CENTRAL LEARNING

精益求精脱颖而出

与2003年新版教材配套

NEW

新版

➡ 全面细致：按章、节顺序，同步到节。从“重点分析”到“难点突破”；从“课内”到“课外”；从基础到综合；从平时到中(高)考，均做了全面、细致讲解。

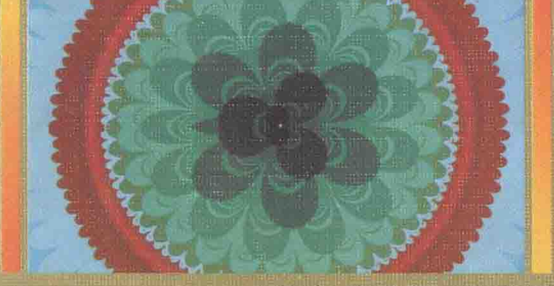
例题经典、开放、实际；解法规范，示范性强；习题精练，强化作用大。

通过本书，你一定会达到：知识理解深刻、掌握牢固；目标思维(方法)灵活，运用自由。

丛书主编 吴万用 孙金冠宇

核心学习

全析全解与完全检测



初三数学 代数

主编 张雪英 陈学军

黑龙江少年儿童出版社

CENTRAL LEARNING

核心学习

全析全解与完全检测

初三数学 代数

主编 张雪英 陈学军

黑龙江少年儿童出版社

责任编辑　宣　森

核心学习全析全解与完全检测

初　三　数　学(代数)

黑龙江少年儿童出版社出版、发行(哈尔滨市南岗区宣庆小区8号楼)

哈尔滨铁路局印刷厂印刷

开本 787×960(毫米)　1/16 · 印张 27.75 · 字数 706 千字

2003 年 6 月第 3 版　2003 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-5319-1874-9/G · 1253　　定价:28.00元(共二册)

前 言

如何培养新世纪的优秀人才，是摆在广大教师及学生家长面前的一个重大课题。根据教育部审批通过的新版教材、教学大纲及最新教改方案，贯彻素质教育精神应着眼于素质、能力的培养，正确处理教学中讲、练、测各环节的关系。根据多年的教学实际与经验，我们认为："讲"与"练"是学生学习过程中最重要的环节，讲的精、教的明白，学的才清楚；练的透、练到位，才能真正巩固所学知识。编写课外辅导书的目的是为了帮助学生更好地理解、掌握现行教材，起到教师在课堂教学中所难以起到的作用。因此，这类书在内容上应较现行教材对知识点的阐述更详尽透彻，能力训练上更系统、更集中、更全面，而且在体例设计上要符合学生的认识规律。本丛书就是以此为宗旨精心编写的。

丛书特点

全面细致，与现行教材同步，按章、节顺序，同步到节。从"重点精析"到"难点突破"；从"课内"到"课外"；从"基础"到"综合"；从"平时"到"中(高)考"，均做了全面、细致的讲解。

例题经典、开放、实际；解法规范，示范性强；习题精练，强化作用大。

教材全析全解，例题全析全解，习题全析全解，是本丛书的又一大特点。

所设栏目

核心学习

重点精析：深入浅出，举例典型，示范性强。

难点突破：难点确切，解析透彻，突破有方。

经典例题剖析：例题经典，开放实际，剖析有方。

中考点・命题方向与点拨：方向明确，学有目标；真题举例，练有楷模；贴近试题，权威预测。

跟踪完全检测：选题经典全面，梯度合理，题量科学。

历届中(高)考真题回顾:回顾过去,探寻规律,展望未来,学有方向。

单元综合能力测试:选题新颖、广泛,是对本单元(章)所学知识的综合验收。

用心指点

本书与现行教材同步配套,知识要点准确、精炼,举例新颖精细,讲解深入浅出,内容全面丰富,是初、高中学生不可缺少的学习辅导书,特别是对知识点的提炼与讲解,对重点、难点的分析与突破,对解题思路、技巧的分析,对知识的巩固与提高,对期中、期末考试的要求,均有独到见解。使用本书后,留给学生的第一印象就是:像老师讲课一样清晰明了,通俗易懂,亲切而实在;训练有方,以一当十,有助于提高学生的智力和能力。

名师典范

参加本丛书编写的作者都是教学第一线上有声望、有丰富教学经验的教师,他们对教材内容烂熟于心,对教改情况一清二楚,这一切无疑确保了本书的权威性、科学性和实用性。

本书编者

本书主编张雪英、陈学军。

编委会

2003.5

目录

第十四章 统计初步

第十二章　一元二次方程

(一)一元二次方程

1 用公式解一元二次方程

核心学习

学习目标

1. 知道一元二次方程的含义;

2. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程,会用直接开平方法解形如$(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$的方程;

3. 初步掌握用配方法解一元二次方程,会用配方法解数字系数的一元二方程;

4. 掌握一元二次方程的求根公式的推导,能够运用求根公式解一元二次方程.

中考要求

1. 了解一元二次方程的概念,会用直接开平方法解形如$(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$的方程,用配方法解数字系数的一元二次方程.

2. 掌握一元二次方程求根公式的推导,会用求根公式解一元二次方程.

重点精析

重点 1 整式方程和一元二次方程的含义及一元二次方程的一般式.

整式方程:方程两边都是关于未知数的整式,这样的方程叫做整式方程.

注意　这里所说的整式是关于未知数的整式,有的含有字母系数的方程,尽管分母中含有字母,但只要分母中不含未知数,这样的方程仍是整式方程.

例　$x^2+\frac{n}{m}x+p=0(m\neq 0)$是关于$x$的整式方程.

一元二次方程:只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的整式方程,叫做一元二次方程.

例　方程①$2x^2-x-3=0$;②$t^2=2$;③$x^2+5y=7$;④$x^3-x^3=1$;⑤$\frac{1}{x^2}-3=0$;⑥$\sqrt{x^2-x}=2$,哪些是一元二次方程,哪些不是.

解题思路　关于一元二次方程的定义,应抓住三点:
(1)是整式方程;
(2)含有一个未知数;
(3)未知数的最高次数是2,三者缺一不可.

【解】　方程③不满足第(2)条,④不满足第(3)条,⑤⑥不满足第(1)条.

【答案】　方程①②是一元二次方程.③④⑤⑥不是一元二次方程.

一元二次方程的一般式:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,其中ax^2叫做二次项,a为二次项系数,bx为一次项,b为一次项系数,c为常数项.一般式的特

征是:等式的左边是一个关于未知数的二次多项式,等式右边是零.

例1　把下列方程化成一般形式,并求出它的二次项、一次项、二次项系数、一次项系数及常数项.

(1) $5x=4+x^2$;

(2) $x(3x+2)-1=0$.

所考知识点　对一元二次方程的一般式及有关概念的理解.

解题思路　做此类习题应抓住以下几点:

(1)任何一个一元二次方程,经过整理,都可以化成一般式;

(2)二次项系数、一次项系数、常数项都是在方程一般形式下定义的,所以要求一元二次方程各项系数时,必须先将方程化为一般形式;

(3)要分清二次项与二次项系数,一次项与一次项系数.

【解】

方程	$5x=4+x^2$	$x(3x+2)-1=0$
一般形式	$x^2-5x+4=0$	$3x^2+2x-1=0$
二次项	x^2	$3x^2$
一次项	$-5x$	$2x$
二次项系数	1	3
一次项系数	-5	2
常数项	4	-1

注意　①"$a\neq0$"是一元二次方程一般形式的一个重要组成部分.因为方程 $ax^2+bx+c=0$,只有当 $a\neq0$ 时,它才是一元二次方程.

②在确定二次项系数、一次项系数、常数项时、不要漏写各项的符号.

③如果一般形式中二次项系数是负数,最好将方程各项都乘以 -1,使二次项系数变为正数.这样方便以后对一元二次方程及有关问题的研究与计算.

重点2　一元二次方程的三种解法

①直接开平方法:直接开平方法是建立在数的开方的基础上,直接开平方法的理论依据是平方根的定义,如果一元二次方程的一边是含有未知数的一次式的平方,另一边是非负数,就可以用直接开平方法来解.

例1　解方程:$(x-a)^2=b(b\geqslant0)$

所考知识点　用直接开平方法解一元二次方程.

解题思路　此方程的左边是 $(x-a)^2$,右边是 b(非负数),适合用直接开平方法.

【解】　因为 $x-a$ 是 b 的平方根,所以

$x-a=\pm\sqrt{b}$

即:$x-a=\sqrt{b}$ 或 $x-a=-\sqrt{b}$

$\therefore x_1=a+\sqrt{b}\quad x_2=a-\sqrt{b}$

【答案】　$x_1=a+\sqrt{b}\quad x_2=a-\sqrt{b}$

注意　因为负数没有平方根,当 $b<0$ 时,方程 $(x-a)^2=b$ 无解.

②配方法:用配方法是以直接开平方法为基础的,配方法的理论依据是公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$,这里的二次项系数是1,由此推出的配方法也只适用于二次项系数是1的一元二次方程,若二次项系数不是1的一元二次方程应化成二次项系数为1.

用配方法解一元二次方程的一般步骤:

1)把二次项系数化成1;

2)使方程的左边为含有未知数的项,右边为常数项;

3)方程两边各加上一次项系数一半的平方;

4)原方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式;

5)如果 n 为非负数,就可以用直接开平方法求出方程的解.

例1　用配方法解下列方程.

(1) $x^2-3x-2=0$

(2) $3x^2-6x-1=0$

所考知识点　用配方法解一元二次方程.

解题思路	方程(1)的二次项系数已经是1,所以直接移项,配方,求解即可. 方程(2)的二次项系数不是1,需要先把二次项系数化成1.

【解】 (1)移项,得 $x^2-3x=2$

配方,得 $x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=2+(\frac{3}{2})^2$

即 $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{17}{4}$

$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

$x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\therefore x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}, x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$

(2)方程两边都除以3,得:

$x^2-2x-\frac{1}{3}=0$

移项,得 $x^2-2x=\frac{1}{3}$

配方,得 $x^2-2x+1^2=\frac{1}{3}+1^2$

$(x-1)^2=\frac{4}{3}$

解这个方程得 $x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$x=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore x_1=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】 (1)$x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

(2)$x=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③公式法:公式法即用求根公式解一元二次方程的方法,公式法是配方法直接求出的结果.

公式法是一元二次方程的通用解法,后面将要学习的内容,如根的判别式、根与系数关系等都是以求根公式为出发点的,因此一元二次方程的求根公式是本章的重点.

用公式法解一元二次方程的一般步骤:

1)把一元二次方程化成一般形式;

2)确定 a、b、c 的值;

3)计算 b^2-4ac 的值;

4)当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,把 a、b、c 的值代入求根公式,求得方程的两个实根,若 $b^2-4ac<0$,则方程无实根.

例1 用公式法解方程:$x^2+1=2\sqrt{2}x$

所考知识点 用公式法解一元二次方程.

解题思路	先将方程化成一般形式,确定 a、b、c 的值. 再代入公式求值.

【解】 将方程化为一般形式:$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$\because a=1, b=-2\sqrt{2}, c=1$

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times1=8-4=4>0$

$\therefore x=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\pm2}{2}=\sqrt{2}\pm1$

$\therefore x_1=\sqrt{2}+1, x_2=\sqrt{2}-1$

【答案】 $x=\sqrt{2}\pm1$

难点突破

➡ 难点1 对一元二次方程的确定和一般形式的正确理解.

例如 $ax^2+bx+c=0$ 就不能判断它是不是一元二次方程,当 $a=0,b\neq0$ 时,它就是一元一次方程;当 $a\neq0$ 时,它才是一元二次方程,但如果题设已明确指出方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程,那么 a 必定不等于零,这时 $a\neq0$ 的条件就被隐含在题设中.

另外,判断是否是一元二次方程,还应注意不能看表面观察. 例如 $x^2+xy+2x-xy+\frac{1}{3}=0$,经过合并同类项后为 $x^2+2x+\frac{1}{3}=0$,它实质上是一元二次方程,又如 $x^2+5x+3=x^2+3$ 为一元一次方程.

➡ 难点2 在解方程时对各种方法的选择.

突破这一难点的关键是在对三种方法都会使

用的基础上,熟悉各种方法的优缺点,处理好特殊方法和一般方法的关系.

在三种方法中,公式法是一般方法,因为只要化成一般式的就可以找到 a、b、c,在方程有实根的情况下,即可用求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求值,但对于特殊的方程而言,它又显得复杂了.

例 选择适当方法解下列方程.

(1) $\frac{1}{2}(x+3)^2=2$

(2) $x^2-5\sqrt{2}x+2=0$

【解】 (1)用直接开平方法.

$\frac{1}{2}(x+3)^2=2$

$(x+3)^2=4$

$x+3=\pm2$

$\therefore x_1=-1, x_2=-5$

【答案】 $x_1=-1, x_2=-5$

【说明】 符合 $ax^2=c(a\neq0)$ 型的方程,若有解,用直接开平方法较简单,解题时先化成 $x^2=\frac{c}{a}$ 形式再解,一般方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,当 $b=0$ 时,用直接开平方法较好.

(2)用公式法解方程,$x^2-5\sqrt{2}x+2=0$

$\because a=1, b=-5\sqrt{2}, c=2$

$b^2-4ac=(-5\sqrt{2})^2-4\times1\times2=50-8=42>0$

$\therefore x=\frac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{42}}{2\times1}$

$\therefore x_1=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{42}}{2}, x_2=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{42}}{2}$

【答案】 $x_1=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{42}}{2}, x_2=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{42}}{2}$

【说明】 一般当方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,a、b、c 不缺项,且系数为无理数时,即可用公式法.

经典例题剖析

经典例题1 直接开平方法解下列方程.

(1) $36x^2-\sqrt{49}=0$

(2) $2(5x-1)^2=24$

所考知识点 $(ax-b)^2=c(c\geqslant0)$ 型的一元二次方程的基本解法.

解题思路 用直接开平方法解方程,需将原方程化成 $(ax-b)^2=c(c\geqslant0)$ 形式,再根据平方根的定义求解.

【解】 (1)移项,得 $36x^2=\sqrt{49}$

两边都除以36,得 $x^2=\frac{7}{36}$

$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{6}$

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{7}}{6}, x_2=-\frac{\sqrt{7}}{6}$

(2)方程两边都除以2,得 $(5x-1)^2=12$

$5x-1=\pm\sqrt{12}$

即 $5x-1=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore 5x=1\pm2\sqrt{3}$

$x=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{5}$

$\therefore x_1=\frac{1+2\sqrt{3}}{5}, x_2=\frac{1-2\sqrt{3}}{5}$

【答案】 (1) $x_1=\frac{\sqrt{7}}{6}, x_2=-\frac{\sqrt{7}}{6}$

(2) $x_1=\frac{1+2\sqrt{3}}{5}, x_2=\frac{1-2\sqrt{3}}{5}$

经典例题2 用配方法解方程 $5x^2-6x+1=0$

所考知识点 配方法解一元二次方程.

解题思路 由于此题的二次项系数不为1,需要先将二次项系数化成1,再配方,配方的关键是方程两边同加一次项系数一半的平方.

【解】 方程两边同除以5,并移项,得:

$x^2-\frac{6}{5}x=-\frac{1}{5}$

配方,得 $x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{9}{25}$

$(x-\frac{3}{5})^2=\frac{4}{25}$

解这个方程得：$x-\frac{3}{5}=\pm\frac{2}{5}$

$x=\frac{3}{5}\pm\frac{2}{5}$

$\therefore x_1=1,x_2=\frac{1}{5}$

【答案】 $x_1=1,x_2=\frac{1}{5}$

经典例题 3 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+2=4\sqrt{2}x$

(2) $3x^2+2x+1=0$

(3) $t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{1}{8}=0$

所考知识点：求根公式的使用.

解题思路　用公式法解题的关键是先把方程化成一般式，再确定 a、b、c 的值，代入求根公式即可，方程(1)需移项化成一般式．方程(3)把系数的分母化去再计算较简便.

【解】 (1)移项得方程的一般形式

$x^2-4\sqrt{2}+x=0$

$\because a=1,b=-4\sqrt{2},c=2$

$b^2-4ac=(-4\sqrt{2})^2-4\times1\times2$

$=32-8=24>0$

$\therefore x=\frac{-(-4\sqrt{2})\pm\sqrt{24}}{2\times1}$

$=\frac{4\sqrt{2}\pm2\sqrt{6}}{2}$

$=2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$

$\therefore x_1=2\sqrt{2}+\sqrt{6},x_2=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

(2) $\because a=3,b=2,c=1$

$b^2-4ac=4-4\times3\times1=-8<0$

$\therefore$ 原方程没有实数根.

(3)方程两边同时乘以 8，化去分母得：

$8t^2-4\sqrt{2}t+1=0$

$\because a=8,b=-4\sqrt{2},c=1$

$b^2-4ac=(-4\sqrt{2})^2-4\times8\times1=0$

$\therefore t=\frac{-(-4\sqrt{2})\pm\sqrt{0}}{2\times8}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{16}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore t_1=t_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】 (1) $x=2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$

(2)没有实数根.

(3) $t_1=t_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$

注意

①a、b、c 的值要带符号，避免符号错误.

②方程有解的前提条件是 $b^2-4ac\geq0$，方程(2) $b^2-4ac<0$ 所以无解.

③方程(3)是关于未知数 t 的方程，不要写成 x. 此题中 $b^2-4ac=0$，结果为 $t_1=t_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，这表明原方程有两个根，不要写成 $t=\frac{\sqrt{2}}{4}$，从而丢一个解.

中考点·命题方向与点拨

考点 1 考查一元二次方程的定义.

命题方向　**主要出现在填空题、判断题和选择题中.**

例　$px^2-3x+p^2-p=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则(　　).

A. $p=1$　　　　B. $p>0$

C. $p\neq0$　　　　D. p 为任意实数

所考知识点：主要考查一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中 $a\neq0$ 的条件，只是换个字母.

【答案】 选择 C.

考点 2 考查一元二次方程一般式及有关概念.

命题方向　**常出现在填空题中.**

例　方程 $(x+3)(3x-4)=(x+3)^2$ 的二次项系数为________，一次项系数为________，常数项为________.

所考知识点：对一元二次方程的一般式及有关概念的理解.

解题思路 先把方程化成一般式,再确定系数.

【解】 去括号得 $3x^2-4x+9x-12=x^2+6x+9$

移项,合并同类项得:$2x^2-x-21=0$

故二次项系数是 2,一次项系数是 -1,常数项是 -21.

【答案】 2, -1, -21.

➡ 考点 3 一元二次方程的解法.

命题方向 **常出现在填空题或选择题中.**

例 一元二次方程 $(3x+1)^2=4$ 的根为________.

所考知识点 一元二次方程的解法——直接开平方法.

解题思路 此题符合 $(ax+b)^2=c(c\geqslant 0)$ 形式,适合用直接开平方法来解.

【解】 $\because (3x+1)^2=4$

$\therefore 3x+1=\pm 2$

$3x=-1\pm 2$

$\therefore x_1=-1, x_2=\dfrac{1}{3}$

【答案】 $x_1=-1, x_2=\dfrac{1}{3}$

例 方程 $x^2=x+1$ 的根是(　　).

A. $x=\sqrt{x+1}$　　B. $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\pm\sqrt{x+1}$　　D. $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

所考知识点 一元二次方程解法及一元二次方程求根公式的应用.

解题思路 此题的方程的另一边含有未知数,不能用直接开平方法,应用求根公式求解.

【解】 移项,得 $x^2-x-1=0$

$\because a=1, b=-1, c=-1$

$b^2-4ac=1+4=5>0$

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

【答案】 选择 B.

跨学科综合能力导析

范例 一个物体从高处自行落下,物体落下的高度 h(单位:米)与所用时间 t(单位:秒)的关系是 $h=4.9t^2$,如果一个物体从 100 米的高度落下,到地面需多少时间(精确到 0.1 秒)?

跨学科知识 物理学中自由物体落下,高度 h 与时间 t 的关系是 $h=4.9t^2$

解题思路 把 $h=100$ 代入关系式 $h=4.9t^2$ 中,再用直接开平方法解方程即可.

【解】 把 $h=100$ 代入 $h=4.9t^2$ 中得:

$4.9t^2=100$

$t^2=\dfrac{100}{4.9}=\dfrac{1000}{49}$

$\therefore t=\pm\sqrt{\dfrac{1000}{49}}=\pm\dfrac{10}{7}\sqrt{10}\approx\pm 4.51\approx\pm 4.5$

由于时间不能为负

故 $t=4.5$.

【答案】 落到地面约需要 45 秒.

跟踪完全检测题

A 级题　　基础知识

1. 填写下表

一元二次方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$4x^2+7=3x$				
$(x-3)(x+3)=0$				
$2x^2=0$				
$x(x+\sqrt{2})=0$				

2. 填空题

(1)方程 $x^2=2$ 的解为________

(2)用适当的数填空:

①x^2-3x+________$=(x-$________$)^2$

②x^2+7x+________$=(x+$________$)^2$

③$x^2-\dfrac{3}{5}x+$________$=(x-$________$)^2$

④$x^2-2(a+b)x+$________ $=(x-$________$)^2$

⑤$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\right.$________$\left.\right)=a(x+$________$)^2$

3. 选择题:

(1)下列方程中,是未知数 x 的整式方程的是(　　).

A. $\frac{1}{x}=x$;　　B. $\sqrt{x-1}=1$;

C. $\frac{1}{\sqrt{x-1}}=2$;　　D. $x^2-4x=0$.

(2)$ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的条件是(　　).

A. a,b,c 为任意实数;

B. a 与 b 不同时为零;

C. a 取不为零的实数;

D. b 与 c 不同时为零.

(3)方程$(x+2)^2=4$ 的根(　　).

A. $x_1=4,x_2=-4$;　　B. $x_1=-4,x_2=0$;

C. $x_1=0,x_2=2$;　　D. $x_1=4,x_2=0$.

(4)对于形如$(x+m)^2=n$ 的方程,它的解的正确表达为(　　).

A. 都可以用直接开平方法求得,且 $x=\pm\sqrt{n}$;

B. 当 $n\geqslant0$ 时,$x=m\pm\sqrt{n}$;

C. 当 $n\geqslant0$ 时,$x=\pm\sqrt{n}-m$;

D. 当 $n\geqslant0$ 时,$x=\pm\sqrt{n-m}$.

(5)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根是零的条件为(　　).

A. $b\neq0$ 且 $c=0$;　　B. $b=0$ 且 $c\neq0$;

C. $b=0$ 且 $c=0$;　　D. $c=0$.

4. 计算题

(1)用直接开平方法解下列方程:

①$9-4x^2=0$;

②$(2y-1)^2=2$;

③$4(x-3)^2=225$;

④$(3t-4)^2=(4t-3)^2$.

(2)用配方法解下列方程:

①$x^2-2x=224$;

②$3y^2-2y-5=0$.

(3)用公式法解下列方程:

①$x(x+1)=12$;

②$x^2-x-1=0$;

③$0.2y^2-0.1=0.4y$;

④$4y^2-(\sqrt{2}+8)y+\sqrt{2}=0$.

B 级题　　能力提高

1. 填空题

(1)$ax^3+bx^2+cx+d=0$,是关于 x 的一元二次方程的条件是________;是关于 x 的一元一次方程的条件是________.

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,若 $a+b+c=0$,则方程必有一个根为 $x=$________.

2. 选择题

(1)下列方程,是一元二次方程的是(　　).

A. $x(ax+b)=c$;

B. $(2x+1)(3x-2)=6x^2$;

C. $x^2-xy-2y^2=0$;

D. $(x-2)^2=(2x+1)^2$.

(2)已知一元二次方程 $mx^2+n=0(m\neq0)$,若方程有解则必须是(　　).

A. $n=0$;

B. $n=0$ 或 m,n 异号;

C. n 是 m 的整数倍;

D. m,n 同号.

CENTRAL LEARNING

2 用因式分解法解一元二次方程

核心学习

学习目标

1. 用因式分解法解某些一元二次方程.

2. 根据题目的具体情况,灵活选取适当的方法解一元二次方程.

中考要求

会用因式分解法解一元二次方程.

重点精析

重点1 利用因式分解法解一元二次方程

因式分解法是把一元二次方程转化成两个一元一次方程来解,突出了"降次"转化求解的思想方法. 它的理论根据是:如果两个因式的积等于零,那么这两个因式至少有一个等于零. 当一元二次方程的一边是零,而另一边易于分解成两个一次因式时,就可以用因式分解法来解.

例 用因式分解法解方程 $x^2+x-2=0$

所考知识点 用因式分解法解一元二次方程.

解题思路 本题的右边是0,左边比较容易分解成两个一次因式$(x+2)$、$(x-1)$,所以适合用因式分解法.

【解】 原方程变形为$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x+2=0$ 或 $x-1=0$

$\therefore x_1=2, x_2=1$

【答案】 $x_1=-2, x_2=1$

注意 用因式分解法解一元二次方程的步骤:

①把一元二次方程化成一般形式;

②当方程的左边分解成两个一次因式的积;

③令两个因式分别等于零,得到两个一元一次方程;

④解这两个一元一次方程,它们的解就是原方程的解.

重点2 灵活选择一种方法解一元二次方程

学习一元二次方程的四种解法:①直接开平方法;②配方法;③公式法;④因式分解法. 灵活地选择一种方法解一元二次方程,关键是熟悉四种方法,认真分析观察所给题目的特点,选择要适当,会使解题简便易解,而对于有些方程方法也不是唯一的,任意一个一元二次方程都可用公式法求解,但用因式分解有时更简单.

例 解方程 $3x^2-5x-2=0$

所考知识点 灵活选择恰当的方法解方程.

解题思路 此题所给的方程不是$(ax+b)^2=c(c\geqslant0)$的形式,因此,它适合用直接开平方法. 此题可用配方法、公式法求解,由于此方程右边是0,左边用十字相乘法可把它分解成两个一次因式的积,所以此方程也可用因式分解求解,下面分别用配方法、公式法、因式分解法解此方程.

【解】 配方法:

方程各项都除以3,移项得:

$$x^2=\frac{5}{3}x=\frac{2}{3}$$

配方,得:

$$x^2-\frac{5}{3}x+(\frac{5}{6})^2=\frac{2}{3}+(\frac{5}{6})^2$$

$$(x-\frac{5}{6})^2=\frac{49}{36}$$

解这个方程得:

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6}$$

$$\therefore x_1=2, x_2=-\frac{1}{3}$$

公式法：

$\because a=3, b=-5, c=-2$

$b^2-4ac=25+24=49>0$

$\therefore x=\dfrac{5\pm+\sqrt{49}}{2\times3}=\dfrac{5\pm7}{6}$

$\therefore x_1=2, x_2=-\dfrac{1}{3}$

因式分解法：

原方程可变形为：

$(3x+1)(x-2)=0$

$\therefore 3x+1=0$ 或 $x-2=0$

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{3}, x_2=2$

$$\begin{array}{ll} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline 1 & -6=-5 \end{array}$$

【答案】 $x_1=-\dfrac{1}{3}, x_2=2$

注意 ①从上面三种方法可以看出解一元二次方程最简便的方法是因式分解法.

②解一元二次方程方法选择顺序：直接开平方法→因式分解法→公式法.

③除非有特殊说明，一般不用配方法，因为配方法较麻烦.

难点突破

➡ **难点1** **本节的难点是解方程是否能用因式分解法，怎样分解，关键在于熟悉什么样的式子可以因式分解．即学好多项式因式分解是突破此难点的关键所在．**

☞**例1**　解方程

(1) $(\sqrt{3}+1)x^2-x=0$

(2) $2(3x-2)=(2-3x)(x+1)$

解题思路 方程(1)右边为0，且左边有公因式可进行因式分解，可用因式分解法来解．方程(2)，当方程移项后，可变为 $2(3x-2)+(3x-2)(x+1)=0$，同样有公因式可分解.

【解】 (1) $(\sqrt{3}+1)x^2-x=0$

$x[(\sqrt{3}+1)x-1]=0$

$\therefore x=0$ 或 $(\sqrt{3}+1)x-1=0$

$\therefore x_1=0, x_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

(2) $2(3x-2)=(2-3x)(x+1)$

$2(3x-2)+(3x-2)(x+1)=0$

$\therefore (3x-2)[2+(x+1)]=0$

$\therefore 3x-2=0$ 或 $2+(x+1)=0$

$\therefore x_1=\dfrac{2}{3}, x_2=-3$

【答案】 (1) $x_1=0, x_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) $x_1=\dfrac{2}{3}, x_2=-3$

【说明】 解方程(2)型的方程，千万注意两边不能同除以 $(3x-2)$ 这样一个含有未知数的代数式，否则就丢掉了 $x=\dfrac{2}{3}$ 的根，应引起大家的注意.

☞**例2**　解方程：$x^2-m(3x-2m+n)-n^2=0$

【解】 整理后得 $x^2-3mx+(2m^2-mn-n^2)=0$

$\because a=1, b=-3m, c=2m^2-mn-n^2.$

$b^2-4ac=(-3m)^2-4\times1\times(2m^2-mn-n^2)$

$=m^2+4mn+4n^2$

$=(m+2n)^2\geqslant0$

$\therefore x=\dfrac{3m\pm\sqrt{(m+2n)^2}}{2}=\dfrac{3m\pm(m+2n)}{2}$

$\therefore x_1=2m+n \qquad x_2=m-n.$

注意 用公式法解字母系数方程时，因为只有在 $b^2-4ac\geqslant0$ 时才能用公式法，所以必须整理成非负数的形式，这个整理对同学很吃力．笔者从数十年的教学中发现，初中阶段解字母系数方程的题的解都是有理式，因此不妨用因式分解解方程更为简便．仍以上题为例讲解：

【解】 整理得 $x^2-3mx+(2m^2-mn-n^2)=0$

$x^2-3mx+(2m+n)(m-n)=0$

$[x-(2m+n)][x-(m-n)]=0$

$\therefore x_1=2m+n \qquad x_2=m-n.$

【答案】 $x_1=2m+n, x_2=m-n$

经典例题剖析

经典例题 1　用因式分解法解方程.

(1) $x^2-5x=0$

(2) $3(x-4)^2=5(4-x)$

(3) $(t+2)(t-1)=10$

所考知识点 因式分解法解一元二次方程.

解题思路　方程(1)的右边是0,左边可用提公因式法分解;方程(2)直接去括号麻烦,若两边同除以$(x-4)$或$(4-x)$,丢解,所以应先移项,使方程的右边是0,左边可分解因式,方程(3)应先移项,使方程的右边是0,左边去括号,合并同类项,再分解因式.

【解】 (1)原方程可变形为

$x(x-5)=5$

$\therefore x=0$ 或 $x-5=0$

$\therefore x_1=0, x_2=5$

(2)原方程可变形的:

$3(x-4)^2-5(4-x)=0$

$3(x-4)^2+5(x-4)=0$

$(x-4)(3x-12+5)=0$

$(x-4)(3x-7)=0$

$\therefore x-4=0$ 或 $3x-7=0$

$\therefore x_1=4, x_2=\dfrac{7}{3}$

(3)原方程可变形为:

$t^2+t-2-10=0$

$t^2+t-12=0$

$(t+4)(t-3)=0$

$\therefore t+4=0$ 或 $t-3=0$

$\therefore t_1=-4, t_2=3$

【答案】 (1)0,5　(2)4,$\dfrac{7}{3}$　(3)-4,3

经典例题 2　用不同的方法解方程 $x^2+7x=18$

所考知识点 一元二次方程的各种解法,及各种方法适用情况.

解题思路　本题所给的方程不是$(ax+b)^2=c(c\geqslant 0)$的形式,不能用直接开平方法,其他三种方法:配方法、公式法、因式分解法均适用.

【解】 方法一:配方法.

方程两边都加上 $(\dfrac{7}{2})^2$,得:

$x^2+7x+\dfrac{49}{4}=18+\dfrac{49}{4}$

$(x+\dfrac{7}{2})^2=\dfrac{121}{4}$

$\therefore x+\dfrac{7}{2}=\pm\dfrac{11}{2}$

$\therefore x+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}$ 或 $x+\dfrac{7}{2}=-\dfrac{11}{2}$

$\therefore x_1=2, x_2=-9$

方法二:公式法.

移项得:$x^2+7x-18=0$

$\because a=1, b=7, c=-18$

$b^2-4ac=49+72=121>0$

$\therefore x=\dfrac{-7\pm\sqrt{121}}{2\times 1}=\dfrac{-7\pm 11}{2}$

$\therefore x_1=2, x_2=-9$

方法三:因式分解法.

移项得:$x^2+7x-18=0$

方程左边因式分解得:

$(x+9)(x-2)=0$

$\therefore x+9=0$ 或 $x-2=0$

$\therefore x_1=-9, x_2=2$

【答案】 $x_1=-9, x_2=2$

经典例题 3　用适当的方法解下列方程.

(1) $(2-3x)(x+4)=(3x-2)(1-5x)$

(2) $(2y-1)^2=16(y+2)^2$

(3) $(x+4)^2-(x+5)^2=24+3x-(x-3)^2$

(4) $\sqrt{2}y^2+4\sqrt{3}y=2\sqrt{2}$

所考知识点 根据方程的特点选择适当的方法解方程.

解题思路　方程(1)经过适当的变形可提取公因式$(2-3x)$,因此此方程适合用因式分解法. 方程(2)经过移项后,可用平方差公式分解因式,因