

全国硕士研究生
招生考试

高教版
2015

教育部考试中心

数学考试分析

(2015年版)



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI
SHUXUE KAOSHI FENXI (2015 NIAN BAN)

全国硕士研究生 招生考试

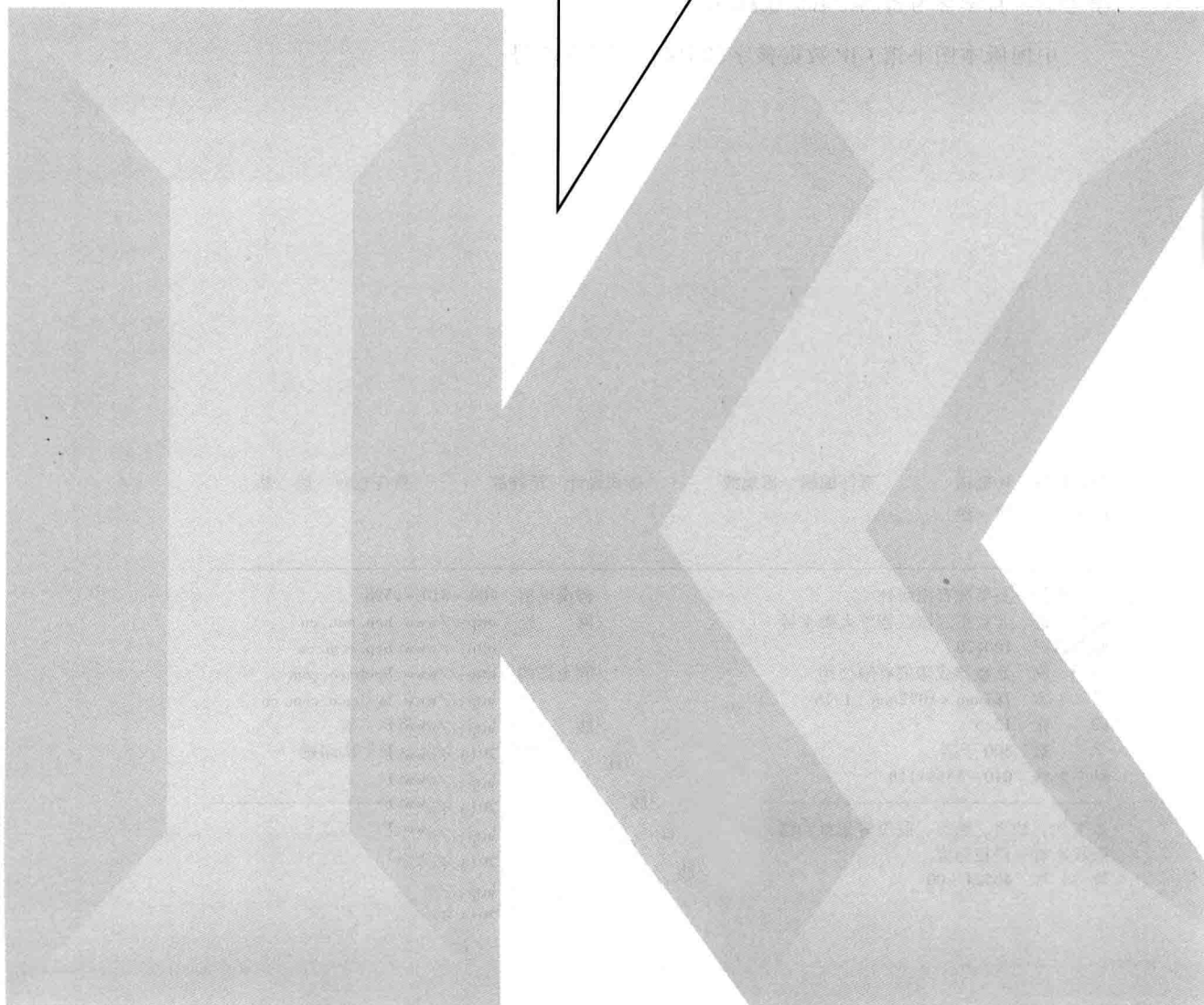
高教版
2015

教育部考试中心

数学考试分析

(2015年版)

 高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING



图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生招生考试数学考试分析:2015年版/
教育部考试中心编. --北京:高等教育出版社,2014.8
ISBN 978-7-04-040524-8

I. ①全… II. ①教… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第179365号

策划编辑 杨挺扬 责任编辑 雷旭波 版式设计 范晓红 责任校对 殷然
责任印制 田甜

| | | | |
|------|-------------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印 刷 | 北京铭成印刷有限公司 | 网上订购 | http://www.landaco.com |
| 开 本 | 787mm×1092mm 1/16 | | http://www.landaco.com.cn |
| 印 张 | 12.5 | 版 次 | 2014年8月第1版 |
| 字 数 | 300千字 | 印 次 | 2014年8月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 26.00元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 40524-00

目 录

| | | |
|-------------|---------------------------|-----|
| 第一部分 | 数学科考试说明 | 1 |
| | 一、考试性质 | 1 |
| | 二、指导思想 | 1 |
| | 三、基本原则 | 2 |
| | 四、参考答案及评分参考的制订说明 | 2 |
| | 五、试题、试卷和考试质量的评价指标 | 3 |
| 第二部分 | 2014 年数学考试分析 | 6 |
| | 一、总体评价 | 6 |
| | 二、统计数据分析 | 7 |
| | 三、思考与建议 | 9 |
| | 四、数学(一)试题分析 | 9 |
| | 五、数学(二)试题分析 | 31 |
| | 六、数学(三)试题分析 | 49 |
| 第三部分 | 2013 年数学试题分析 | 71 |
| | 一、数学(一) | 71 |
| | 二、数学(二) | 92 |
| | 三、数学(三) | 112 |
| 第四部分 | 2012 年数学试题分析 | 131 |
| | 一、数学(一) | 131 |
| | 二、数学(二) | 153 |
| | 三、数学(三) | 174 |

第一部分

数学科考试说明

一、考试性质

全国硕士研究生招生考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试。

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试。所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大。我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征。数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试。

另一方面,从数学考试的测量功能上看,数学考试又是水平考试。水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以教学基本要求和某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与教学基本要求没有直接的关系。数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力。数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与教学基本要求不完全相同,教学基本要求中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于教学基本要求。可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试。

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从2009年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求。这种对不同学科、不同专业的考生提出不同考试要求的特征也是水平考试的重要标志。

二、指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想:既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高。在这两个“有利于”中,重点是有利于国家对高层次人才的选拔。

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习和深造。

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,就是要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和能力,同时,利用考试这根“指挥棒”正确引导高等学校的数学教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有用,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用。

三、基本原则

(1) 严格按照《2015年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》(简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题。

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题。

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则。

(4) 保持历年试题难度的稳定。

(5) 试题编制应科学、公正、规范。

四、参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证。

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程。一般每题4分,答对4分,答错0分。对于四选一的选择題有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程。选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项。对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答或证明方法,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法。参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差。每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关。一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低。各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重。计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给3分,完成到第二个步骤给6分,三个步骤全部完成给10分。对于文科试题常常是按照要点单独赋分。为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面的步骤,才能完成后面的步

骤这一特点,对于有多个解法的试题,一般到达同一结果即给相同的分数,每一步骤分值的给定不是随意的,如同确定每题的分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考做进一步的细化,制定评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生招生数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的 p 表示,取值范围在 0 与 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3 ~ 0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用 D 表示,一般 $-1 < D < 1$.对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$ 、 $p(L)$, $D = p(H) - p(L)$.高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2 ~ 0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试

题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

| 特征 类型 | P | D | 试题特征 |
|----------|-----------|-----------|------------|
| I | (0,0.3) | (0,0.3) | 难度大且区分能力差 |
| II | [0.3,0.8] | (0,0.3) | 难度适中但区分能力差 |
| III | (0.8,1) | (0,0.3) | 难度小且区分能力差 |
| IV | (0,0.3) | (0.3,1.0) | 难度大但区分能力强 |
| V | [0.3,0.8] | (0.3,1.0) | 难度适中且区分能力强 |
| VI | (0.8,1) | (0.3,1.0) | 难度小但区分能力强 |

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第V类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第I类试题属于“题太难谁都不会做”,第III类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第II类和第VI类试题.第IV类试题在选拔性的研究生招生数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第V类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第V类试题在试卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差

有关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标。

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标。信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果。常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度。由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数。目前我们采用的是分半信度和 α 系数。效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西。常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度。关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍。

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标。

第二部分

2014 年数学考试分析

一、总体评价

2014 年全国硕士研究生招生考试数学(一)、数学(二)、数学(三)的试卷符合《2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,考查相关数学课程的主干知识、基本原理和基本方法. 试卷命制科学、规范,试题背景公平,叙述严谨、准确,设问简洁、明了,没有科学性问题. 所给试题的答案和评分参考书写规范、步骤合理、逻辑清楚、可操作性强,便于阅卷评分. 数学(一)、数学(二)、数学(三)的难度适中. 与往年相比,2014 年三份试卷的总体难度略有增加,没有出现过大的起伏. 试题注重对考生的抽象思维能力与综合运用数学知识分析和解决问题能力的考查,各卷的标准差较大,区分度良好,有效地发挥了数学科考试在研究生选拔中的作用. 具体特点为:

1. 全面考查,突出重点

2014 年的数学试卷考查的都是高等数学、线性代数和概率统计三门课程中的主干内容和重点内容,考查的是课程中的基本概念、基本理论和基本方法. 高等数学中的极限、导数运算及应用、定积分运算及应用、偏导数运算及应用、重积分与线面积分的计算、无穷级数、微分方程求解等重点内容都得到了考查;线性代数重点考查的是行列式的计算、向量组的秩、线性方程组求解和矩阵的相似等重点内容;概率统计重点考查的则是随机事件概率的计算、连续型随机变量的数字特征、二维随机变量的概率分布、数理统计中的无偏估计与最大似然估计等重点内容. 例如数学(一)的第(2)、(16)、(17)题,数学(二)的第(4)、(5)、(12)题,数学(三)的第(17)题考查导数运算及应用,数学(一)的第(4)、(10)、(15)题,数学(二)的第(9)、(10)、(13)、(19)、(20)题,数学(三)的第(10)、(11)题考查定积分运算及应用;数学(一)的第(3)、(12)题,数学(二)的第(17)题,数学(三)的第(12)题考查重积分与线面积分;数学(一)的第(19)题,数学(三)的第(18)题考查无穷级数.

2. 注重本质,考查能力

2014 年的数学试卷在考查基本问题和基本方法的同时,注重对数学概念本质的考查,考查考生对数学的理解和掌握. 试题突出对基本方法和基本性质的考查,淡化对特殊解题技巧的考查. 例如对高等数学中的几个重要定理:中值定理、泰勒定理、隐函数定理等,注重对其适用条件和使用方法的考查. 这类问题体现了多想少算的思想,同时考查了考生对数学原理与方法的掌握程度和应用的灵活性.

2014 年的数学试题突出能力立意,重点考查考生的逻辑推理能力、运算求解能力、应用数学知识分析问题和解决问题的能力. 例如数学(一)的第(4)、(6)、(8)、(19)等题,数学(二)的第

(3)、(6)、(8)、(23)等题,数学(三)的第(4)、(6)、(13)、(18)等题考查逻辑推理能力;数学(一)的第(5)、(7)、(9)、(15)、(18)、(20)等题,数学(二)的第(2)、(4)、(7)、(13)等题,数学(三)的第(2)、(5)、(7)、(9)、(12)、(15)等题考查运算求解能力;数学(一)的第(12)、(21)、(22)、(23)等题,数学(二)的第(14)、(19)、(22)等题,数学(三)的第(8)、(14)、(19)、(22)等题考查分析问题、解决问题的能力.

3. 区分合理,难度适中

2014年的三份试卷在考查内容与试题难度上都做了整体设计.从内容上看,高等数学、线性代数、概率统计三门课程的分值和各类题型的数目以及同一门课程中各部分内容所占的比例都符合考试大纲的要求.三份试卷在对数学概念、思想、方法进行综合考查的同时,还考查了应用的问题.

每份试卷的基本题都在70%以上.例如,高等数学的客观题中,75%的是基本概念和基本计算的题目.主观题中,除了线性代数中的“二次型负惯性指数”是往年较少考查的试题外,其他试题内容几乎均是年年考查的.对于稍有难度的试题,试卷也精心设计,梯度设问.例如数学(二)、数学(三)的第(19)题,第(I)问是定积分简单性质的应用,属于基本要求,并且对第(II)问的证明具有启发作用.

通过对内容的选择和对试题的设计,2014年三套试卷的难度和区分度都控制在合理范围内,符合选拔性考试的要求,有利于不同类型的高校选拔不同层次的学生.

二、统计数据分析

1. 难度分析

2014年数学各卷种的抽样统计数据如表1所示.数学(一)、数学(二)、数学(三)三份试卷难度适中,均在0.47左右,比2013年难度有所增加.各卷种的难度符合选拔性考试的要求,有利于不同类型的高校选拔不同层次的考生.在每种试卷中,绝大多数客观题和主观题都是中等难度及其以下的基本问题.即便是要求较高的题目,在设问上也做了处理,采取分步设问的方法,为考生答题铺设了台阶.如数学(一)的第(19)、(20)、(22)与(23)题,数学(二)的第(19)与(22)题,数学(三)的第(19)、(22)与(23)题,这些题目的第(I)问都很基本,有利于考生入手,并逐步深入,发挥出自身的水平.

从表2各卷种在三种题型上的平均难度值可以看出,各卷种三种题型的平均难度值均在中等难度范围内,为了体现不同题型的不同考查功能,选择题较填空题、解答题容易.选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查“三基”及数学的重要性质,一般不考计算量大的题,以中、低难度的试题为主;解答题在考查基本运算的基础上,主要考查考生的逻辑推理能力和综合运用能力.试题排列有一定的坡度,因而能力要求逐渐增高,试题难度逐步增大.

表1 2014年数学各卷种抽样统计数据

| 卷种 | 样本量 | 平均分 | 难度 | 标准差 | α 信度 |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------------|
| 数学(一) | 24 817 | 66.97 | 0.446 | 29.99 | 0.866 8 |
| 数学(二) | 26 725 | 71.12 | 0.474 | 32.66 | 0.878 0 |
| 数学(三) | 21 306 | 68.64 | 0.458 | 34.47 | 0.897 2 |

表 2 2014 年数学各卷种在三种题型上的难度值

| 题型 | 数学(一) | 数学(二) | 数学(三) |
|-----|-------|-------|-------|
| 选择题 | 0.600 | 0.575 | 0.585 |
| 填空题 | 0.367 | 0.401 | 0.356 |
| 解答题 | 0.414 | 0.458 | 0.440 |

2. 区分度分析

从表 3 可以看出,数学(一)、数学(二)、数学(三)区分度在 0.2 以下的试题只有 1 道,其余试题的区分度均在 0.2 以上,数学(一)有 92%、数学(二)有 97.3%、数学(三)有 92% 的试题区分度均达到了 0.3 以上的合格水平.从考生分数分布直方图可以看出,数学(一)、数学(二)、数学(三)都呈正态分布.各卷种的标准差均在 30 左右,说明数学各卷种对考生区分良好,有利于高等院校和科研机构选拔新生.

表 3 2014 年数学各卷种区分度分布表

| 区分度区间 | 数学(一) | 数学(二) | 数学(三) |
|-----------|-------|-------|-------|
| 0.2 以下 | 2.7% | 2.7% | 2.7% |
| 0.2 ~ 0.3 | 5.3% | 0% | 5.3% |
| 0.3 以上 | 92% | 97.3% | 92% |

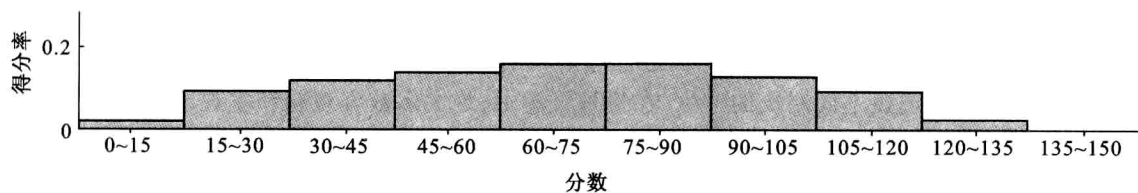


图 1 数学(一)考生分数分布直方图

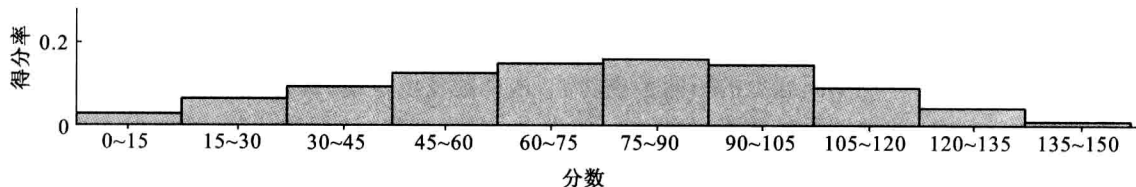


图 2 数学(二)考生分数分布直方图

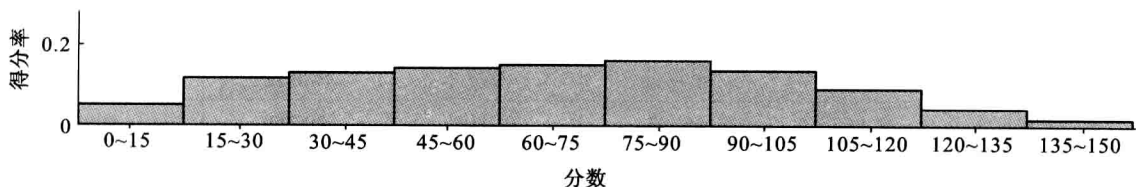


图 3 数学(三)考生分数分布直方图

三、思考与建议

1. 注重基础

从考生作答情况看,2014年的试题难度虽然不高,但考生的得分并不理想,这可能与考生群体的水平有关.从试题得分来看,常见的试题类型和知识点得分情况较好,对考试大纲中虽有要求,但在以前考试中出现频率较低的试题和内容得分情况就不好,说明考生知识掌握得不够全面,有应试倾向,不利于对知识的全面掌握和能力的全面发展.这也提醒命题人员在命题过程中要认真了解、分析当前考生的实际水平,注重试题水平与考生水平的基本吻合,在考查当年考生基本情况的基础上,因地制宜地制订当年的命题计划,使试题既体现出学科的特点,又发挥选拔的作用.

2. 加强计算能力训练

在数学试卷中,需要通过计算解答的试题占有一定的比例,而一些应用题、证明题和综合题也是通过计算完成的,因此,加强计算能力的训练是非常重要的.计算能力的培养需要掌握基本的算理、算法,更重要的是要提高运算的熟练性和准确性.运算的合理性表现在要符合算理,运算的准确性是对运算能力的基本要求,要求考生根据算理和题目的运算要求,一步一步有理有据地实施运算.在考试中体现在:运算过程中使用的概念要准确无误,使用的公式要准确无误,最终才能保证运算结果的准确无误.

四、数学(一)试题分析

1. 选择题

(1) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y=x+\sin x$. (B) $y=x^2+\sin x$. (C) $y=x+\sin \frac{1}{x}$. (D) $y=x^2+\sin \frac{1}{x}$.

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查渐近线的概念和斜渐近线的求法,是一道基本题.

【解】 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sin \frac{1}{x}}{x} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x+\sin \frac{1}{x} \right) - x \right] = 0$, 所以直线 $y=x$ 是曲线 $y=x+\sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线.

其他三条曲线 $y=x+\sin x$, $y=x^2+\sin x$ 和 $y=x^2+\sin \frac{1}{x}$ 都不存在水平渐近线和铅直渐近线. 对于曲线 $y=x+\sin x$, 尽管 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$, 但由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+\sin x) - x]$ 不存在, 所以它没有斜渐近线. 曲线 $y=x^2+\sin x$ 和 $y=x^2+\sin \frac{1}{x}$ 也都不存在斜渐近线.

本题难度值为 0.689, 区分度为 0.357.

(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上

- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查曲线的凹凸性与对应函数 2 阶导数正负号的关系,考查曲线向下凸的定义,是一道基本题.

【解】 $y=g(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0, f(0))$ 和点 $(1, f(1))$ 的割线.

在区间 $[0, 1]$ 上, 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x)$ 是下凸的函数曲线. 根据下凸函数曲线的定义, 可知 $f(x) \leq g(x)$.

选项 A 和选项 B, 条件 $f'(x) \geq 0$ 无法确定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系. 例如对于函数 $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$, 这时 $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$, 尽管总有 $f'(x) \geq 0$, 但却有 $f(\frac{1}{4}) > g(\frac{1}{4})$, $f(\frac{3}{4}) < g(\frac{3}{4})$.

本题难度值为 0.521, 区分度为 0.301.

(3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy.$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr.$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查二次积分与二重积分的关系,考查利用二次积分的积分限得到二重积分的积分域的方法,考查将二重积分在极坐标系下表示成二次积分的方法,是一道考查基本方法的常规题.

【解】 如图, $D_1 \cup D_2$ 是由 $y=0, y=1, x=-\sqrt{1-y^2}$ 和 $x=1-y$ 围成的图形. 由题意, 有

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

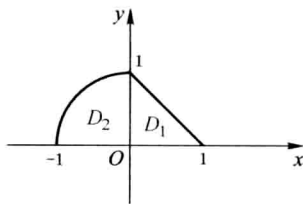
因为

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr,$$

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr,$$

所以

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$



选项 A 中的积分上限 $x-1$ 错误,选项 B 中 $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy$ 的内层积分限错误,选项 C 中的被积函数错误.

本题难度值为 0.809,区分度为 0.336.

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$

- (A) $2 \sin x$. (B) $2 \cos x$. (C) $2\pi \sin x$. (D) $2\pi \cos x$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查傅里叶级数的概念和性质,考查傅里叶系数的计算,是一道要求较高的概念题.

【解法 1】 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ 说明在函数类 $\{a \cos x + b \sin x \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 中, $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ 在均方意义下近似 x 效果最好,根据傅里叶级数的概念, a_1, b_1 就是函数 x 的傅里叶系数,所以

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) = 2,$$

从而 $a_1 \cos x + b_1 \sin x = 2 \sin x$.

【解法 2】 记 $f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$, 则

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \cos x dx = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx,$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \sin x dx = 2b \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2b\pi - 4\pi,$$

令
$$\begin{cases} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a=0, b=2, \text{ 所以}$$

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x = 2 \sin x.$$

注:解法 2 中用到了积分号下求导的运算.

本题难度值为 0.312,区分度为 0.261.

(5) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

- (A) $(ad-bc)^2$. (B) $-(ad-bc)^2$. (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$. (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查行列式的展开公式,考查特殊行列式的计算,是一道基本题.

【解】
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} -c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc) + cb(ad-bc) = -(ad-bc)^2.$$

本题难度值为 0.623, 区分度为 0.331.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查向量组线性相关、线性无关的概念, 是一道对逻辑判断能力要求较高的概念题.

【解】 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若存在实数 λ_1, λ_2 , 使得

$$\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0},$$

即 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (\lambda_1k + \lambda_2l)\alpha_3 = \mathbf{0}$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关.

取 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = \mathbf{0}$, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 但向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

综上可知, 对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要非充分条件.

本题难度值为 0.433, 区分度为 0.101.

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$

- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

【答】 应选(B).

【分析】 本题考查随机事件的运算、事件概率的性质与计算以及事件独立性的概念和应用, 是一道基本题.

【解法 1】 因为

$$P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B),$$

且

$$P(A) - 0.5P(A) = 0.3,$$

所以 $P(A) = 0.6$, 则

$$P(B-A) = P(B) - P(A)P(B) = 0.2.$$

【解法 2】 因为 $P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$, 即 $0.5 \cdot P(A) = 0.3$, 所以 $P(A) = 0.6$, 则

$$P(B-A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.2.$$

【常见问题】 本题得不出正确答案的主要原因可能是忘记了公式, 或把“独立”和“互斥”两个概念混淆了.

本题难度值为 0.817, 区分度为 0.387.

(8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$

与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则

- (A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$. (B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$.
 (C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$. (D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$.

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查随机变量的数学期望、方差的概念和计算, 并考查数学期望、方差的性质及应用, 是一道概念性较强的试题.

【解法 1】 记

$$\mu_1 = EX_1, \mu_2 = EX_2, \sigma_1^2 = DX_1, \sigma_2^2 = DX_2,$$

从而

$$\begin{aligned} EY_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy \\ &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2), \end{aligned}$$

$$EY_2 = \frac{1}{2}(EX_1 + EX_2) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2),$$

故 $EY_1 = EY_2$.

$$DY_2 = \frac{1}{4}(DX_1 + DX_2) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

$$\begin{aligned} E(Y_1^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y) dy \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \mu_2^2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} DY_1 &= E(Y_1^2) - (EY_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) - \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4}, \end{aligned}$$

因此 $DY_1 > DY_2$.

【解法 2】

$$\begin{aligned} DY_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 f_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 f_2(y) dy \\ &= \frac{1}{2} E\left(X_1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} E\left(X_2 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 \\ &\cong \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \end{aligned}$$