹簧谐振子来说，物体所受的合外力为弹簧所施加的弹性力；而对于单摆来说，物体所受的切向力并不是弹性力，而是其重力的切向分力（图 9-6），

但在 θ 很小，即 θ 小于 5°时，此力与角坐标（或者说是角位移）θ 成正比，方向指向平衡位置。这些性质与弹性力十分相似，可以将其称为准弹性力。

通过前面的讨论，可以得出这样的结论：受弹性力或者是准弹性力作用的物体（视为质点）必作简谐振动。从能量角度分析，作简谐运动的系统必定是保守系统，其机械能守恒。振动角频率仅由系统本身性质决定。这样的振动系统称为简谐振子或谐振子。

2. 复摆（物理摆）

考察一个在重力力矩作用下绕水平固定转轴 O 摆动的刚体，如图 9-7 所示。设刚体的质量为 m，它对于固定轴 O 的转动惯量为 I，质心位于 C 点，质心与转轴 O 的距离为 l。摆动时令 OC 线与竖直线之间的夹角为 θ，并规定 OC 线在平衡位置的右侧时 θ 为正，在左侧时 θ 为负。刚体在重力矩的作用下运动，根据转动定律，得出刚体运动的动力学方程为

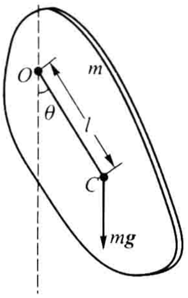

图 9-7　复摆

$$-mgl\sin\theta=I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

当 θ 很小（小于 5°）时，$\sin\theta\approx\theta$，上式变为

$$-mgl\theta=I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

此式表明，刚体所受的合外力矩为线性恢复力矩。将此式稍加整理，可以得到如下形式的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{I}\theta=0 \tag{9.1.17}$$

此方程式与式（9.1.1）具有完全相同的形式，因而也是一种简谐振动。作简谐振动的这种刚体称为复摆或物理摆。按照前面的方法，可以得出与方程（9.1.17）所对应的简谐振动的运动方程：

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{9.1.18}$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$ 为复摆振动的固有角频率；θ_{m} 为复摆运动的最大角位移，即复摆振动的角振幅；ϕ 为复摆振动的初相位。θ_{m} 和 ϕ 均由初始条件决定。

分别将式（9.1.18）对时间求一次和两次导数，可以得到复摆振动的角速度和角加速度的表达式。

也可以换个角度，从能量关系分析得出复摆（单摆也一样）运动的动力学方程。选刚体在平衡位置时的重力势能为零，则当角位移为 θ 时系统的机械能（即转动动能与势能之和）可以表示为

$$E=mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}I\Omega^2$$

式中，$\Omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 为刚体摆动的角速度。

由于刚体摆动过程中仅由重力（保守力）对系统做功，所以机械能守恒，因此系统的机械能对时间的变化率等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}I\Omega^2\right]=mgl\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+I\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=0$$

将 $\Omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$代入上式后得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{I}\sin\theta=0$$

当 θ 很小（小于 5°）时，$\sin\theta\approx\theta$，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{I}\theta=0$$

这便是式（9.1.17）所表示的复摆运动的动力学方程。

在前面讨论单摆和复摆时，用角坐标 θ 表示物体所在的位置，通常像单摆和复摆这样用角坐标来描述的简谐振动为角谐振动；与此对应，像弹簧谐振子那样用线坐标（如 x）所描述的简谐振动为线谐振动。

例题 9-3 在如图 9-8（a）所示的系统中，轻弹簧的一端固定，另一端经由细绳通过一个定滑轮被质量为 m 的小物体拉伸。滑轮的半径为 R，转动惯量为 I，弹簧的劲度系数为 k。令整个系统在平衡位置附近作微小振动，在振动过程中细绳与滑轮无相对滑动。不计摩擦损耗及细绳与弹簧的质量，试确定系统振动时的固有角频率。

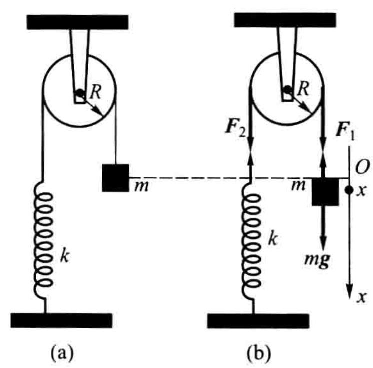

图 9-8 例题 9-3 图

解：方法 1：利用牛顿定律和转动定律。建立如图 9-8（b）所示的坐标系，取物体所在的平衡位置为坐标的原点 O，此时弹簧的形变量为 x_0 且有 $mg=kx_0$。在振动过程中，物体作平动，定滑轮作定轴转动。当物体的坐标为 x 时，对物体和定滑轮分别列出以下方程：

$$mg-F_1=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$F_1R-F_2R=F_1R-k(x_0+x)R=\frac{I}{R}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由以上两方程可得

$$mgR-k(x_0+x)R=\left(mR+\frac{I}{R}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

注意到

$$mgR-kx_0R=0$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{kR^2}{mR^2+I}x=0$$

由此可知，系统作简谐振动，其固有角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}$$

方法 2：利用机械能守恒定律。

由于系统在振动过程中仅有物体的重力和弹簧的弹性力做功，所以整个系统的机械能守恒，选物体在平衡位置处势能为零，当物体坐标为 x 时，系统机械能为

$$E=-mgx+\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2R^{-2}+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$$

由机械能守恒可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=-mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{R^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k(x_0+x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

整理后得到

$$-mg+\left(m+\frac{I}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx_0+kx=0$$

由于$-mg+kx_0=0$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{kR^2}{mR^2+I}x=0$$

可知系统作简谐振动，其固有角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}$$

例题 9-4 质量为 m_1 的盘子系于竖直悬挂的质量可以忽略不计的轻弹簧下端，弹簧的劲度系数为 k，平衡时伸长了 l。一质量为 m_2 的砝码自 h 高度自由下落掉在盘子上，与盘子作完全非弹性碰撞后成为一体。以砝码落在盘子上的瞬间为计时起点，求盘子的位移与时间的函数关系。

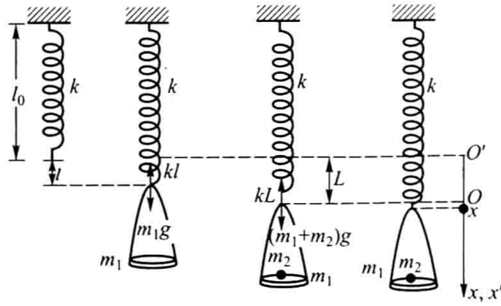

图 9-9 例题 9-4 图

解：设弹簧原长为 l_0，依题意画出如图 9-9 所示的示意图。本题由三个物理过程所组成。其一是砝码自由下落；其二是砝码与盘子作完全非弹性碰撞；其三是砝码与盘子碰撞后合为一体的共同运动。建立如图所示的坐标系，以盘子和砝码的平衡位置作为坐标原点 O，此时弹簧伸长量为 L，进行受力分析，利用牛顿定律可以列出以下方程：

$$m_1 g = kl$$

$$(m_1+m_2)g = kL$$

规定竖直向下为 x 轴的正方向，设盘子与砝码在任意瞬时其坐标为 x，依照牛顿定律可以得到

$$(m_1+m_2)g-k(L+x) = (m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由于 $(m_1+m_2)g=kL$，上式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m_1+m_2}x=0$$

由此可知盘子与物体一起作简谐振动，其固有角频率为 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}}$。若将 $(m_1+m_2)g=kL$ 的关系代入，可以得到 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$，即盘子振动的固有角频率与摆长为 L 的单摆的固有角频率相同。

设盘子的运动方程为 $x=A\cos(\omega_0 t+\phi)$，由初始条件可以求出振幅 A 和初相位 ϕ。依照题意可知，初始坐标 $x_0=-(L-l)=\dfrac{m_2}{k}g$，砝码与盘子碰撞中，由动量守恒定律可求得盘子与砝码合为一体时的初始速度 v_0。砝码自由下落 h 后速度的大小为 $\sqrt{2gh}$，故

$$m_2\sqrt{2gh}=(m_1+m_2)v_0$$

于是

$$v_0=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$

所以，振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{m_2g}{k}\right)^2+\left(\frac{m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}\right)^2\frac{L}{g}}=\frac{m_2g}{k}\sqrt{1+\frac{2h}{L}}$$

初相位

$$\phi=\pi+\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0x_0}\right)=\pi+\arctan\left[\left(-\frac{m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}\right)\bigg/\sqrt{\frac{g}{L}}\left(-\frac{m_2g}{k}\right)\right]=\pi+\arctan\sqrt{\frac{2h}{L}}$$

这是因为 $x_0<0$，$v_0>0$，由旋转矢量法，可以判断 ϕ 应在第三象限。所以盘子并物体与时间的关系为

$$x=\frac{m_2 g}{k}\sqrt{1+\frac{2h}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t+\pi+\arctan\sqrt{\frac{2h}{L}}\right)$$

若以弹簧原长位置处为坐标原点 O'，建立新的坐标系 $O'x'$，并规定竖直向下为 x'轴的正方向。由图可知

$$x'=L+x=L+\frac{m_2 g}{k}\sqrt{1+\frac{2h}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t+\pi+\arctan\sqrt{\frac{2h}{L}}\right)$$

9.2 阻尼振动

9.2.1 两种阻尼

上节所讨论的简谐振动，其振幅保持不变，系统的能量也保持不变，但这只能是实际情况的一种抽象。实际系统的振动，当无外界补充能量时，振幅都要随时间逐渐衰减。振幅随时间衰减的振动称为阻尼振动，也称为减幅振动。

振幅衰减的原因，一是有摩擦阻力的存在，振动系统要不断克服摩擦阻力而做功，将振动系统的能量逐渐转化为热能而耗散掉，因而振幅逐渐减小，这种阻力称为摩擦阻尼；二是振动的能量以波的形式向四周传播。本节只讨论有摩擦阻尼存在时的阻尼振动。

9.2.2 阻尼振动方程

仍以弹簧谐振子为例讨论阻尼振动方程，主要考虑摩擦阻力与速度成正比的情况，即 $F_{\mathrm{f}}=-\gamma v=-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$（$\gamma$ 为常量）的情况。当系统的运动速度不太大时，黏性阻力就属于这种情况。在考虑了黏性阻力以后，弹簧谐振子所受的合外力为

$$\sum F=-kx-\gamma v$$

由牛顿运动定律得出

$$-kx-\gamma v=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

整理以后可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=0$$

常量 γ 称为阻尼系数，其大小由物体的形状、大小、表面状况及介质的性质所决定。从数学角度上讲，这也是一个二阶常系数线性微分方程，为了给出该方程的解，需要将其进一步化成标准的形式。令 $2\beta=\dfrac{\gamma}{m}$，$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，β 称为阻尼因数，ω_0 是固有角频率。于是上式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \tag{9.2.1}$$

式（9.2.1）是有阻尼存在时弹簧谐振子的动力学方程，也是描写阻尼振动的微