九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版同济大学数学系编

教你用更多的自信面对未来！

高等数学

（第七版·下册）

同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅

一书两用
同步辅导+考研复习

新版

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版的，同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版·下册）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

《高等数学》（第七版·下册）共有5章，分别介绍向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习导引，知识要点及常考点，本节考研要求，题型、真题、方法，课后习题全解五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《高等数学》（第七版·下册）课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2014.10
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-2623-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第240317号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解**
作　者	主　编　苏志平　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	148mm×210mm　32开本　12印张　413千字
版　次	2014年10月第1版　2014年10月第1次印刷
印　数	0001—13000册
定　价	16.80元

前言

同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版·下册)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学(第七版·下册)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《高等数学》(第七版·下册)这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 学习导引。介绍要求掌握的知识点,以及本章的主要内容。

2. 知识要点及常考点。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. 本节考研要求。明确考研的学习任务。

4. 题型、真题、方法。按照本章的知识要点划分题型,通过例题和真题的详细解答,引导学生思考问题,开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握高等数学的基本内容和解题方法。

5. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2014 年 09 月

目录

第八章　向量代数与空间解析几何

学习导引

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是用代数方法研究几何问题，其重要工具就是向量代数，空间解析几何知识是进一步学好多元函数微积分的重要基础.

第一节　向量及其线性运算

知识要点及常考点

1. 向量的相关概念

(1) 向量：既有大小，又有方向的量称为向量(或矢量)，例如，力、位移、速度等都是向量.

(2) 向量的表示：以 A 为起点，以 B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，向量也常用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$.

(3) 向量相等：大小相等、方向相同的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为相等向量，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移可以完全重合.

(4) 向量的模：向量 $\boldsymbol{a}$($\overrightarrow{AB}$) 的大小称为向量的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$($|\overrightarrow{AB}|$).

(5) 单位向量：模等于 1 的向量称为单位向量.

(6) 零向量：模等于零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的起点和终点重合，其方向是任意方向.

(7) 平行向量(共线向量)：若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称它们是平行向量，记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

注　两个向量平行(共线) 的条件：

① 设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

② 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线) 的充分必要条件是存在不全为零的数 λ 和 μ，使得 $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$(即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关).

2. 向量的坐标

将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合，则向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的坐标(x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为(x,y,z)，并且 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

注　设向量的起点和终点分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

3. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\mathbf{e}_a$，故

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$，$\mathbf{e}_a = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

若 $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$，则

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

4. 向量在轴上的投影

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 轴的夹角为 φ，则 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_u$.

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$
$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2,$$
$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

注　① 向量在与其方向相同的轴上的投影为向量的模 $|\boldsymbol{a}|$.

② 在空间直角坐标系上，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(x,y,z) 是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

5. 向量的线性运算

向量的加法$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 和数乘向量$(\lambda\boldsymbol{a})$ 称为向量的线性运算.

设 $\boldsymbol{a}_j = x_j\boldsymbol{i}+y_j\boldsymbol{j}+z_j\boldsymbol{k} = (x_j,y_j,z_j)$，$j = 1,2,3$.

(1) 加法　由平行四边形法则或三角形法则给出，用坐标作运算则有

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2 = (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

(2) 数乘向量　$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，其模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，而方向规定为：若 $\lambda>0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，若 $\lambda<0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 用坐标作运算为：或 $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$，则

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

注　$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$，$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

6. 向量的单位化

设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量，则向量 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化，记作 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot \boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0}\xrightarrow{\text{单位化}}\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

本节考研要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的线性运算，理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量线性运算的方法.

题型、真题、方法

题型 1　空间直角坐标系的概念

题型分析　向量的坐标表示.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，以原点为起点，点 $M(a,b,c)$ 为终点，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 都可以唯一地分解成基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的线性组合.

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}.$$

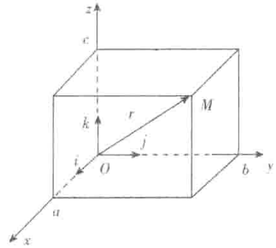

图 8 - 1

称 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的坐标或分量，记

$$\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}=\{a,b,c\}.$$

例 1　证明：以三点 $A(3,1,10)$，$B(9,-1,7)$，$C(1,4,4)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

思路点拨　考查空间中两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 的距离.

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

解　$|AB|=\sqrt{(3-9)^2+(1+1)^2+(10-7)^2}=7$

$|AC| = \sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2+(10-4)^2} = 7$

$|BC| = \sqrt{(9-1)^2+(-1-4)^2+(7-4)^2} = 7\sqrt{2}$

因为 $|AB|=|AC|$，且 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

现学现练　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是$(1,5,2),(0,-3,1),(-1,2,3)$，求下列向量的坐标(1)$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$;(2)$-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.[$(-1,19,12),(0,-13,3)$]

题型 2　向量的概念和线性计算

题型分析　设 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标中任一点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为三个坐标轴上的单位矢量，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

简记 $\boldsymbol{a}$ 的同向单位矢量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}.$$

若令 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则

$\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点，则

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$,

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3),\boldsymbol{b}=(2,3,6)$，求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

思路点拨　利用单位向量和方向余弦的概念.

解　对 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，因此

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}(4,5,-3)=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

同上，可求出与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{b}^0$.

$$\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2,3,6)=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

从而，$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，$\cos\beta=\frac{3}{7}$，$\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

例 3　已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{4}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

思路点拨　当已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模及夹角时，常常将其中一向量沿 x 轴摆放. 注意，这是一种常用方法，往往能起到化繁为简的作用.

解　如图 8-2 所示，将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示在坐标系中，由此可得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

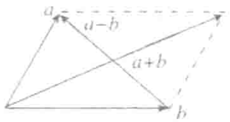

图 8-2

故

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-1),$$

$$\cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\widehat{,}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

现学现练　向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴成 $45°$，与 y 轴成 $60°$，它的长度等于 6，它在 z 轴上的坐标是负的，求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标和沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向的单位向量. $\left[(3\sqrt{2},3,-3),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right]$

题型 3　利用向量的运算性质求证的证明题

题型分析

1. 数乘

数乘矢量 $\xlongequal{\Delta}$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与一数量 m 之间 $m\boldsymbol{a}$.

该矢量 $m\boldsymbol{a}$ 的大小为 $|m\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 平行，当 $m>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $m<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向；而当 $m=0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 为零向量，设 $a=(x,y,z)$，则 $m\boldsymbol{a}=(mx,my,mz)$.

2. 矢量的加法

平行四边形法则：将两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点平移至 O 点处，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为零边作平行四边形，设 P 为 O 的对角顶点，则 $\overrightarrow{OP}$ 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.

三角形法则：将矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 首尾相接，则以第一个矢量的起点为起点，第二个矢量的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和矢量：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

3. 矢量的减法

将矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的起点平移至 O 点处，则以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为起点的矢量就是 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，类似地可定义为 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

设空间直角坐标系中有两个矢量：

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1,y_1,z_1),$$
$$\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2,y_2,z_2),$$

则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2).$$

例 4　用向量的方法证明：三角形的中位线平行于底且它的长度等于底边的一半.

思路点拨　只需证明表示中位线的向量与表示底边的向量方向相同，且前者长度是后者的一半即可.

证　设 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点. 因

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

所以

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},$$

即

$$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

故 $\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，结论得证.

现学现练　设空间四边形 $ABCD$ 各边的中点依次是 P、Q、R、S，证明：四边形 $PQRS$ 是平行四边形.

课后习题全解

习题 8－1 全解

1. 解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}.$

2. 证　设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于 M(如图 8-3 所示)，且 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

3. 解　如图 8-4 所示：

由题意　$\overrightarrow{D_4D_3}=\overrightarrow{D_3D_2}=\overrightarrow{D_1B}$

$$=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a};$$

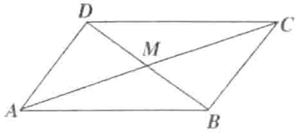

图 8-3

$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$

$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$

$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$；$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$

4. 分析　若已知 $M_1(a_1,a_2,a_3)$ 和 $M_2(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$；

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

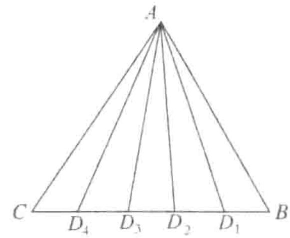

图 8-4

5. 分析　单位向量 $\mathbf{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right).$$

6. 解　A 点在第 4 卦限；B 点在第 5 卦限；C 点在第 8 卦限；D 点在第 3 卦限.

7. 解　在 xOy 平面、xOz 平面以及 yOz 平面上的点的坐标分别具有如下形式：$(x,y,0)$，$(x,0,z)$ 以及 $(0,y,z)$，在 Ox、Oy、Oz 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$. A 在 xOy 平面上，B 在 yOz 平面上，C 在 x 轴上，D 在 y 轴上.

8. 解　(1) 点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点是 $(a,b,-c)$；

关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$；

关于 zOx 面的对称点是 $(a,-b,c)$.

(2) 点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$；

关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$；

关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3) 点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 解　答案如图 8-5 所示.

10. 解　过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0，过 P_0 且平行 xOy 的平面上的点具有相同的竖坐标 z_0.

11. 解　如图 8-6 所示，各点的坐标 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$；$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$；$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；

$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$；$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；

$B'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$；

$C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；$D'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

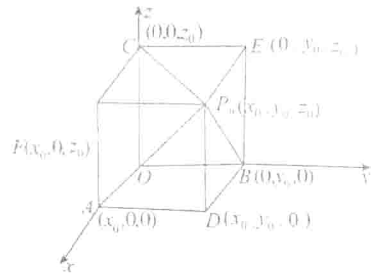

图 8-5

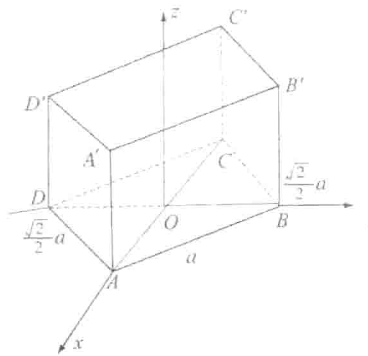

图 8-6

12. 解　M 到 x 轴上的投影 M' 为 $(4,0,0)$，故 M 到 x 轴的距离为 $|\overrightarrow{MM'}|$. 故点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，同理点 M 到 y 轴的距离为 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

13. 两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

解　设点 $P(0,y,z)$ 与 A、B、C 三点等距，

则 $|\overrightarrow{PA}|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

$|\overrightarrow{PB}|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2$

$|\overrightarrow{PC}|^2=(y-5)^2+(z-1)^2$.

因为 $|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，因而

$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}y=1\\z=-2\end{cases}$，故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. **分析**　要证三角形为等腰直角三角形，即证 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{AC}|$ 和 $|\overrightarrow{BC}|$ 满足勾股定理且其中两个向量的模相等，也可证 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

证　因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

所以 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，从而$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

15. 解　$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，

$|\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$.

所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$，$\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

16. 解　(1) $\cos\alpha=0$，则向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面；

(2) $\cos\beta=1$，则向量与 y 轴同向，垂直 zOx 面；

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，则向量既垂直于 x 轴，又垂直于 y 轴，即向量垂直于 xOy 面，亦即与 z 轴平行.

17. 分析　由投影的性质：$(a)_u=|a|\cos\varphi$，即 $\mathrm{Prj}_u a=|a|\cos\varphi$.

解　$\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{r}=4\cdot\cos 60°=\dfrac{1}{2}\times 4=2$.

18. 解　设 A 点坐标为(x,y,z)，则$\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$，由已知得

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7,$$

所以

$$x=-2,y=3,z=0$$

故 A 点坐标为$(-2,3,0)$.

19. 解　$\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$

故 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节　数量积　向量积˙混合积

知识要点及常考点

1. 数量积

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个给定的向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 在空间直角坐标系下，若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

注　① 向量的数量积也称为点积或内积. ② 向量 · 向量 = 数量.

2. 数量积的相关知识点

(1) 非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，可通过 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 计算得出，上

式又可理解为两个单位向量$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$、$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$的数量积，即

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}^0.$$

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{b}^0$ 的数量积表示 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}^0$ 方向的投影.

(3) 用数量积表示向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4) 数量积提供了判断两个向量是否垂直的依据：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(5) 用投影可以表示向量的数量积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

(6) 数量积满足下列运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 为实数.

3. 向量积

两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个新的向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可构成右手系.

注　向量的向量积也称为叉积或外积.

4. 向量积的相关知识点

(1) 向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

则
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

(2) 向量积提供了判断两向量是否平行(共线)的依据：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

(3) 向量积满足下列运算规律：

交换律：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.