2016［张宇考研数学系列丛书］

世纪云图 理工社

张宇

CLASSIC

考研数学题源探析经典1000题

（解析分册·数学一）

1000 EXERCISES ON MATHS

□ Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图 理工社

[张宇

张宇 考研数学题源探析经典1000题

CLASSIC

（解析分册·数学一）

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音顺序）：蔡燧林 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一（笔名）
于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 解析分册. 数学一 / 张宇主编. — 北京：北京理工大学出版社，2015.3

ISBN 978－7－5682－0258－9

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030367 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 19.75
字　　数 / 490 千字
版　　次 / 2015 年 3 月第 1 版　2015 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 49.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

目录

CONTENTS

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

★ 第一篇　高等数学

第 1 章　函数、极限、连续

一、选择题

1.1. (D) **【解析】**对于命题①，由数列收敛的定义可知，若数列$\{u_n\}$收敛于A，则对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，当$n > N$时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$.

可知当$n_i > N$时，恒有 $|u_{n_i} - A| < \varepsilon$.

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于A，可知命题正确.

对于命题②，不妨设数列$\{x_n\}$为单调增加的，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A，则对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，当$n_i > N$时，恒有

$$|x_{n_i} - A| < \varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调增加的数列，对于任意的$n > N$，必定存在$n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1}$，有

$$-\varepsilon < x_{n_i} - A \leqslant x_n - A \leqslant x_{n_{i+1}} - A < \varepsilon,$$

从而 $|x_n - A| < \varepsilon$.

可知数列$\{x_n\}$收敛于A. 因此命题正确.

对于命题③，因$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$，由极限的定义可知，对于任意给定的$\varepsilon > 0$，必定存在自然数$N_1, N_2$：

当$2n > N_1$时，恒有 $|x_{2n} - A| < \varepsilon$；

当$2n+1 > N_2$时，恒有 $|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$.

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，总有$|x_n - A| < \varepsilon$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

【注】本题命题③为2015年考研实考题，提醒读者注意基本功训练.

1.2. (D) **【解析】**令$g(x) = \varphi(\varphi(x))$，注意$\varphi(x)$是奇函数，有

$$g(-x) = \varphi(\varphi(-x)) = \varphi(-\varphi(x)) = -\varphi(\varphi(x)) = -g(x).$$

【注】复合函数的奇偶性：若$f(x)$是偶函数，$\varphi(x)$是奇函数，则在4个复合函数$f(\varphi(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$中，只有$\varphi(\varphi(x))$是奇函数，其余均为偶函数.

1.3. (B) **【解析】**注意在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内，$\sin x$是增函数，$\cos x$是减函数.

任取$x_1, x_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且$x_1 < x_2$，有$\cos x_1 > \cos x_2$，所以$\sin(\cos x_1) > \sin(\cos x_2)$，即$f(x)$是减函数；由于$\sin x_1 < \sin x_2$，所以$\cos(\sin x_1) > \cos(\sin x_2)$，即$\varphi(x)$是减函数.

【注】复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$ 是增函数，而 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$ 是减函数.

1.4. (C) **【解析】** $f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

设
$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\ (k\geqslant 1),$$
则
$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$
因此对任意 $n\geqslant 1$，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故选(C).

1.5. (D) **【解析】** $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.6. (C) **【解析】** 令 $u(x)=\dfrac{2}{x}$，$v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x)=v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x)=\dfrac{1}{x}$，$v(x)=-\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(D).

1.7. (D) **【解析】** 如 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低.

1.8. (A) **【解析】** 对于任意给定的正数 M，总存在着点 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)|=\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(C) 错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x$（只要 $|n|>\dfrac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.9. (B) **【解析】** 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}=\dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha\neq 1)$.

1.10. (D) **【解析】** 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x)=x$，当 $x\to 0$ 时为无穷小，可排除(A). 设 $x\to 0$ 时，令 $f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ 可排除(B)，(C).

1.11. (B) **【解析】方法一** 若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续，则
$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$
在点 x_0 处也连续，与已知矛盾.

方法二 排除法. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，$f(x)\sin x=0$ 在 $x=0$ 处

连续. 若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,但 $f^2(x)=1$, $|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A),(C),(D).

1.12. (A) **【解析】**有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小量.

1.13. (C) **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\left(e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right)}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq 0,$$

则 $n=3$ 时, $C=\dfrac{1}{3}$.

1.14. (A) **【解析】**由泰勒公式 $\sin ax=ax-\dfrac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)(x\to 0)$,

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1$$

$$\Rightarrow a=1,-\frac{1}{6b}=1\Rightarrow a=1,b=-\frac{1}{6}.$$

1.15. (D) **【解析】**分母不为零,故 $\lambda\leqslant 0$;又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,故 $k>0$.

1.16. (D) **【解析】**由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0, x=1$ 为其间断点.

$x\to 1^+, x-1\to 0^+, \dfrac{x}{x-1}\to+\infty, e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty, f(x)\to 0$;

$x\to 1^-, x-1\to 0^-, \dfrac{x}{x-1}\to-\infty, e^{\frac{x}{x-1}}\to 0, f(x)\to-1$;

$x\to 0^+, \dfrac{x}{x-1}\to 0^-, e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^-, f(x)\to-\infty$;

$x\to 0^-, \dfrac{x}{x-1}\to 0^+, e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^+, f(x)\to+\infty$.

故 $x=1$ 是第一类间断点, $x=0$ 是第二类间断点,选(D).

1.17. (A) **【解析】**$x=0$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,其余点连续.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\ln|x|\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+,\\ -\sin 1, & x\to 1^-,\end{cases}$$

因 $x\to 1$ 时, $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$,则 $x=1$ 为跳跃间断点. 答案选择(A).

1.18. (A) **【解析】**不妨设 $f(x)$ 单调增加,且 $|f(x)|\leqslant M$,对任一点 $x_0\in(a,b)$,当 $x\to {x_0}^-$ 时, $f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界,故 $\lim\limits_{x\to {x_0}^-}f(x)$ 存在;当 $x\to {x_0}^+$ 时, $f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界,故 $\lim\limits_{x\to {x_0}^+}f(x)$ 存在,故 x_0 只能是第一类间断点.

二、填空题

1.19. na 【解析】令 $x=-1$，则 $f(1)=f(-1)+f(2)$，因 $f(x)$ 是奇函数，得到 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$. 再令 $x=1$，则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$，现用数学归纳法证明 $f(n)=na$.

当 $n=1,2,3$ 时，已知或者已证. 假设 $n\leqslant k$ 时，有 $f(k)=ka$. 当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$，故对一切正整数 n，有 $f(n)=na$，令 $x=0$，则 $f(2)=f(0)+f(2)$，即 $f(0)=0=0\cdot a$，又 $f(x)$ 是奇函数，故对一切负整数 n 有 $f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$. 所以对一切整数 n，均有 $f(n)=na$.

1.20. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ 【解析】当 x 充分大时，有重要关系：$e^{\alpha x}\gg x^{\beta}\gg \ln^{\gamma}x$，其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$，故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.21. 0 【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$

1.22. 2 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}=2.$$

1.23. $5,\dfrac{1}{4^5}$ 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)\left(1-\dfrac{4}{x}\right)\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}{\left(4-\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}}x^{5-\alpha}=4^{-\alpha}\cdot$ $\lim\limits_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0$，所以 $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{4^5}$.

1.24. -3 【解析】当 $x\to0$ 时，

$$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2,$$

$$\frac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim6x^2,$$

故 $a=-3$.

1.25. $-\dfrac{2}{9}$；2 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\cos\dfrac{2x}{3}-1\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\dfrac{2x}{3}-1}{Ax^k}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2}{2}}{Ax^k}=-\frac{2}{9}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{Ax^k}=1.$$

故 $k=2$，$-\dfrac{2}{9A}=1$，即 $A=-\dfrac{2}{9}$.

1.26. $-\dfrac{1}{32}$；2 【解析】当 $x\to\pi$ 时，

$$\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1$$

$$=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1$$

$$\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$\sim\frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2.$$

故 $A=-\frac{1}{32},k=2.$

1.27. 1 **【解析】** $\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$. $f(x)$ 在零点处连续，可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=a$.

1.28. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **【解析】**因为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right],$$

而

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right],$$

所以 $\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}}$，由于 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$，这样 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\to0(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、解答题

1.29.【解】本题考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先，广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知，

(1) 当 $g(x)\leqslant0$，即 $\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或 $\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1\leqslant0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x\leqslant-\ln2\},$$

$$\{x^2-1\leqslant0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant1\}.$$

(2) 当 $g(x)>0$，即 $\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}$ 或 $\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant0\}=\{x>-\ln2\}\cap\{x\leqslant0\}=\{-\ln2<x\leqslant0\},$$

$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1\text{ 或 }x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上，得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, & x\leqslant-\ln2,\\ \ln(2e^x-1), & -\ln2<x\leqslant0,\\ (x^2-1)^2-1, & 0<x\leqslant1,\\ \ln(x^2-1), & x>1.\end{cases}$

1.30.【解】(1) 若 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$，则 $\sqrt[n]{1}\leqslant\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}\leqslant1\cdot\sqrt[n]{3}$，

若$\frac{1}{2} \leqslant x < 2$，则$2x < \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 2x\sqrt[n]{3}$，

若$2 \leqslant x < +\infty$，则$x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant x^2\sqrt[n]{3}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，故

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<2,\\ x^2, & 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

(2) 因为$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right)$，$\left[\frac{1}{2},2\right)$，$[2,+\infty)$上均连续，又

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4,\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=4,\ f(2)=4,$$

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续.

【注】本题源于苏联的数学竞赛题，在近些年考研中多次涉及，是用夹逼准则求极限的典型考题. 注意本题的放缩法.

(1) 夹逼准则：①$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$；②$y_n\to A, z_n\to A \Rightarrow x_n\to A(n\to\infty)$.

(2) 对于$u_1+u_2+\cdots+u_n(u_i\geqslant 0, n$为有限数)，其放缩法为：

$$1\cdot u_{\max}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant n\cdot u_{\max}.$$

1.31.【解】因为$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$，又

$$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}},\ \lim_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.32.【解】(1) 当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\sin x\sim\frac{x}{n}$，故原极限$=\frac{1}{n}$.

(2) 这是“1^∞”型极限，可用公式$\lim\limits_{x\to 0}u^v=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}v(u-1)\right\}$来计算，事实上$\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1(u\to 1)$. 故原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

(3) 这是“$\infty-\infty$”型未定式极限，首先通分变成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

或利用等价无穷小$e^x-1\sim x$(当$x\to 0$)代换，则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$

等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n$ 是"1^∞"型极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x(1-2a)}\right)\left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)^n$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)^n\right\}=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\frac{1}{6}.$

投命题者所好，当狗 $\to0$ 时，狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$ 狗^3.

(6) 当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2x\sim x^3$，故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\left(x\to0时，\tan x\sim x，1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).$$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据海涅定理,取 $x=\frac{1}{n}$,则原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

(9) 当 $x=0$,原式 $=1$;

当 $x\neq0$ 时,原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(10) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]+0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\dfrac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}$.

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1+\ln x}\right\}=e^0=1$.

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^-}\tan x\ln(\cot x)\}=\exp\{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\cot x)\}=e^0=1$.

(15) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)2\sin x\cos x}{\frac{4}{3}x^3}=\dfrac{3}{2}$.

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

(17) 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$(注意常用的公式:$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$).

(18) $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$;$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$;$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2 2!}+o(x^4)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}$.

(19) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=1$,故

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\right\}=\mathrm{e}.$$

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$.

(21) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)$,$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^3)\ (x\to0)$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}\right\}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

【注】典型错误:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=1$. 错误原因:求极限是一个统一的过程,即,在同一极限号下当 $x\to+\infty$(或 x_0)时,所有的 x 都要 $\to+\infty$(或 x_0),不能一部分 $x\to+\infty$(或 x_0),而另一部分 x 不 $\to+\infty$(或 x_0).

1.33.【证】用反证法.设 $|f(1)|$,$|f(3)|$,$|f(5)|$ 都小于 2,即

$|f(1)|=|a+b+1|<2,\ |f(3)|=|3a+b+9|<2,\ |f(5)|=|5a+b+25|<2,$

则 $$|f(1)-2f(3)+f(5)|\leqslant|f(1)|+2|f(3)|+|f(5)|<2+2\times2+2=8.$$

而事实上，$|f(1)-2f(3)+f(5)|=|a+b+1-6a-2b-18+5a+b+25|=8$ 矛盾，故 $|f(1)|,|f(3)|,|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.34.【解】 $\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，即

$$1<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1.$

1.35.【解】 因为 $x\to0$ 时 $\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$，而

$$\ln\frac{2+\cos x}{3}=\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\sim\frac{\cos x-1}{3}\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3}=-\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$

1.36.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-\ln\mathrm{e}^{2x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin^2x+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^x=1.$$

1.37.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x[1-\mathrm{e}^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}=-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x}+1$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}=1+1=2.$$

1.38.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})(1+\sqrt{\cos 2x})}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot4x^2}{x^2}=1,\text{故}$$

原极限 $=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

1.39.【解】为了在使用洛必达法则时使求导变得简单，先做变量代换，令 $t=\frac{1}{x}$，

从而原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^{t})}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{1+e^{t}}{e^{t}}=2$.

1.40.【解】此题为"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式，若用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

连续使用完两次法则，又回到了起点，法则失效，正确的做法是先对式子恒等变形.

分子分母同乘 e^{-x}，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

1.41.【解】

原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{nx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{n}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\frac{a_n^x-1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)$，

故原极限 $=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

1.42.【解】方法一 原极限等价于求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$. 令 $f(t)=\arctan t,t\in\left[\frac{a}{x+1},\frac{a}{x}\right]$，由拉格朗日中值定理可得

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\zeta^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right)\left(\zeta\in\left(\frac{a}{x+1},\frac{a}{x}\right)\right),$$

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+\zeta^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\zeta^2}\frac{ax^2}{x(x+1)}=a.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)$.

令 $\frac{1}{x}=t\Rightarrow\frac{a}{x+1}=\frac{at}{1+t}$，所以

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan at-\arctan\frac{at}{1+t}}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{a(2t+t^2)}{2t(1+a^2t^2)[(1+t)^2+a^2t^2]}=a.$$

1.43.【解】因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A$，所以 $\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$，又 $x\to0$ 时，

$$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a.$$

这样 $\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)=Ax\ln a+\alpha\cdot x\ln a$，所以 $1+\frac{f(x)}{\sin x}\sim a^{Ax}$，因此

$$f(x)\sim(a^{Ax}-1)\sin x\sim Ax\ln a\cdot\sin x,$$

于是得到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{Ax\ln a\sin x}{x^2}=A\ln a$.

1.44.【解】 设$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,则

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+\lim_{x\to1}\left[2x^2e^{x-1}\lim_{x\to1}f(x)\right]$$

$$\Rightarrow A=\lim_{t\to0}\frac{t-\arctan t}{t^3}+2A$$

$$\Rightarrow A=-\lim_{t\to0}\frac{t-\arctan t}{t^3}=-\lim_{t\to0}\frac{t-\left[t-\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right]}{t^3}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}-\frac{2}{3}x^2e^{x-1}.$$

1.45.【解】 因为$\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$,所以$f(2a)=f(4a)=0$,从而得知$x-2a,x-4a$为$f(x)$的因式.又因为$f(x)$为三次多项式,可令$f(x)=b(x-2a)(x-4a)(x-c)$.于是

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to2a}\frac{b(x-2a)(x-4a)(x-c)}{x-2a}=-2ab(2a-c)=1,$$

$$\lim_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to4a}\frac{b(x-2a)(x-4a)(x-c)}{x-4a}=2ab(4a-c)=1,$$

解得$\begin{cases}b=\dfrac{1}{2a^2},\\c=3a,\end{cases}$所以$f(x)=\dfrac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)$,这样

$$\lim_{x\to3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\frac{1}{2a^2}\cdot a\cdot(-a)=-\frac{1}{2}.$$

1.46.【解】 $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=\dfrac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^\beta}=\dfrac{n^{\alpha-\beta}}{1-\left[1-\dfrac{\beta}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]}=\dfrac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta+n\cdot o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$,

显然由条件知$\beta\neq0$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)}=\begin{cases}\infty, & \alpha-\beta+1>0,\\ \dfrac{1}{\beta}, & \alpha-\beta+1=0,\\ 0, & \alpha-\beta+1<0,\end{cases}$$

因此有$\alpha-\beta+1=0$,且$\dfrac{1}{\beta}=10$,故$\alpha=-\dfrac{9}{10},\beta=\dfrac{1}{10}$.

1.47.【证】 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$

$$=e\cdot\left\{1+\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]+\frac{1}{2!}\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]^2+o(x^2)\right\}$$

$$=e\cdot\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2),$$

故$A=-\dfrac{e}{2},B=\dfrac{11}{24}e$.

1.48.【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right]$,

而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\dfrac{1}{2},\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}=-1$,故原极限$=\dfrac{e}{2}$.

【注】 请问,可以不用洛必达法则吗?当然可以.请读者利用上一题的答案思考.