全国硕士研究生入学统一考试
张同斌考研数学
丛书之二

线性代数

主编◎张同斌

XIANXING DAISHU

合肥工业大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试
张同斌考研数学丛书之二

线性代数

主　编　张同斌
副主编　焦万堂　王玉雷

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张同斌主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2012.5

ISBN 978-7-5650-0736-1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 110382 号

线 性 代 数

张同斌　主编　　　　　　　　　　　　责任编辑　疏利民

出　版	合肥工业大学出版社	**版　次**	2012 年 5 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	**印　次**	2012 年 5 月第 1 次印刷
邮　编	230009	**开　本**	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551—2903038	**印　张**	13.5
	发行部：0551—2903198	**字　数**	328 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	**印　刷**	合肥现代印务有限公司
E-mail	hfutpress@163.com	**发　行**	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-0736-1　　　　　　　定价：24.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题，请与出版社发行部联系调换。

前　　言

本书是工学类、经济学类和管理学类硕士研究生入学考试数学科目中线性代数的复习指导书。根据编者多年评阅试卷和近30年考研辅导班授课经验精心编排巧妙梳理编写而成。全书共分六章，每一章内容均按考试内容与考试要求、知识网络、知识点归纳、常考题型与真题解析、复习效果检测题、复习效果检测题参考答案编写。

“考试内容与考试要求”是最新考研数学大纲线性代数部分内容，是线性代数部分考试命题的依据，使考生一目了然。

“知识网络”从整体的角度考量大纲对这部分内容的要求，使单个的知识点形成知识体系，考生根据知识网络能在较短的时间内了解需掌握的知识，领会其内在联系。

“知识点归纳”系统阐述了考试大纲中要求的基本概念、基本理论、基本方法。知识点的选择和讲解融入了编者近30年教学和考研辅导的经验，既保证了知识的完整性和延续性，又着重突出了考研中的重点和易混淆的地方，以帮助考生深刻理解、融会贯通。

“常考题型与真题解析”是本书的特色之一。归纳总结近十余年的命题规律，将常考的知识点按题型进行归类，针对每种题型，详细给出考点分析，并进行解题方法、技巧的归纳与总结，开拓考生的视野，达到触类旁通、举一反三的效果。2000年以后的真题题目前都有标注，如[一、二，2008]表示2008年数学一、数学二的考题，有利于考生了解命题规律。

“复习效果检测题”与“复习效果检测题参考答案”是为考生检测复习效果专门设计的，题目选自于真题，让考生直面真题，感受真题的风格和命题思路。

本书没有标注的例题与检测题都是编者从2000年以前的真题中筛选出来的，有的是编者近三十年教学的积累，具有较强的代表性。总体来看，本书选题精简，不搞题海战术，内容全面，重点突出，通过学习使考生达到事半功倍的效果。

本书可作为硕士研究生入学考试数学一、数学二、数学三复习线性代数的学习指导书；对于在校的本科生，本书也不失为一本很好的学习指导书。

本书由张同斌教授主编，焦万堂教授、王玉雷老师任副主编。

限于编者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者指正。

编　者

2012年5月28日

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章
行 列 式

1.1　考试内容与考试要求

考试内容(数学一、数学二、数学三)

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求(数学一、数学二、数学三)

(1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

1.2 知识网络

- 行列式
  - 定义：$|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，即不同行不同列元素乘积的代数和
  - 性质
    - 行列式与其转置行列式相等，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
    - 交换行列式的两行(列)行列式的值变号
    - 某行(列)有公因数 k，可把 k 提到行列式外
    - 某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上，行列式的值不变
    - 某行(列)所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
  - 展开式
    - 余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij}，其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
    - $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$(按第 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$(按第 j 列展开)
  - 计算
    - 数值型
      - 化为上三角形行列式
      - 按行(列)展开
    - 抽象型
      - 利用行列式的性质
      - 利用 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
      - 利用分块矩阵的行列式
      - 利用 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
  - 应用：克莱姆法则

1.3　知识点归纳

一、行列式的定义与性质

1. 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

2. 行列式的性质

(1) 行列互换,行列式的值不变,即行列式与其转置行列式相等.

> **【说明】** 该性质说明,在行列式中行与列的地位是一样的. 因此对行具有的性质,对列也有相应的性质.

(2) 交换行列式的两行(列),行列式的值变号.

(3) 行列式的某一行(列) 的所有元素都乘以常数 k 等于用 k 乘以行列式,或者说行列式中某一行(列) 的各元素都有公因子 k,则 k 可提到行列式外.

(4) 把行列式的某一行(列) 的各元素乘以同一个数,然后加到另一行(列) 对应的元素上,行列式的值不变.

(5) 如果行列式中某一行(列) 的元素都是两项之和,则该行列式可以写成两个行列式之和,这两个行列式的这一行(列) 的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列) 元素与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 如果行列式中有某行(列) 元素全为零,或行列式中有某两行(列) 对应元素相同,或行列式中有某两行(列) 对应元素成比例,则该行列式的值为零.

二、行列式按行(列)展开

1. 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩余的元素按原位置次序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式．也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

2. 行列式按行(列)展开

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
则

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D,\text{当 } k=i,(\text{按第 } i \text{ 行展开}) \\ 0,\text{当 } k\neq i, \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D,\text{当 } k=j,(\text{按第 } j \text{ 列展开}) \\ 0,\text{当 } k\neq j. \end{cases}$$

三、一些特殊形式的行列式及行列式的有关计算公式

1. 上(下)三角形(对角)行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \vdots \\ & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 分块矩阵的行列式

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m、n 阶矩阵.

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m、n 阶矩阵.

4. 方阵的行列式的有关公式

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是其特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$，其中 k 是常数.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(6) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

(7) 奇数阶的反对称矩阵的行列式等于零.

四、行列式的计算方法

行列式可分为数值型与抽象型，对于低阶数值型行列式往往采用化为上三角形行列式或行列式按行(列)展开进行计算，对于抽象型行列式往往利用公式 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$、$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$、分块矩阵的行列式以及行列式的性质进行计算；而对于一些特殊形式的行列式往往可以利用下列方法考虑进行计算.

1. 化为上三角形行列式.

2. 某一行(列)消零展开，即降阶法(行列式按某一行(列)展开).

3. 升阶法(加边法).

4. 利用递推公式.

5. 利用数学归纳法.

6. 利用一些特殊形式的行列式. 如

(1) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2)"爪"型行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\left(a_{11} - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{i1}}{a_{ii}} a_{1i}\right).$$

(3) $$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

五、克莱姆(Gramer)法则

1. 克莱姆(Gramer)法则

如果线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则该线性方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$,其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为把 D 的第 j 列的元素换成常数项而得到的行列式.

【说明】 当 $D=0$ 时,方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 可能无解,也可能有无穷多解.

2. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解

当 $D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解;从而如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则必有 $|\boldsymbol{A}|=0$.

1.4 常考题型与真题解析

题型一 数值型行列式的计算

例 1.1 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

[考点] 考查 n 阶数值型行列式的计算.

[详解] 应填 $(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}(n-1)$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有各行元素加起来是同一个常数这一特点，所以考虑将各列元素加到第 n 列，再利用行列式的性质进行计算．

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&n-1\\1&\cdots&0&n-1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&n-1\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1\\1&\cdots&0&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=$$

$$(n-1)\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1\\0&\cdots&-1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(n-1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}(n-1).$$

【注意】 一般地

$$\begin{vmatrix}b&\cdots&b&a\\b&\cdots&a&b\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a&\cdots&b&b\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

这种类型的行列式是 $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$ 的延伸．因此记住一些特殊形式的行列式对计算一般的行列式有很大帮助．

例 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，则 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=$________，其中 a 是常数．

［考点］ 考查秩为 1 的矩阵的 n 次幂、行列式的计算或秩为 1 的矩阵的特征值、已知一个矩阵的特征值求与其相关的矩阵的特征值、方阵的行列式等于其所有特征值的乘积．

［详解］ 应填 $a^2(a-2^n)$．

方法 1： 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$，

所以 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{A}$，

于是 $|aE-A^n|=\begin{vmatrix} a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1} \end{vmatrix}=a^2(a-2^n)$.

方法 2:因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 1,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$,从而 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$ 的特征值为 $a,a,a-2^n$,故 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=a^2(a-2^n)$.

【注意】 ① 一般地,n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$. 且

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\cdots\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=l^{n-1}\boldsymbol{A},$$

其中 $l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. 方法 1 用到了该结论.

② 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,且 $r(\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. 方法 2 用到了该结论.

记住这些常见的结论,对开阔思路,提高解题速度有很大帮助,应引起考生注意.

例 1.3 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4. 【 】

[**考点**] 考查数值型行列式的计算、拉普拉斯展开式.

[**详解**] 应选(B).

由于行列式中每个元素都含有 x,直接展开是不现实的,故要先恒等变形,然后观察出行列元素的特点再进行计算,将第一列的 -1 倍分别加到其余各列,有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).\text{ 故应选(B).}$$

【注意】 本题解题中，用到了拉普拉斯展开式（分块矩阵的行列式），可见记住一些特殊形式的行列式与方阵行列式的有关公式对计算行列式的重要性．

例 1.4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix} =$ ________（其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$）．

［考点］ 考查“爪”型行列式的计算．

［详解］ 应填 $\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n$．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

【注意】 一般地，“爪”型行列式的计算方法是去掉一个“爪”．对于与型的“爪”型行列式，去掉其一个边“爪”可化为上（下）三角形行列式；对于与型的“爪”型行列式，去掉其一个边“爪”可化为副对角形行列式．

例 1.5 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$．

［考点］ 考查行（列）和相等的行列式的计算．

［详解］ 该行列式的特点是每行元素之和都相等，故将所有列加到第一列上，再提出公因子，第一列元素全为 1，再根据新的行列式的特点，将第一行的 (-1) 倍分别加到其它各行上化简计算．

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)b^{n-1}.$$

【注意】 行(列)和相等的行列的计算方法是:将所有列(行)加到第一列(行)上,然后提出公因子,第一列(行)的所有元素全为1,再将第一行(列)的(−1)倍分别加到其它各行(列)上化简计算.

例 1.6 五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=$________.

[考点] 考查形如 $\begin{vmatrix}a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b\\ & & & & c & a\end{vmatrix}$ $(bc\neq 0)$ 型的行列式的计算.

[详解] 应填 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

方法 1:用递推公式计算.

把行列式按第一行展开,得 $D_5=(1-a)D_4+aD_3$,

于是
$$D_5-D_4=-a(D_4-D_3)=-a^2(D_3-D_2)$$
$$=-a^3(D_2-D_1)=-a^5. \tag{1}$$
$$D_5+aD_4=D_4+aD_3=D_3+aD_2=D_2+aD_1=1, \tag{2}$$
将 $a\times(1)+(2)$,得 $(a+1)D_5=1-a^6$.

从而当 $a\neq-1$ 时,$D_5=\dfrac{1-a^6}{a+1}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$;

当 $a=-1$ 时,由(2)式得

$$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=6.$$

综上所述,对任意 a 都有 $D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

方法2:用递推公式计算.

把所有列加到第一列上,得

$$D_5=\begin{vmatrix}1&a&0&0&0\\0&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\-a&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}+(-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}a&0&0&0\\1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\end{vmatrix},$$

即
$$D_5=D_4+(-a)(-1)^{5+1}a^4.$$

因此
$$D_4=D_3+(-a)(-1)^{4+1}a^3,D_3=D_2+(-a)(-1)^{3+1}a^2.$$

把这三个等式相加,并把 $D_2=1-a+a^2$ 代入,得

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

【注意】 方法1与方法2都是利用递推公式计算出来的,不同的是由于行列式的特点采用的具体不同的形式罢了.这种类型的问题的一般的计算方法是:

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&&&&\\c&a&b&&&\\&c&a&b&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&c&a&b\\&&&&c&a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}aD_{n-1}-bcD_{n-2},$$

从而
$$D_n-aD_{n-1}+bcD_{n-2}=0.$$

设 α,β 是一元二次方程 $x^2-ax+bc=0$ 的两个根,则

$$\alpha+\beta=a,\alpha\beta=bc,$$

于是
$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

故
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})$$
$$=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n. \tag{3}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com