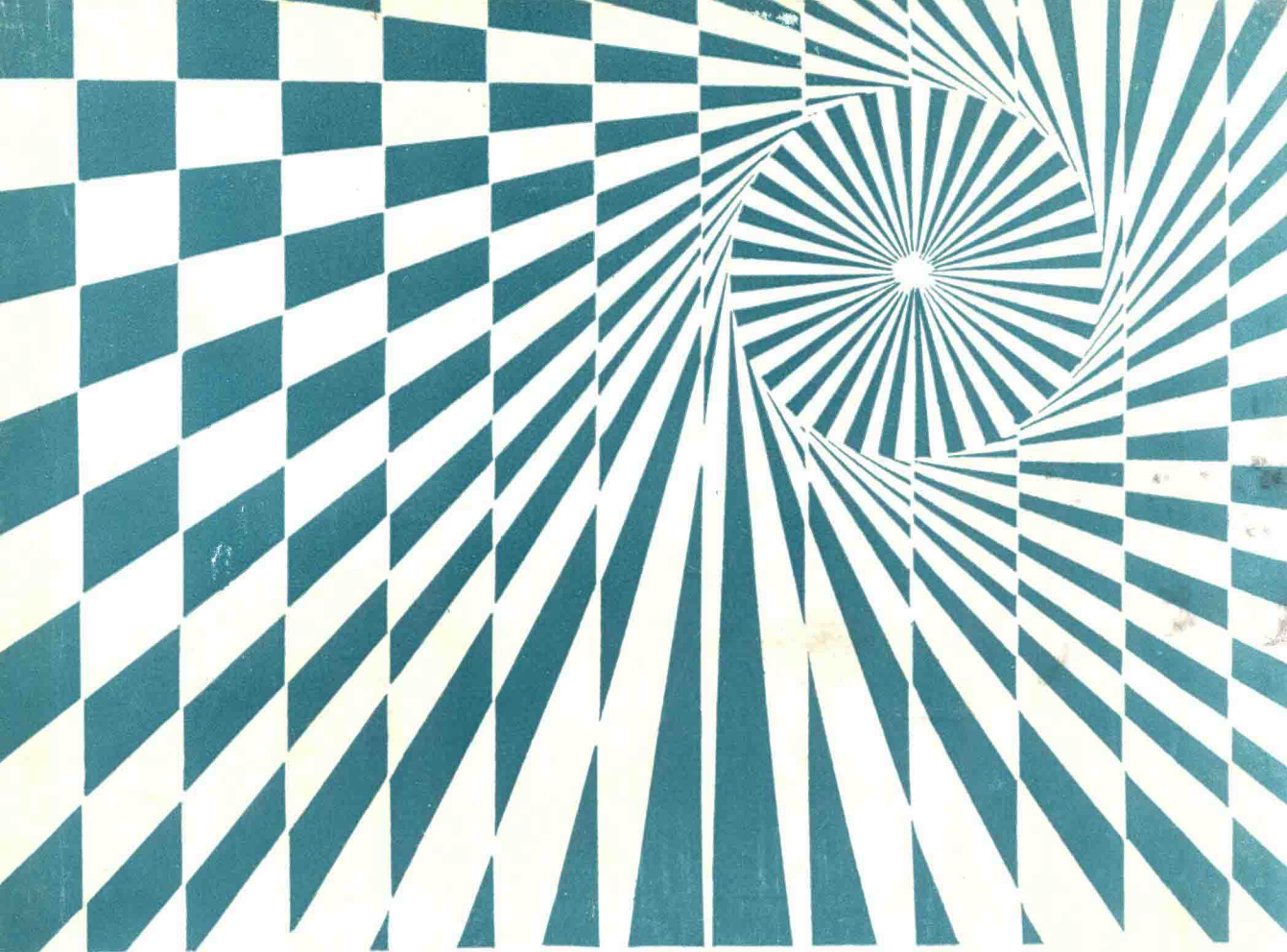




工业系统建模

顾钟文 杨双华 编著

浙江大学出版社

工业系统建模

顾钟文 杨双华 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

浙江大学出版社

内容提要

本书从“应用”的角度介绍了工业过程建模的基本方法,并列举了工业对象建模实例,理论联系实际,便于自学。

全书分上、下两篇。上篇为机理建模,介绍化工单元及工业过程机理建模的理论基础和建模方法,高阶模型的降阶方法及对复杂系统直接建立简化模型的方法等。下篇为系统辨识,主要内容:有关数学基础——随机过程简述,线性系统的辨识方法,包括试验设计、模型结构辨识、模型参数估计及模型适用性检验等。

本书是工业自动化及相关专业继续工程教育系列教材之一,也可作高等学校高年级大学生和研究生的教学参考书。

工业系统建模

顾钟文 杨双华 编著

责任编辑 王 宇

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社电脑排版中心排版

浙江建德印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

787×1092 16开 1375印张 345千字

1995年6月第1版 1995年6月第1次印刷

印数:0001—1500

ISBN 7-308-01342-1/TP·110 定价:14.00元

出版说明

生产过程的大型化、复杂化和连续化,要求生产控制自动化。为此,国内外已广泛应用具有十分方便和友好人机界面的集散型计算机及其它自动化装置,对生产过程进行监督、控制和管理,从而改变了人在生产中的地位;同时运用现代控制理论、系统工程和计算机科学中的最新成果及它们的有机结合,研究、开发与设计先进的工业控制策略与系统,并应用于生产控制,从而提高企业的经济效益。

为了适应国内外自动化发展的形势及贯彻国家经委、国家科委和中国科协经教[1987]676号文关于《企业科技人员继续教育暂行规定》的通知精神,中国石化总公司从1988年起连续四年委托浙江大学举办“化工自动化及仪表”专业工程师进修班。浙江大学工业控制研究所着眼于提高企业科技人员的知识深度、拓宽知识面、增强技术改造、技术攻关的创造能力,结合多年的教学和科学研究实践经验,为进修班设置了“线性系统理论”、“工业过程模型化”、“工业过程计算机仿真”、“最优化与最优控制”、“集散型计算机控制系统”和“高级过程控制”等课程,并编写了相应的教材。

考虑到模型化、计算机和控制学科已遍及众多部门和领域,贯穿其中的思想和方法已用于经济与社会现象的研究,这些领域的科技人员亦有继续教育的愿望,为此,现在特将这套教材整理出版。这套教材既反映了这些学科的基本理论,又反映浙江大学工业控制研究所近几年工业过程控制研究实践的成果。希望这套教材既能为工业自动化以及相关领域的科学工作者和工程技术人员提供一套较为系统的继续教育教材,也能为在校大学生和研究生提供有价值的参考书。

组编和出版这套教材是一次尝试。我们热忱欢迎选用和阅读这套教材的同志提出批评、建议。

浙江大学工业自动化国家工程研究中心
中国石油化工总公司人事部
一九九四年六月

前言

一个系统的数学模型是表征该系统特性的物理量之间关系的定量表达式,是对该系统运动规律的一种数学描述。

随着生产过程大型化、复杂化程度的提高,对过程控制提出了更高的要求,控制理论的应用也日益广泛。但是,控制理论的实际应用不能离开系统的数学模型,可以说,数学模型是分析、预报、控制系统行为特性的有力工具。然而,在多数情况下,过程的数学模型是不知道的,或在正常运行期间模型的参数可能发生变化,因此利用控制理论去解决实际问题时,首先需要建立该系统的数学模型。

建立系统的数学模型,简称建模,就是将一个实际过程模型化。建模是一个很广泛的概念,凡是用一个数学模型去表示系统的因果关系都属于建模的范畴。本书所讨论的主要是工业过程的建模,而且,建立的模型主要是用于控制和控制系统的设计与分析。当然建模的思想方法和有关理论、手段,同样适用于其他目的建模。

目前,系统建模的重要性已为广大科技人员所认识,并产生一种要把建模理论与方法用于自己工作实践的强烈愿望。有鉴于此,我们编写这本书作为工业自动化专业工程技术人员继续工程教育的教材。在这样的背景下,本书从应用的角度介绍建立工业过程数学模型的基本理论和方法。为避免用到更多的数学知识,对某些问题仅给出结论,而不进行数学证明。

建模的手段和方法主要有两类,一类是通过对系统本身运动规律分析的机理建模方法,另一类是通过对试验数据处理得到模型的系统辨识方法,本书分上、下两篇分别给予介绍。上篇为机理建模,介绍运用基本物理、化学定理建立工业过程动态模型的基本原理和方法,并给出化工典型单元和系统建模的具体实例,最后还简单介绍模型简化、降阶方法以及直接建立简化模型的方法和机理模型的仿真方法。下篇为系统辨识,以单输入单输出系统为主要研究对象,介绍通过试验数据建立数学模型的基本理论和方法,包括必要的数学基础,信号与试验设计,模型结构辨识与参数估计方法,模型检验等,最后将通过一个实验让学员亲身体验辨识建模的全过程。上篇由杨双华编写,下篇由顾钟文编写,全书由顾钟文策划。

本书是在原有讲稿和讲义的基础上修改完善的,其中也包括了作者及其同事、研究生们在这个领域的研究成果。

本书的编写工作得到浙江大学工业控制研究所与工业自动化国家工程研究中心领导、许多同事及中国石化总公司培训处陈素明处长等的支持与鼓励;博士研究生傅烈勇、硕士研究生赵豫红为本书做了不少工作;应佩华、来国妹、邵慧群、杨永明等同志进行了精心打字和画图;我们更不忘记本书的责任编辑所付出的辛勤劳动。在此一并向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平与实践经验,缺点和不足之处在所难免,欢迎读者批评指正。

作者于浙江大学
一九九四年十月

目 录

引论	1
§ 0.1 系统建模及其意义	1
§ 0.2 建模的方法	1
§ 0.3 数学模型的类型	2
§ 0.4 数学模型的形式转换	5
0.4.1 由连续时间模型转换为离散时间模型	5
0.4.2 状态空间模型与输入输出模型的转换	5
0.4.3 参数模型与非参数模型的转换	6

上 篇 机理建模

第一章 机理建模的基础	9
§ 1.1 物料平衡	9
1.1.1 整体物料平衡方程	9
1.1.2 组分物料平衡方程	10
§ 1.2 能量平衡	12
§ 1.3 其它平衡方程与平衡关系	16
1.3.1 状态方程	16
1.3.2 传递方程	17
1.3.3 平衡关系	17
1.3.4 反应动力学	19
§ 1.4 非线性系统线性化	20
1.4.1 系统偏差化	20
1.4.2 非线性系统线性化	22
§ 1.5 动态模型无因次化	24
第二章 化工过程建模的举例	26
§ 2.1 传热系统的建模	26
2.1.1 换热器	26
2.1.2 冷凝器	27
2.1.3 再沸器	28
§ 2.2 管式原油加热炉的简化模型	29
§ 2.3 闪蒸塔的建模	31
§ 2.4 分离塔的动态建模	33
§ 2.5 催化裂化装置反应—再生系统动态数学模型	38

2.5.1 催化裂化装置反应—再生系统工艺过程	38
2.5.2 提升管反应器的分布参数模型	39
2.5.3 提升管反应器的集中参数模型	45
2.5.4 两段再生器的动态模型	48
第三章 机理模型的简化与仿真	55
§ 3.1 模态化分析方法	55
3.1.1 模态化分析	55
3.1.2 催化裂化装置反应—再生系统的降阶模型	58
§ 3.2 多级过程分段集结建模方法	62
3.2.1 二元精馏塔线性集总化模型	62
3.2.2 多组分复杂精馏过程分段集结动态模型	64
3.2.3 甲基叔丁基醚(MTBE)反应器分段集结模型	68
§ 3.3 多项式正交配置建立简化动态模型	71
3.3.1 正交配置法处理分布参数模型	71
3.3.2 正交配置建立精馏过程简化动态模型	73
§ 3.4 机理模型的仿真方法	76
3.4.1 状态方程的仿真方法	76
3.4.2 非线性机理模型的仿真方法	78
§ 3.5 机理建模的发展趋势	81
参考文献	82

下篇 系统辨识

第四章 随机过程基础	88
§ 4.1 随机过程概念和定义	88
§ 4.2 随机过程的统计描述	88
§ 4.3 平稳随机过程与各态历经性	90
4.3.1 平稳随机过程	90
4.3.2 各态历经性(遍历性)	91
§ 4.4 独立与不相关随机过程	92
§ 4.5 平稳随机过程的相关函数	93
4.5.1 自相关函数及其性质	93
4.5.2 互相关函数及其性质	95
4.5.3 由实验数据确定相关函数	96
§ 4.6 平稳随机过程的频谱密度函数	96
§ 4.7 白噪声过程	97
4.7.1 白噪声过程	97
4.7.2 白噪声序列	98

4.7.3 表示定理	98
第五章 线性系统动态模型辨识的阶跃响应法与频率响应法	99
§ 5.1 用非周期信号获得非参数模型	100
5.1.1 脉冲响应	100
5.1.2 频率响应	101
§ 5.2 用非周期信号获得参数模型	102
5.2.1 K _ü pfermüller 法	102
5.2.2 线图法	103
5.2.3 在半对数纸上作图的图解法	105
5.2.4 利用拉氏变换的极限定理求系统传递函数	108
§ 5.3 用周期信号获得非参数模型	109
§ 5.4 用周期信号获得参数模型	111
5.4.1 用一阶频率特性去逼近频率响应曲线	111
5.4.2 用二阶频率特性去拟合频率响应曲线	112
5.4.3 用具有纯滞后特性的模型进行拟合	113
第六章 线性系统脉冲响应辨识的相关分析法	115
§ 6.1 相关分析法原理	115
§ 6.2 用白噪声作输入信号辨识系统的脉冲响应函数	116
§ 6.3 用伪随机信号辨识系统的脉冲响应函数	117
6.3.1 基本原理	117
6.3.2 最大长度二位式序列(M 序列)的产生及其性质	118
6.3.3 用 M 序列辨识系统脉冲响应函数的算式	123
6.3.4 脉冲响应估计量的统计性质	126
6.3.5 用 M 序列辨识系统脉冲响应的步骤	128
6.3.6 用 M 序列辨识系统脉冲响应序列示例	130
§ 6.4 多变量系统辨识	131
第七章 线性稳态模型的辨识	134
§ 7.1 问题的提出	134
§ 7.2 最小二乘参数估计方法	135
7.2.1 最小二乘法	135
7.2.2 最小二乘估计量的性质	136
7.2.3 可线性化的模型参数的最小二乘估计	138
§ 7.3 极大似然估计	141
7.3.1 极大似然原理	141
7.3.2 极大似然估计方法	141
7.3.3 极大似然估计量的性质	143

第八章 线性动态模型的参数估计方法	144
§ 8.1 最小二乘估计方法(LS)	144
8.1.1 最小二乘问题的提法	144
8.1.2 一次完成最小二乘法	145
8.1.3 动态模型参数最小二乘估计量的性质	146
8.1.4 多输入多输出模型参数的最小二乘估计	147
8.1.5 参数最小二乘估计的递推算法	148
8.1.6 数据饱和现象及实时参数估计方法	150
8.1.7 最小二乘估计方法的缺陷	153
§ 8.2 辅助变量法(IVA)	154
8.2.1 一次完成算法	154
8.2.2 递推算法	155
§ 8.3 广义最小二乘法(GLS)	156
8.3.1 广义最小二乘法(松弛算法)	156
8.3.2 广义最小二乘递推算法	157
§ 8.4 增广最小二乘法(ELS)	160
§ 8.5 相关分析—最小二乘两步法(COR-LS)	160
§ 8.6 极大似然法(ML)	162
8.6.1 极大似然法	162
8.6.2 牛顿—拉普森迭代计算法	163
8.6.3 递推极大似然法	165
§ 8.7 参数估计方法的比较	170
第九章 线性动态模型结构的辨识	174
§ 9.1 纯滞后的确定	174
§ 9.2 SISO 模型阶的确定	175
9.2.1 损失函数定阶法	175
9.2.2 F—检验法	177
9.2.3 赤池信息准则(AIC)定阶法	178
9.2.4 其他定阶方法	180
第十章 系统辨识实施中的一些问题	182
§ 10.1 输入信号的设计	182
10.1.1 设计准则	182
10.1.2 最优输入信号设计	183
10.1.3 持续激励信号	184
10.1.4 信号设计中的工程要求	186
§ 10.2 采样周期和数据长度的选择	187
10.2.1 采样周期 T 的选择	187
10.2.2 数据长度	187

§ 10.3 数据预处理	187
10.3.1 零均值化	187
10.3.2 消除高频和低频噪声	188
§ 10.4 开环辨识或闭环辨识的选择	188
§ 10.5 模型验证	190
10.5.1 仿真检验	190
10.5.2 实际检验	190
§ 10.6 工业系统辨识实例	191
10.6.1 工艺简介	191
10.6.2 辨识试验设计	191
10.6.3 试验内容与结果	193
10.6.4 数学模型的获取	193
10.6.5 模型验证	198
附录	201
附录 I 矢量函数对矢量变量求导运算法则	201
附录 II 求逆矩阵的一个公式	201
附录 III 产生 M—序列的计算机程序	202
附录 IV 递推最小二乘参数估计方法计算机程序	203
参考文献	206

引 论

§ 0.1 系统建模及其意义

将研究的对象看成一个系统,从整体行为上进行研究,是现代科学技术中一个重要的观点。今后我们都将所研究的工业过程看作一个系统。

要对一个系统进行有效的控制,要定量地、准确地分析一个系统的特性,都必须弄清表征该系统特性的各物理量之间的关系,而这种关系的定量表达式,就称为该系统的数学模型。建立系统的数学模型简称为建模,也就是将一个实际过程模型化。

显然,只有从数学模型出发,才能综合出适当的控制算法,或进行系统优化。所以,对过程建模是过程控制的首要任务。同时,控制理论也是以数学模型已知为前题的,因此,如果能建立正确的数学模型,就可以将控制理论的许多成果应用到对实际系统的控制中去。由于至今在许多化工过程中未能得到合适的数学模型,这是控制理论在化工过程控制中的应用落后于其他技术领域的一个重要原因。再有,计算机在过程控制中的应用状况,除受到微型机问世的影响外,很大程度上也取决于系统建模技术的发展。正是随着各种生产过程数学模型的研究与开发,才能将过程计算机应用于过程控制和生产调度、管理等方面。所以,能否建立合适的数学模型已成为能否实现计算机控制及将高级控制技术应用于生产实际的关键之一。

另外,数学模型还在故障诊断、工艺设计、工艺过程操作方案的确定等方面发挥作用。

近年来,控制理论的应用已推广到许多领域,如经济学、生物学、医学、生态学等,因而在这些领域建模的重要性也大大加强了。

§ 0.2 建模的方法

建模有两大类方法,或者说有两种不同的途径。一类是通过对系统内在机理的分析,利用基本的物理、化学定律如质量、能量或动量守恒定律等以及系统(设备)的结构数据,推导出物理、化学关系式的机理建模方法(或称解析法),所得到的模型称为机理模型,因为这类模型展示了系统的内在结构与联系,所以也有人把这类模型称为“白箱”模型;另一类是对现有工业系统进行试验,利用试验数据或系统的正常运行数据构造数学模型的方法,这种建模的方法称为系统辨识,所得到的模型严格说来是一个与实际系统近似的经验模型,因为这类模型的建立只依赖于系统的输入输出关系,而“不关心”系统的内情,相对于“白箱”建模方法,称这类方法为“黑箱”建模方法。

机理建模有时可以获得精度较高的模型。而且如果在各自的装置上不能或无法进行试

验,或当被建模装置尚不存在时,机理建模是取得模型的唯一可行的途径,也是验前综合控制算法的唯一方式。但对于比较复杂的系统,所得到的机理模型往往较复杂,这给实际应用会带来困难;而且有时对某些较复杂的系统,人们对其结构和支配其运动的机理,只有某种程度的了解,甚至还很不了解,用解析方法建模也会遇到很大的困难,因此机理建模方法的适用范围就受到限制;同时机理分析总是基于许多简化和假设之上的,这就使得机理模型与实际系统之间也会有相当的误差。于是,利用观测数据构造数学模型的理论和方法——系统辨识就自然而然地受到人们的重视。特别是为了应用的目的,而往往需要将一个精度较高的、较复杂的机理模型简化成精度较低、但是可以接受的低阶模型,这个低阶模型中的参数,也需要通过试验数据来进行修正和充实。况且,辨识技术就在于直接提供这种可用的近似模型。

因为辨识是通过系统输入、输出信号的测量得出该系统输入输出性态的模型的,所以辨识的方法可以对任意结构的系统建模,即使是对其内部机理不甚了解,也可得出模型。但是由于辨识的基础是数据,所以仅当装置上允许“无限制”地测量时,试验方法才能单独用来提出模型。而且,辨识得到的模型,只反映系统输入、输出的特性,对系统的内在信息反映不出来,机理模型则可以弥补辨识所得模型在反映内在机理方面的不足。

所以就建模来说,最有效的方法是将机理分析的方法和辨识的方法合理地结合起来,即尽量利用人们对物理系统的认识,由机理分析提出模型结构,而后用观测数据估计出模型参数,即所谓“灰箱”建模方法。这种做法已被实践证明是非常有效的。

§ 0.3 数学模型的类型

数学模型是被控系统运动规律的定量描述,表现为各种形式的数学关系式,如图 0.3-1 所示。

现对图 0.3-1 中的模型类型作一些说明:

动态模型与静态模型 前者表示系统动态情况下各变量间的关系,也就是说,表示这种关系的数学表达式中的变量依赖于时间,一般是微分方程的形式;静态模型一般是以代数方程表示的,数学表达式中的变量不依赖于时间,是输入输出变量间的稳态关系。所以静态模型可看成是动态模型的特殊情况。在某一瞬间各变量间的关系式也是静态模型。

分布参数模型与集中参数模型 前者是以抛物、双曲、椭圆型等各种偏微分方程来描述系统的动态特性的,因为在这类系统中,表征系统特性的变量是随几何位置而变化的;后者表征变量不随位置而变的系统特征,是以线性或非线性常微分方程的形式表示的。由于分布参数模型的建立和使用都有不便之处,所以在实践中往往将分布参数模型简化成复杂程度较低的集中参数模型。

随机模型与确定性模型 在随机性模型中变量之间的关系是以统计值的形式给出的;确定性模型中并不出现事件的概率值,或者说确定性模型中不带随机项,当然,这仅是一种简化,严格地讲,任何模型中都应有随机项,仅是当随机量较小时,将其忽略罢了。

线性模型与非线性模型 各变量间的关系是线性的,为线性模型;反之则为非线性模型。非线性特性有多种形式,因而非线性模型也就有多种形式,其中双线性模型和 Hammerstein 模型由于能代表一大类非线性动态系统的特性,且结构形式较简单,故较常用。

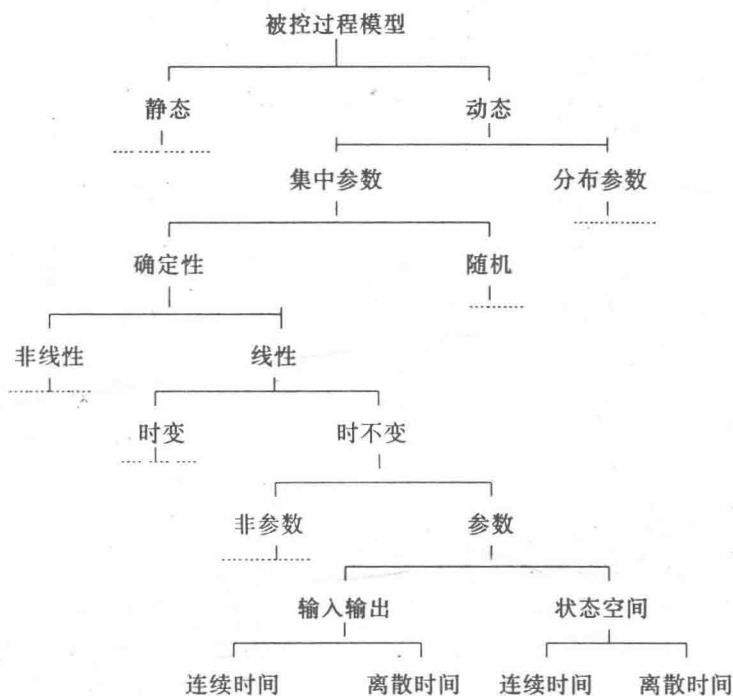


图0.3-1 数学模型的类型

双线性模型的形式为：

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^r N_i x u_i \quad (0.3-1)$$

$$y = Cx \quad (0.3-2)$$

其中, x —— n 维状态变量;

u —— r 维控制变量;

y —— m 维输出变量;

A, B, N_i, C —— $n \times n$ 维、 $n \times r$ 维、 $n \times n$ 维、 $m \times n$ 维的参数矩阵。

当 u 为恒值时, 式(0.3-1)对 x 是线性的, 当 x 为恒值时, 式(0.3-1)对 u 也是线性的, 故式(0.3-1)、(0.3-2)称为双线性模型。

Hammerstein 模型可以看成为无记忆非线性增益与一个线性子系统的串联, 见图 0.3-2。

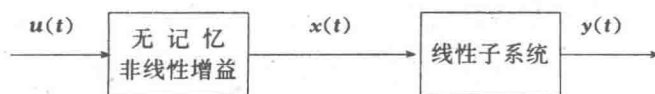


图 0.3-2 Hammerstein 模型结构

非线性增益可以用一个 P 阶多项式近似：

$$x(t) = r_1 u(t) + r_2 u^2(t) + \cdots + r_p u^p(t) \quad (0.3-3)$$

其中, $r_i (i=1, 2, \dots, p)$ ——参数。

严格说来, 大部分系统都具有一定程度的非线性, 但由于线性模型的使用比非线性模型

方便,通常在离额定工作点不远时或在非线性程度不太严重时,就用线性模型近似,或将非线性模型进行线性化处理。

时变模型与时不变模型 模型的系数依赖于时间的为时变模型,反之为时不变模型或定常模型。

参数模型与非参数模型 以代数方程、微分方程、传递函数等形式表示的为参数模型,机理建模总是获得参数模型;非参数模型是直接或间接从物理系统的试验分析中得到的响应,如阶跃响应、脉冲响应、频率特性曲线等。

输入输出模型与状态空间模型 前者是以系统的外部特征(输入、输出变量)来描述系统特性的关系式,如传递函数、频率特性、微分方程、差分方程等;状态空间模型是以状态变量来描述系统特性的数学关系式,它较输入输出模型更深入地揭示了系统的动态特性,其一般形式为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (0.3-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (0.3-5)$$

其中, $\mathbf{x}(t)^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ —— n 维状态向量,而 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为状态变量;

$\mathbf{u}(t)$ —— r 维输入向量;

$\mathbf{y}(t)$ —— m 维输出向量;

$\mathbf{A}$ —— $n \times n$ 维系统(或状态)矩阵;

$\mathbf{B}$ —— $n \times r$ 维控制(或输入)矩阵;

$\mathbf{C}$ —— $m \times n$ 维观测(或输出)矩阵。

对于一个系统来说,状态变量不是唯一的,它可有无穷多个选择,有时状态变量没有明确的物理意义。值得指出的是,当状态变量全部都可测时,状态空间模型与输入输出模型是一致的。

连续时间模型与离散时间模型 连续与离散是对时间而言的。连续时间模型的形式是微分方程或前述式(0.3-4)、式(0.3-5)的状态方程等;离散时间模型中的变量对时间是离散的,如线性微分方程的离散形式是线性差分方程,对于单输入单输出的情况,其一般形式为:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (0.3-6)$$

其中, n —— 模型的阶;

$y(k), u(k)$ —— 输出变量、输入变量(皆为标量);

$a_i, b_i (i=1, 2, \dots, n)$ —— 模型参数。

为书写方便,可引进单位移位算子,即

$$z^{-1}y(k) = y(k-1) \quad (0.3-7)$$

则式(0.3-6)可写成

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (0.3-8)$$

$$\text{其中 } A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (0.3-9)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \quad (0.3-10)$$

对应于式(0.3-4)、式(0.3-5)连续状态空间模型的离散形式为:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (0.3-11)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (0.3-12)$$

§ 0.4 数学模型的形式转换

如上所述,数学模型有不同的表示形式,例如一个集中参数的系统,可以用参数模型表示,也可以用非参数模型表示;可以用输入输出模型表示,亦可以用状态空间模型表示;可以用连续时间模型表示,亦可以用离散时间模型表示。但它们之间可以互相转换,即可以根据需要由一种形式的模型转换为另一种形式的模型。

0.4.1 由连续时间模型转换为离散时间模型

除了离散系统的模型本身就是离散模型外,在用数字计算机处理一个连续模型时,需要将其离散化,例如由微分方程转化为差分方程,在工程上多采用以差商代替微商的近似方法完成这个转化。

例如:一阶连续系统的动态特性可以用一阶微分方程表示

$$\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = du(t) \quad (0.4-1)$$

为了离散化,就需要选择一个采样间隔“ T ”,即每隔时间 T 采样一次,在两次采样之间“状态”及“控制”都保持不变。若令

$$y(t) = y(kT) \quad (0.4-2)$$

$$u(t) = u(kT) \quad (0.4-3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y[(k+1)T] - y(kT)}{T} \quad (0.4-4)$$

将式(0.4-2)、(0.4-3)、(0.4-4)代入式(0.4-1),得到

$$y[(k+1)T] + ay(kT) = bu(kT) \quad (0.4-5)$$

式中 $a = -(1 - cT)$

$$b = dT$$

式(0.4-5)就是代表一阶离散系统特性的一阶差分方程式。为书写的方便,常将式(0.4-5)中的“ T ”省略,而写成

$$y(k+1) + ay(k) = bu(k) \quad (0.4-6)$$

如果微分方程式是二阶的或高阶的,用相同的方法可以获得二阶或高阶的差分方程式。

0.4.2 状态空间模型与输入输出模型的转换

1. 由状态空间模型求输入输出模型

为由状态空间模型求得输入输出模型,可以从状态方程式(0.3-4)中解出状态变量,然后将状态变量代入观测方程式(0.3-5)而得输入输出方程;也可以将状态空间模型直接进行拉氏变换而得传递函数矩阵。

例如,已知状态空间模型为式(0.3-4)及式(0.3-5),对其进行拉氏变换得:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (0.4-7)$$

$$\text{及 } Y(s) = CX(s) \quad (0.4-8)$$

合并式(0.4-7)、(0.4-8)消去 $X(s)$,得

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) \quad (0.4-9)$$

$$\text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (0.4-10)$$

式中, I ——单位矩阵。

则式(0.4-10)即为式(0.3-4)、(0.3-5)所描述的系统的传递函数矩阵。

2. 由输入输出模型求状态空间模型

因为一个系统的输入输出变量是外部环境和系统的联系,是客观存在的,所以一个系统对应着的输入输出模型是唯一的。

但是对同一系统,状态变量却不是唯一的,不同的状态变量(它们所刻划的输入输出关系则是一样的)对应不同的状态方程。不过任一系统总可以选取一组状态变量使其组成的状态空间模型维数最小、形式最简单、参数最少。

由输入输出模型求状态空间模型(称为实现问题),就是要求状态变量维数最小的最小实现。

可以证明,线性单输入单输出系统的输入输出模型

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \quad (0.4-11)$$

等价于下列状态空间模型(等价是指输入输出关系相同):

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k) \quad (0.4-12)$$

$$y(k) = Hx(k) \quad (0.4-13)$$

其中, $x(k)$ —— n 维状态向量。

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (0.4-14)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (0.4-15)$$

$$H = [1, 0, \cdots, 0] \quad (0.4-16)$$

在后面的有关章节中将给出详细证明。

0.4.3 参数模型与非参数模型的转换

1. 由参数模型求非参数模型

例如,由传递函数转化为频率特性是大家所熟悉的,只需要将传递函数中的 s 以 $j\omega$ 代替,并在不同的 ω 值下作图即得。

2. 由非参数模型求参数模型

根据不同的响应曲线,有不同的处理方法,将在后面几章中详细介绍。

42080

综上所述,不同形式的数学模型之间可以互相转换,因而在具体工作时,就可以根据系统的具体特点和相应的建模方法,建立相应形式的数学模型,而后通过模型形式的转换,得到应用目的所需形式的数学模型。