高等数学 下册

河北科技大学理学院数学系　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学

Gaodeng Shuxue

下 册

河北科技大学理学院数学系　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为了适应应用型人才培养的需要，按照非数学类理工科专业的教学要求和教学特点编写而成的。全书分为上、下册。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每节后配有适量的习题，书后附有部分习题参考答案。

本书可以作为应用型本科高校非数学类理工科各专业本科生的“高等数学”课程教材，也可以作为独立学院、成教学院理工科各专业学生的数学基础课教材，同时为各类工程技术人员提供参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／河北科技大学理学院数学系编．
--北京：高等教育出版社，2012.12
ISBN 978-7-04-036427-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①河…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 262599 号

策划编辑　贾翠萍　　责任编辑　贾翠萍　　封面设计　王　睢　　版式设计　于　婕
插图绘制　尹文军　　责任校对　刘　莉　　责任印制　尤　静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市昌平百善印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12.75	版　　次	2012 年 12 月第 1 版
字　　数	230 千字	印　　次	2012 年 12 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	19.20 元

物料号　36427-00

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何相仿. 首先要建立空间直角坐标系,应用坐标法对空间的几何图形作定量的刻画,将形转化为数;反之,将变量之间的依赖关系通过坐标法用几何图形表示出来,将数转化为形. 构成数与形之间的对立统一,使人们可以用代数的方法来解决几何问题.

本章先介绍向量的概念及其几何运算,在引进空间直角坐标系后,讨论向量运算的坐标表示. 然后再介绍空间解析几何的基本知识,主要包括空间平面和直线以及一些常见的空间曲线和曲面,这些知识是学习多元函数微积分的基础.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

通常我们所遇到的量有两类:一类是只用一个实数就能表示的量,如面积、体积、温度、时间等,这种量称为**数量**;而另一类如力、位移、速度等,它们不但有大小而且还有方向,我们把这种既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

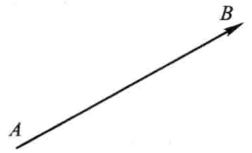

图 7.1

向量通常用上方加有箭头的字母或黑体字母来表示,比如 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 或 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等. 在几何上,可用空间的一条带有方向的线段(称为有向线段)来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,它的方向表示向量的方向. 起点为 A,终点为 B 的有向线段所表示的向量可以记为$\overrightarrow{AB}$(如图 7.1). 向量的大小称为向量的**模**,向量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}$的模依次记作 $|\boldsymbol{a}|$,$|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的方向可以看作是任意的.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,而有些向量与其起点无关,我们把与起点无关的向量称为**自由向量**,如无特别说明,我们所讨论的向量都是自由向量. 因此,一个向量经过平移后仍是原来的向量. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称这两个向量**相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等,而方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$(如图 7.2). 如果两个非零向量的方向

相同或相反，就称这两个向量**平行**；若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；由于零向量的方向可以看作是任意的，则可认为零向量与任何向量都平行；如果将两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点就在一条直线上，因此，两向量平行又称两向量**共线**.

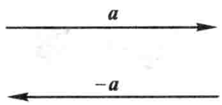

图 7.2

二、向量线性运算的几何表示法

1. 向量的加法

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（如图 7.3），则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**，三角形法则的物理意义是位移的合成. 类似于力学上求两个力的合力或求两个速度的合速度的平行四边形法则，我们也有相应的向量相加的**平行四边形法则**，即：**当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（如图 7.4），则向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.** 显然，按三角形法则或平行四边形法则得出的和向量是完全一样的.

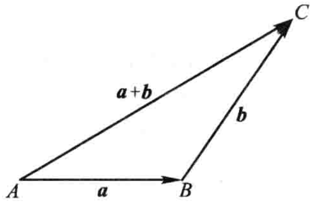

图 7.3

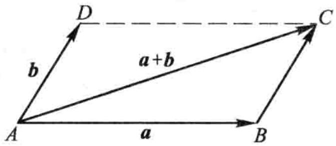

图 7.4

向量的加法满足下列运算规律：

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\,(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按三角形法则可得 n 个向量相加的法则如下：**以前一个向量的终点作为后一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和.** 图 7.5 是 5 个向量和的示意图，即

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

同理,我们可定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

显然,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和(如图7.6).特别地,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

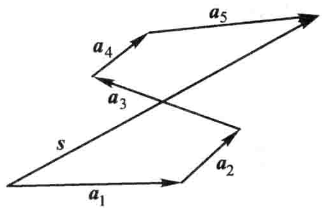

图7.5

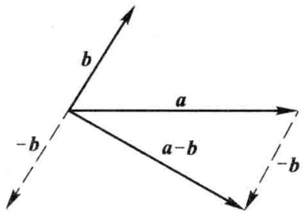

图7.6

2. 向量与数的乘法

定义2　设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,λ 是一个实数,那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.它的模和方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘积满足下列运算规律:

(1) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

我们把向量的加法运算以及向量与数的乘法运算统称为向量的**线性运算**.

通常把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$,按照向量与数的乘法定义,则向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \tag{7.1}$$

上式也可写成

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{7.2}$$

这表明任何一个非零向量除以它的模其结果是一个与原向量同方向的单位向量,该过程称为将**非零向量单位化**.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们可用向量与数的乘积来表示两个向量平

行的关系：**两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，或更一般的有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$**（其中 λ_1、λ_2 为实数且不同时为零）.

例 1　试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边长度的一半.

解　见图 7.7，设 D 是 AB 的中点，E 是 AC 的中点，则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因为

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以

$$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}\text{且}\,|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

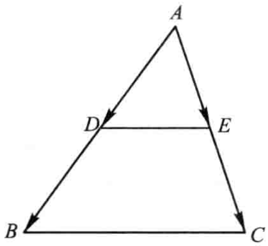

图 7.7

3. 两向量的夹角和向量在轴上的投影

定义 3　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把它们的起点移至同一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定它们在 0 与 π 之间的那个夹角 $\angle AOB$（设 $\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为这两个向量的夹角（如图 7.8），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

关于两向量的夹角有

（1）当 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

（2）当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

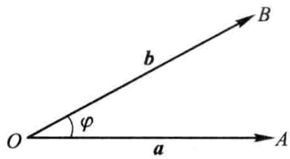

图 7.8

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，规定它们的夹角在 0 到 π 之间可取任意值，因此，也可认为零向量与任何向量都垂直. 类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两个轴的夹角，不再赘述.

下面我们来定义向量在轴上的投影.

定义 4　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 及一轴 $\boldsymbol{u}$，它们之间的夹角记为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$（如图 7.9），称数量 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$，即

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB. \tag{7.3}$$

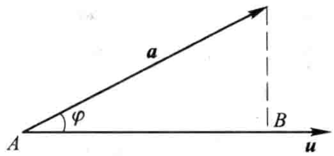

图 7.9

注　投影不是一个向量,而是一个数量可正可负.

由定义可以看出:当 $0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}$时,投影为正值,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}a>0$;

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时(向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{u}$ 轴),投影为零,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=0$;

当$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$ 时,投影为负值,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}<0$.

可以证明,向量的投影具有下列性质:

性质 1　两个相等的向量在同一轴上的投影相等.

性质 2　两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}_2.$$

证明从略.

习题 7－1

1. 设 A,B,C 为三角形的三个顶点,求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
3. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 4,它与轴 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 60°,求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.
4. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

第二节　空间直角坐标系与向量的坐标

一、空间点的直角坐标

为了说明空间的点、向量与数组、图形与方程之间的联系,我们现在来建立空间的直角坐标系.

过空间一定点 O,作三条两两互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且规定

相同的长度单位,这三条轴分别称为 x **轴**(横轴),y **轴**(纵轴)和 z **轴**(竖轴),统称为**坐标轴**,它们的**正方向符合右手法则**,即:以右手握住 z 轴,当右手的四指从 x 轴的正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴的正向时,竖起大拇指的指向就是 z 轴的正向(如图 7.10),图中的箭头表示 x 轴、y 轴及 z 轴的正向. 这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$.

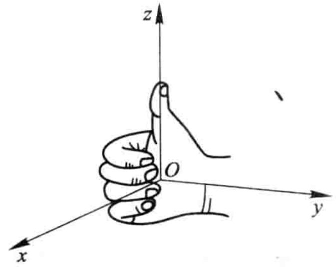

图 7.10

三条坐标轴中任何两条坐标轴都可以确定一个平面,称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy **坐标面**;从而由 y 轴和 z 轴确定 yOz **坐标面**,由 z 轴和 x 轴确定 zOx **坐标面**. 三个坐标面把空间分为八个部分,每一部分又称为一个**卦限**(如图 7.11)、这八个卦限用下述方法规定其顺序:第一卦限:$x>0,y>0,z>0$;第二卦限:$x<0,y>0,z>0$;以此类推,按逆时针顺序可确定在 xOy 坐标面上方的四个卦限 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ;第五卦限:$x>0,y>0,z<0$;第六卦限:$x<0,y>0,z<0$;以此类推,仍按逆时针顺序可确定在 xOy 坐标面下方的四个卦限 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ. 有必要指出,位于坐标面或坐标轴上的点,约定它不属于任何卦限.

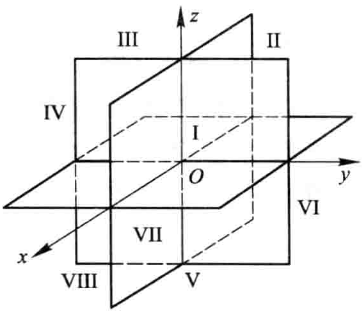

图 7.11

设 M 为空间一点,过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R,这三个点在坐标轴上的坐标分别为 x、y、z. 于是,空间一点 M 就唯一地确定了一个有序三元数组(x,y,z);反过来,给定一个有序三元数组(x,y,z),就可以在 x 轴、y 轴、z 轴上分别找到坐标依次为 x、y、z 的三点 P、Q、R,过这三点 P、Q、R 分别作平面垂直于该点所在的坐标轴,这三个平面的交点就是以数组(x,y,z)为坐标唯一确定的点 M(如图 7.12). 这样,空间的一点 M 就与有序三元数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系,这个有序三元数组(x,y,z)就称为点 M 的坐标,其中 x 称为点 M 的横坐标,y 及 z 分别称为点 M 的纵坐标和竖坐标,

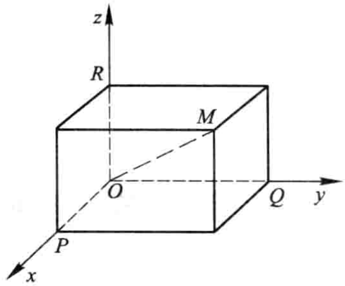

图 7.12

记为 $M(x,y,z)$.

显然,原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$,在 x 轴上的点的纵坐标 $y=0$,竖坐标 $z=0$. 于是,x 轴上任意点的坐标为 $(x,0,0)$;在 xOy 平面上任意点的坐标为 $(x,y,0)$. 又如,点 $(1,2,3)$ 位于第Ⅰ卦限,则点 $(1,2,-3)$ 位于第Ⅴ卦限,这两点关于 xOy 面对称. 其他坐标轴和坐标面上的点也具有类似的特征.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 d.

过点 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(如图 7.13). 由勾股定理知:该长方体对角线的长度的平方,等于它的三条棱的长度的平方和,即

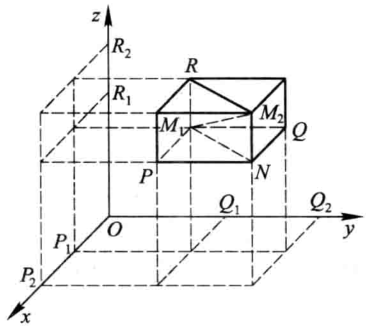

图 7.13

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2,$$

由于 $|M_1P|^2=|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2$, $|M_1Q|^2=|Q_1Q_2|^2=|y_2-y_1|^2$, $|M_1R|^2=|R_1R_2|^2=|z_2-z_1|^2$,

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地,点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　在 z 轴上求与两点 $A(3,1,-4)$ 和 $B(5,3,2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 z 轴上,所以设该点的坐标为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2+(-4-z)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(3-0)^2+(2-z)^2},$$

解得 $z=1$,于是,所求的点为 $M(0,0,1)$.

三、向量的坐标及向量线性运算的坐标表示

为把向量的几何运算转化为向量的代数运算,需将空间的向量用坐标的形式表示出来,就要把向量放在空间直角坐标系中进行研究.

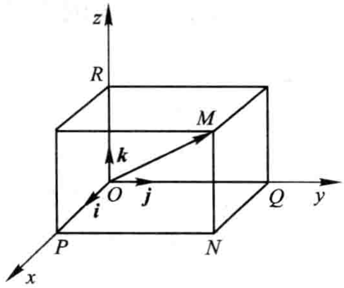

图 7.14

设任给一向量 $\boldsymbol{a}$,总可以将它经过平移使其起点与坐标原点 O 重合,这时,若终点为 $M(a_x,a_y,a_z)$,则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$,过点 M 分别作垂直于三坐标轴的平面,与三个轴的交点依次为 P、Q、R(如图 7.14),由向量加法可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量,并把它们称为 $Oxyz$ 坐标系下的基本单位向量,由第一节公式(7.1)可知

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k},$$

于是得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{7.4}$$

这里(7.4)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**,向量 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的分向量;而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的系数 a_x, a_y, a_z恰好就是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影;我们把有序三元数组(a_x,a_y,a_z)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,向量 $\boldsymbol{a}$ 可简记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}, \tag{7.5}$$

(7.5)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

显然,给定了向量 $\boldsymbol{a}$,就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$三个分向量,从而确定了有序数组(a_x,a_y,a_z);反之,给定了有序数组(a_x,a_y,a_z),也就确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 与点 M.因此,空间点 M、向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组(a_x,a_y,a_z)之间构成了一一对应的关系.

空间任何一点 $P(x,y,z)$ 都对应着一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$,称为点 P 关于原点 O 的向径,可知 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$,这就是说,空间任何一点与该点的向径有相同的坐标.

有了向量的坐标表示式，就可以把向量的几何运算转化为向量的代数运算，下面来推导向量线性运算的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$，　$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}.\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}(\lambda\text{ 为实数}).\end{aligned}$$

例 2　设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

解　作向量$\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{M_1M_2}$(如图 7.15)，知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

而$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即　$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

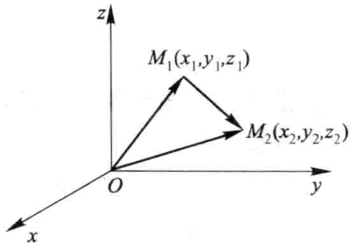

图 7.15

四、向量的模与方向余弦

1. 向量的模

设起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，它的模$|\overrightarrow{M_1M_2}|$就是点 M_1 与 M_2之间的距离，即

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

若向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则其模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

2. 向量的方向角、方向余弦

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角 α、β、$\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$(如图 7.16)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**；方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**；方向角完全确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，模$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，从图 7.16 可以看出：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

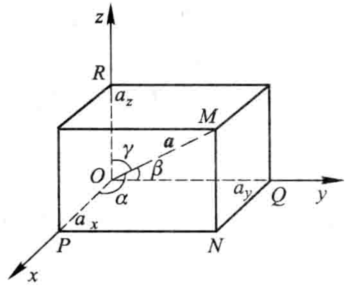

图 7.16

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}}, \tag{7.6}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}},$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示式.

容易验证:

(1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$ (7.7)

(2) $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$ (7.8)

例 3 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$,求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量$\overrightarrow{AB^0}$及其方向余弦.

解 因为$\overrightarrow{AB} = \{7-4,\ 1-0,\ 3-5\} = \{3,\ 1,\ -2\}$,向量$\overrightarrow{AB}$的模为

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

所以

$$\overrightarrow{AB^0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{3, 1, -2\},$$

其方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-2}{\sqrt{14}}$.

例 4 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda(\lambda \neq -1)$,在直线 AB 上求一点 M,使得$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$.

解 设所求点为 $M(x, y, z)$,则

$$\overrightarrow{AM} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \overrightarrow{MB} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}.$$

依题意$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$,即

$$\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \lambda\{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

$$\{x,y,z\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\lambda\{x_2,y_2,z_2\}-\lambda\{x,y,z\},$$

当 $\lambda\neq-1$ 时,

$$\{x,y,z\}=\frac{1}{1+\lambda}\{x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2\},$$

可得 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$,故所求点为

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

这里,点 M 称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的 λ(**定比**)**分点**. 当 $\lambda=1$ 时,点 M 为$\overrightarrow{AB}$的中点,其坐标为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

习题 7-2

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$A(2,-3,1)$,$B(7,-1,-2)$,$C(-2,-3,-1)$,$D(-1,2,-3)$.

2. 指出下列各点所在的坐标面或坐标轴:

$A(-1,2,0)$,$B(0,-2,3)$,$C(1,0,0)$,$D(0,-1,0)$.

3. 求点$(-2,3,-5)$分别关于下列条件的对称点的坐标:

(1) xOy 坐标面; (2) y 轴; (3) 坐标原点.

4. 求点 $A(4,-3,5)$到坐标原点 $O(0,0,0)$,z 轴及 zOx 坐标面的距离.

5. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$等距离的点.

6. 已知 $A(1,0,2)$,$B(4,5,10)$,$C(0,3,1)$,$D(2,-1,6)$和 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求

(1) 向量 $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}$ 在三个坐标轴上的投影及分向量;

(2) $\boldsymbol{a}$ 的模;

(3) $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦;

(4) 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量.

7. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\beta=\cos\gamma=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

8. 已知 $A(2,-1,7)$,$B(4,5,-2)$,线段 AB 交 xOy 面于点 P,且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,求 λ 的值.

9. 一个向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,且其在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4,-4 和 7,求这向量的起点 A 的坐标.

10. 从点 $A(2,4,7)$沿 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 方向取 $|\overrightarrow{AB}|=34$,求点 B 的坐标.

第三节 向量的数量积 向量积

一、向量的数量积

1. 数量积的概念

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 A 移动到点 B,如果用 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{AB}$,那么由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta,$$

其中 θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 7.17),这里功是一个数量,它由力与位移唯一确定,若把向量的这种运算抽象出来,就得到两个向量数量积的定义.

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,称数量 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(如图 7.18),即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{7.9}$$

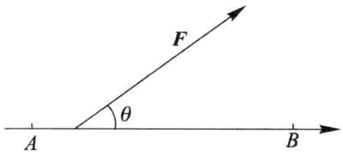

图 7.17

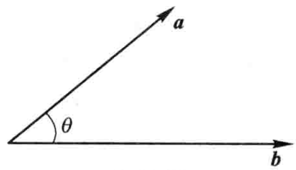

图 7.18

按数量积的定义,上面所说的力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功就可以表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

显然,对任何向量 $\boldsymbol{a}$,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$,且由(7.9)式可以推得

(1) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. 这就是说,两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量上的投影的乘积,从而有当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$;当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

(2) 设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$. 这是因为夹角 $\theta=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

(3) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$,所以 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,那么 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,$\cos\theta=0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由此可知基本单位向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 具有下列性质: