华章教育

PEARSON

统计学精品译丛

（原书第7版）

数理统计学导论

Introduction to Mathematical Statistics

(Seventh Edition

Robert V. Hogg
（美）Joseph W. McKean 著
Allen T. Craig

王忠玉 卜长江 译

机械工业出版社
China Machine Press

统计

（原书第7版）

数理统计学导论

Introduction to Mathematical Statistics

(Seventh Edition)

Robert V. Hogg
（美）Joseph W. McKean 著
Allen T. Craig

王忠玉 卜长江 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理统计学导论（原书第 7 版）/（美）霍格（Hogg, R. V.）等著；王忠玉，卜长江译．—北京：机械工业出版社，2014.10
（统计学精品译丛）
书名原文：Introduction to Mathematical Statistics, Seventh Edition

ISBN 978-7-111-47951-2

I. 数… II. ①霍… ②王… ③卜… III. 数理统计 IV. O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 210699 号

本书版权登记号：图字：01-2012-2649

本书是数理统计方面的经典教材，从数理统计学的初级基本概念及原理开始，详细讲解概率与分布、多元分布、特殊分布、统计推断基础、极大似然法等内容，并且涵盖一些高级主题，如一致性与极限分布、充分性、最优假设检验、正态模型的推断、非参数与稳健统计、贝叶斯统计等．此外，为了帮助读者更好地理解数理统计和巩固所学知识，书中还提供了一些重要的背景材料、大量实例和习题．

本书可以作为高等院校数理统计相关课程的教材，也可供相关专业人员参考使用．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：余　洁	责任校对：董纪丽
印　　刷：北京诚信伟业印刷有限公司	版　　次：2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：186mm×240mm　1/16	印　　张：33.25
书　　号：ISBN 978-7-111-47951-2	定　　价：99.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259
投稿热线：（010）88379604
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

推 荐 序

“没有数学的修养，我们很难深入地讨论哲学问题；不从哲学的观点看，则无法深入讨论数学；去掉数学和哲学，则我们根本无法深入地讨论任何事物.”

——Gottfried Wilhelm Leibniz(1646—1716)，德国哲学家、数学家

美国爱荷华大学(University of Iowa)教授 Robert V. Hogg 是一位著名的统计学家，他在当代数理统计领域做出了许多极有影响的研究成果，编写过多本十分畅销的教材，其中他和 Craig 合写的本书第 1 版是其代表著作之一.

本书第 1 版得到了国内外许多大学生和教师的青睐，后来多次再版. 最近几十年来高等数理统计学得到了迅速发展，随着计算机运算能力的不断提高，以前无法完成的计算和算法，现今可以轻而易举地计算出结果. 本书第 7 版正是在这样的背景下，经培生教育(Pearson Education)出版公司邀请 Hogg 继续修订出版而形成的. 可以看出，一本教材若能随着时代发展，依据本领域最新研究成果，不断增添新的研究方法及新程序，同时颇受大学教师和大学生的喜爱，这样的书必定是经过千锤百炼，凝结了作者独特观点的现代版本.

原书作者非常明确地将该书的核心读者对象确立为“统计学专业一年级研究生，但同样适合于数学、统计学以及主修精算学科目的高年级本科生”.

本书第 7 版已经成为高等数理统计学教材的现代版本，具有十分突出的特点，比如采用最新数理统计发展的研究成果，运用统计软件 R 等进行计算，引入新颖的概念及算法，诸如估计量影响函数与崩溃点；新的分析框架，比如最优得分与适应方法等.

本书译者一直致力于国内数理学科外文著作引进和翻译工作，把原文之精神与原义清楚地呈现在读者眼前. 另外，本书在翻译过程中曾得到原书第二作者的指教. 可以确信，中译本为再现原书风格及精髓做出了完善的工作.

吴柏林

台湾政治大学应用数学系

2014 年 6 月于台北

译　者　序

“在终极的分析中，一切知识都是历史．在抽象的意义下，一切科学都是数学．在理性的世界里，所有判断都是统计学．”

——劳(C. R. Rao)，当代统计学家

统计学作为一种工具性学科，能够帮助人们从复杂纷纭的大量数据现象中汲取有用的信息．当今时代是一个信息爆炸的年代，唯一不变的真理就是变化自身．越是能从杂乱无章的数据中看出端倪的人员，越是能掌握新经济时代的制胜先机．统计学正是最有效的解决之道，它可以对最熟悉的常识数据资料数据化并加以验证，从庞大的数据库中萃取其策略要旨，使得学术研究人员或实际工作者真正迈入科学研究探索的殿堂．

数理统计学的主要目的是为随机试验提供可利用的数学模型，一旦得到随机试验的数学模型，并提出详尽完整的理论，统计学家则会在这种框架下对随机试验做出统计推断．然后，据此对未知参数给出估计或假设检验．如何获取数据的阶段称为研究设计，包括抽样技术、试验设计等．当获取数据之后，通过分析数据得出某种结论，做出某种判断的阶段称为统计推断，包括参数估计和假设检验两个主要部分．

数理统计学和概率论是两个有密切联系的姊妹学科．大体上说，概率论是数理统计学的基础，而数理统计学是概率论的重要应用．数理统计学是统计学研究方法及应用的基石．数理统计学是一门应用广泛、分支很多的学科，它在和其他学科的结合中产生出许多新的分支，是实施社会经济分析研究和科学试验必不可少的工具之一．

数理统计学作为一门应用性极强的学科，具有其方法、应用和理论基础．本书正是专门阐述现代数理统计学的理论及内容的当代最负盛名的教材．

随着数量研究方法日益广泛地应用于社会科学，特别是数量经济学、数理金融学、金融风险管理领域，对于那些想更好学习和掌握前沿性数量方法的人来说，就必须学习和钻研高等数理统计知识．美国康奈尔大学经济学系洪永淼教授等曾在“论中国计量经济学教学与研究”一文中指出，不论硕士研究生还是博士研究生，在学习高级经济计量学之前建议学习 Hogg 等人的《Introduction to Mathematical Statistics》．无疑，掌握了高等数理统计学，将有助于由经典理论到前沿研究的过渡．

本书无论是其内容深度还是涉及范围都对应于国内的高等数理统计学．本书翻译由哈尔滨工业大学经济与管理学院的王忠玉和哈尔滨工程大学理学院的卜长江共同完成，王忠玉翻译第 1 章、第 2 章、第 6 章、第 8 章、第 9 章、第 10 章、第 11 章以及附录 A、附录 B；卜长江翻译第 3 章、第 4 章、第 5 章、第 7 章以及附录 C、附录 D、附录 F．参加后期校对工作的人员包括魏巍博士、李春红博士研究生、孙薇博士研究生，还有研究生高敬一、陈静、江研研、刘杰、徐凤艳，以及哈尔滨工业大学王雪松教授．对上述人员的帮助和大力支持表示衷心感谢．对于这样一部卓越的高等数理统计学著作，译者虽然竭尽全力学习和翻译，书稿译文仍难免存在不足，欢迎广大读者和同仁批评指正．

最后，特别感谢吉林大学商学院数量经济研究中心的赵振全教授多年来对译者的教导及帮助，数量经济研究中心的陈守东教授、孙巍教授等也曾对译者给予大力支持，同时感谢哈尔滨工业大学严质彬教授、台湾政治大学应用数学系吴柏林教授对译者给予的帮助．还要感谢原书作者之一 McKean 教授的有益指教．

本书翻译出版得到2008年教育部人文社会科学重点研究基地重大项目《我国金融资产、商品及劳动力价格的动态传导机制与宏观调控研究》(08JJD790153)资助．

译者

2014 年 6 月

前 言

第 7 版的改动内容

我们在准备编写第 7 版时，仍将目标确定为：撰写一部优秀的数理统计学教材. 在这个新版本中，我们增加了一些例题和习题，这有助于透彻理解所述内容. 基于同样的理由，我们将某些内容调整至前面. 例如，对随机变量线性组合的性质讨论，从第 4 章调整到第 2 章. 这样做有益于讨论第 3 章及新的第 4 章的统计性质.

主要变动之一是，将“统计推断基础”从第 5 章调整至第 4 章. 这一章推断内容涵盖置信区间与统计假设检验，即两个最重要的统计推断概念. 我们在第 4 章首先讨论随机样本与点估计. 通过简略讨论极大似然估计(极大似然推断的理论仍在第 6 章全面阐述)引入点估计. 不过，第 4 章的讨论是采用例子加以阐述. 在第 4 章讨论点估计之后，继续阐述置信区间与假设检验. 对单样本与两个样本问题(大样本及小样本)的推断进行了研究. 我们运用大量例子来阐述内容，其中几个例子利用了现实数据. 还增加了研究现实数据的一些习题. 另外，对阐述内容进行更新，例如，探讨了离散分布参数的准确置信区间，讨论了自助法置信区间与假设检验，实际上，这些内容的应用越来越广泛. 这些变动使得一个学期的课程可以涵盖基本的统计理论及应用. 这样课程可以包括第 1～4 章，假如时间允许，还可包括第 5 章的部分内容. 就两个学期的课程而言，对统计推断的基本认识将十分有助于学生对后面第 6～8 章统计推断理论的学习.

另一个重要的变动是，将第 12 章对稳健概念(影响函数和崩溃点)的讨论调整至第 10 章的章尾. 为了反映这种调整，将第 10 章的标题改为“非参数与稳健统计学”. 在新的第 10 章里面，所增加的内容本质上是以前版本第 12 章所建立的重要稳健概念. 此外，第 9 章和第 10 章讨论简单线性模型. 因此，就这种调整而言，我们删掉了第 12 章.

附录 B 提供了 R 函数的更多例子，这样做有助于那些想要使用 R 来执行统计计算及模拟的读者. 附录 D 还增加了离散分布与连续分布的总览表. 这些内容对于读者来说，起到快速浏览和参考的作用.

内容与课程规划

第 1 章和第 2 章为读者提供学习本书其余内容所必需的概率与分布理论的背景内容. 第 3 章讨论最广泛运用的离散与连续概率分布. 第 4 章包括上述内容的基本推理. 第 5 章阐述依概率收敛与依分布收敛的大样本理论，并且以中心极限定理结束. 第 6 章提供基于极大似然理论的完整推断(包括估计与检验)，这一章还包括对 EM 算法及其可用于几种极大似然情况的讨论. 第 7 章和第 8 章包括充分统计量与最优假设检验. 最后三章则提供统计学中三个重要专题的理论. 其中，第 9 章介绍基本方差分析、单变量回归以及相关模型的正态分布方法的推断. 第 10 章阐述关于位置与单变量回归模型的非参数方法(估计与检验)，并讨论了效率、影响以及崩溃点的稳健概念. 第 11 章阐明贝叶斯方法，包括传统贝

叶斯方法和马尔可夫链蒙特卡罗方法.

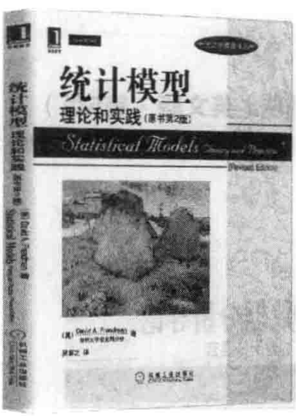
我们的教材可用于各类不同层次的数理统计学课程. 一个学期的课程可包括第 1～4 章的绝大部分章节. 第二学期的课程通常包括第 5～8 章，尽管某些教师可能更愿意使用源于第 9～11 章的专题内容. 例如，贝叶斯拥护者愿意在第 5 章之后就讲授第 11 章，而对于非参数统计学者，可能较早地把第 10 章插入教学中，或者传统统计学者可能包括第 9 章的专题.

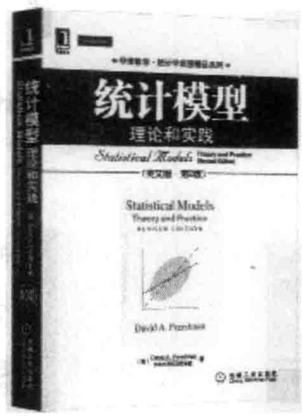
致谢

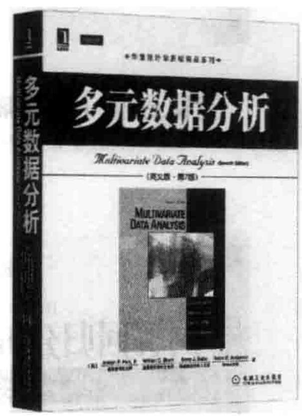
我们要感谢众多读者. 他们的建议及评论对于准备编写这一版本来说是非常宝贵的. 特别感谢爱荷华大学的 Jun Yan，他在自己的网页上为大家提供第 6 版的有关信息. 同时，也特别感谢宾州州立大学的 Thormas Hettmansperger、奥本大学的 Ash Abebe，还有波特兰州立大学的 Bradford Crain 给予有益评论. 我们感谢认真准确的审校人员 Kimberly F. Sellers(乔治城大学)，还有 Brian Newquist、Bill Josephson、Joan Saniuk 所给予的仔细审核. 我们还要感谢下列审阅人给出的评价及建议，他们是 Ralph Russo(爱荷华大学)、Kanapathi Thiru(阿拉斯加大学)、Lifang Hsu(莱莫恩学院)、Xiao Wang(马里兰巴尔的摩大学). 最后，但同样重要的是，要感谢我们的亲人 Ann 和 Marge，她们为我们的努力工作提供了巨大支持.

Bob Hogg & Joe McKean

推荐阅读







统计学（原书第5版）

作者：William Mendenhall 等 ISBN：978-7-111-26437-8 定价：128.00元

理工科概率统计（原书第8版）

作者：Ronald E Walpole 等 ISBN：978-7-111-27708-8 定价：98.00元

数据统计与数据分析（原书第3版）

作者：John A RIce ISBN：978-7-111-33646-4 定价：85.00元

统计模型：理论和实践（原书第2版）

作者：David A Freedman ISBN：978-7-111-30989-5 定价：45.00元

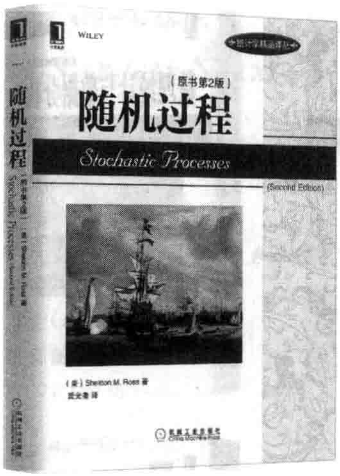
统计模型：理论和实践（英文版·第2版）

作者：David A Freedman ISBN：978-7-111-341797-5 定价：38.00元

多元数据分析（英文版·第7版）

作者：Joseph F Hair Jr 等 ISBN：978-7-111-34198-7 定价：109.00元

推荐阅读

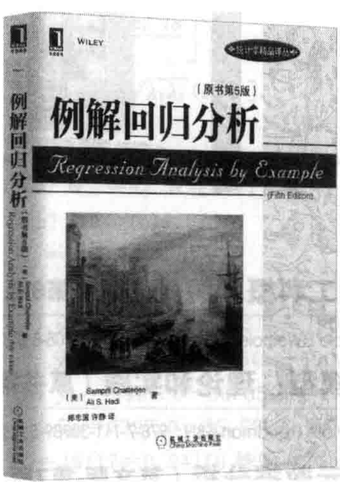


随机过程（原书第2版）

作者：（美）Sheldon M. Ross 译者：龚光鲁 ISBN：978-7-111-43029-2 定价：79.00元

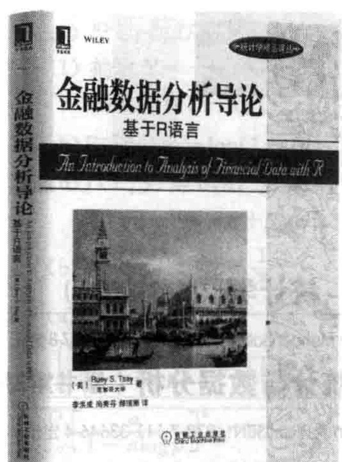
统计模拟（英文版·第5版）

作者：（美）Sheldon M. Ross ISBN：978-7-111-42045-3 定价：59.00元



例解回归分析（原书第5版）

作者：（美）Samprit Chatterjee 等 译者：郑忠国 等 ISBN：978-7-111-43156-5 定价：69.00元



金融数据分析导论：基于R语言

作者：（美）Ruey S. Tsay 译者：李洪成 等 ISBN：978-7-111-43506-8 定价：69.00元

目　录

第1章 概率与分布

1.1 引论

许多各类研究中，其特征可能是部分通过重复实验来刻画，这些重复实验基本上是在相同条件的情况下进行的，或多或少是一种标准程序．例如，在医学研究中，人们可能关心用药疗效，或者经济学家可能关心三种特定商品在不同时期的价格，农学家可能关心化肥对各类谷物产量影响的效果．研究者要从这类现象提取信息，唯一方式是进行实验．每一次实验得出一个结果．但是，这些实验的特性是，在实验进行之前无法确知得到的结果将会怎样．

假定我们有一个实验，其一次实验的结果不能事前确知，但所有可能的结果是在实验前就知道的．若这类实验在相同条件下可重复进行，则称它为**随机实验**(random experiment)，而所有可能结果的全体称为**实验空间**或**样本空间**(sample space)．

例 1.1.1 抛一枚硬币，令 T 表示反面，而令 H 表示正面．如果我们假定硬币可以在相同条件下重复进行抛掷，那么此硬币的抛掷是随机实验的事例，其结果是 T 与 H 两个符号之一；也就是，样本空间是两个符号的集合． ■

例 1.1.2 掷红白两颗骰子，设其结果是一个有序对(红骰子面朝上出现的点数，白骰子面朝上出现的点数)．如果我们假定这两颗骰子在相同条件下可以重复实验，那么此种掷骰子的序对是随机实验．样本空间是由 36 个有序对组成的：(1，1)，…，(1，6)，(2，1)，…，(2，6)，…，(6，6)． ■

设$\mathcal{C}$表示样本空间，c 表示$\mathcal{C}$的元素，C 表示$\mathcal{C}$元素的集合．由于结果依赖于实验的完成，当结果处于 C 之中时，我们称事件 C 发生了．现在，我们考虑随机实验执行 N 次重复实验．于是，通过执行 N 次实验，我们就能计算事件 C 实际所发生的次数 f(频率)．比值 f/N 称为这 N 次实验中事件 C 的**相对频率**．对于 N 的很小值来说，相对频率通常是不稳定的，正如你通过抛硬币所表现的那样．但是，当 N 增大，实验会显示出与事件 C 有关的一个数，比如 p，它等于或近似等于那个相对频率看起来稳定的数．如果这样，那么数 p 可被解释成下面的数：将来执行实验时，事件 C 的相对频率将要等于或者近似于的那个数．因而，尽管我们不能预测随机实验的结果，但对于 N 的很大值来说，我们却能大致预测结果将位于 C 中的相对频率．对于与事件 C 联系的数 p，人们给予了各种各样的称谓．有时，称它为概率，指随机实验的结果位于 C 中；有时，称它为事件 C 的概率；有时，称它为 C 的**概率测度**(probability measure)．通常，选择合适的术语要依其内容而定．

例 1.1.3 设$\mathcal{C}$表示例 1.1.2 的样本空间，并且设 C 表示$\mathcal{C}$中那些序对之和等于 7 的所有序对的全体．因而，C 为(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)以及(6，1)的全体．假定掷骰子 $N=400$ 次，并设 f 表示和数为 7 的频率，$f=60$．于是，位于 C 中那些结果的相对频率就是 $f/N=\frac{60}{400}=0.15$．因此，与 C 联系的数 p 接近于 0.15，而称 p 为事件 C 的

概率. ■

注释 1.1.1 前面对概率的解释有时称为*相对频率方法*(relative frequency approach)，而且很明显，它依赖于本质上相同条件下进行重复实验的事实. 然而，许多人将概率的观念拓展到其他情况，把概率看成是一种相信事件可能发生的合理测量. 例如，陈述 $p=\frac{2}{5}$，表示事件 C 的*个人*(personal)或*主观*(subjective)概率等于$\frac{2}{5}$. 因此，如果他们不反对赌博，那么这可被解释成他们对 C 中结果下赌注的意愿，所以两种可能的支付是比值 $p/(1-p)=\frac{2}{5}\Big/\frac{3}{5}=\frac{2}{3}$. 此外，如果他们确实认为 $p=\frac{2}{5}$是正确的，那么他们将接受下述两个赌注之一：1. 若 C 发生，则赢得 3，若 C 不发生，则输掉 2；2. 若 C 不发生，则赢得 2，若 C 发生，则输掉 3. 然而，由于 1.3 节中将给出的概率的一些数学性质与上述两种解释中的任何一个都相吻合，因此后来的数学发展，与采用何种概率方法毫无关系. ■

数理统计理论之所以存在，其主要目的是为随机实验提供可以利用的数学模型. 一旦建立了这类实验的数学模型，就可运用该理论进行详细的数学推导，统计学家在此框架下就可对随机实验做出推断(也就是，得出结论). 构建这种模型需要概率理论. 其中一种更具有逻辑性的概率理论就是建立在集合概念以及集函数基础上的. 这些概念将在 1.2 节介绍.

1.2 集合理论

通常，集合概念或者对象全体是不用定义的. 然而，对特殊集合进行表述，可以确知所考虑的对象全体，而就不会产生误解. 例如，一旦对前 10 个正整数集合做出充分良好的阐述，那么显然数$\frac{3}{4}$与 14 均不在此集合中，而数 3 则在此集合中. 如果对象属于集合，那么称它是集合的*元素*(element). 例如，若用 C 表示满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数集，则$\frac{3}{4}$是集合 C 的元素. $\frac{3}{4}$是集合 C 的元素这一事实可通过$\frac{3}{4}\in C$ 来表示. 更一般地，$c\in C$ 指 c 是集合 C 的元素.

我们经常所涉及的集合将是*数集*(set of numbers). 然而，可以证明，*点*(point)集语言比数集语言更加方便. 因此，我们简略地说明我们是如何使用这一术语的. 在解析几何学中，特别强调下面的事实：直线上的每一点(在直线上选取一个原点与单位点)都存在唯一一个比如说 x 与之相对应；而对每一个数来说，直线上存在唯一一个点与之相对应. 数和直线点之间的这种一一对应促使我们毫无异意地说成“点 x”而不是“数 x”. 进一步地，就平面直角坐标系和 x 与 y 数而言，每一个符号(x, y)均对应于此平面上唯一一个点；而平面上每一点均对应于仅此一个这样的符号. 这里，我们再次说成“点(x, y)”，这意指“有序数对 x 与 y”. 当我们在三维空间或更多维空间中具有直角坐标系时，就能方便地运用这种语言. 因而，“点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$”意指依次表述数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 因此，在描述集合时，我们往往说成点集(集合的元素均为点)，当然要小心谨慎，因为描述集合要避

免模棱两可. 记号 $C=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$读成"$C$ 是满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一维点 x 的集合. 类似地, $C=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$读成"$C$ 是二维点(x, y)的集合, 其中点(x, y)位于具有对顶点$(0, 0)$与$(1, 1)$的正方形之内或边界上.

如果 C 是有限的或元素个数和正整数一样多, 我们称集合 C 为**可数的**(countable). 例如, 集合 $C_1=\{1, 2, \cdots, 100\}$, $C_2=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$都是可数集合. 可是, 实数区间$[0, 1]$却是不可数的.

现在, 给出一些定义(连同说明例题), 引出适合我们的目的的集合基本代数运算.

定义 1.2.1 如果集合 C_1 的每一个元素也是集合 C_2 的元素, 那么集合 C_1 称为集合 C_2 的子集(subset). 这可用 $C_1\subset C_2$ 来表示. 若 $C_1\subset C_2$ 并且 $C_2\subset C_1$, 则两个集合具有相同的元素, 并可用 $C_1=C_2$ 来表示.

例 1.2.1 设 $C_1=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$, 并且 $C_2=\{x: -1\leqslant x\leqslant 2\}$. 可以看出, 这里一维集合 C_1 是一维集合 C_2 的子集, 也就是 $C_1\subset C_2$. 因此, 当集合维数显而易见时, 我们将不特意提及它. ■

例 1.2.2 定义两个集合 $C_1=\{(x, y): 0\leqslant x=y\leqslant 1\}$与 $C_2=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 由于 C_1 的元素都是正方形对角线上的元素, 所以 $C_1\subset C_2$. ■

定义 1.2.2 若集合 C 没有任何元素, 则称 C 为**空集**(null set). 这可用 $C=\varnothing$ 来表示.

定义 1.2.3 所有由至少属于集合 C_1 与 C_2 的元素组成的集合称为 C_1 与 C_2 的**并**(union). C_1 与 C_2 的并可用 $C_1\cup C_2$ 来表示. 几个集合 C_1, C_2, C_3, $\cdots$的并是所有由至少属于几个集合之一的元素所组成的, 如果所涉及的集合个数是有限的, 记为 $C_1\cup C_2\cup C_3\cup\cdots$或用 $C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$ 来表示.

我们将 $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ 形式的并集称为**可数并集**(countable union).

例 1.2.3 定义集合 $C_1=\{x: x=8, 9, 10, 11$ 或 $11<x\leqslant 12\}$, 并且 $C_1=\{x: x=0, 1, \cdots, 10\}$. 于是,

$$\begin{aligned} C_1\cup C_2 &= \{x: x=0,1,\cdots,8,9,10,11 \text{ 或 } 11<x\leqslant 12\} \\ &= \{x: x=0,1,\cdots,8,9,10 \text{ 或 } 11\leqslant x\leqslant 12\} \end{aligned}$$ ■

例 1.2.4 如同例 1.2.1 一样定义 C_1 与 C_2, 于是 $C_1\cup C_2=C_2$. ■

例 1.2.5 设 $C_2=\varnothing$. 于是, 对于任意集合 C_1, $C_1\cup C_2=C_1$. ■

例 1.2.6 对于任意集合 C, $C\cup C=C$. ■

例 1.2.7 设 $C_k=\left\{x: \frac{1}{k+1}\leqslant x\leqslant 1\right\}(k=1, 2, 3, \cdots)$. 于是, $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k=\{x: 0<x\leqslant 1\}$. 注意, 数 0 不在此集合中, 因为它不在集合 C_1, C_2, C_3, $\cdots$的任一集合中. ■

定义 1.2.4 所有由属于集合 C_1 与 C_2 的每一个元素组成的集合称为 C_1 与 C_2 的**交**(intersecton). C_1 与 C_2 的交可写成 $C_1\cap C_2$. 几个集合 C_1, C_2, C_3, $\cdots$的交是所有由属于这几个集合中每一个集合的元素所组成的. 如果所涉及集合的个数是有限的, 这一交集记为 $C_1\cap C_2\cap C_3\cap\cdots$或用 $C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_k$ 表示.

我们将 $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ 形式的交集称为**可数交集**(countable intersection).

例 1.2.8　设 $C_1=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$，并且 $C_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. 于是，$C_1\cap C_2=\{(1,1)\}$. ■

例 1.2.9　设 $C_1=\{(x,y): 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$，并且 $C_2=\{(x,y): 1<x+y\}$. 于是，C_1 与 C_2 没有公共点，从而 $C_1\cap C_2=\varnothing$. ■

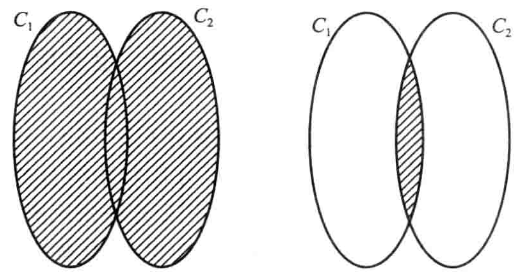
例 1.2.10　对于任意集合 C，$C\cap C=C$，且 $C\cap\varnothing=\varnothing$. ■

例 1.2.11　设

$$C_k=\left\{x: 0<x<\frac{1}{k}\right\}, k=1,2,3,\cdots$$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k=\varnothing$，这是因为没有一点属于 C_1，C_2，C_3，…的每一个集合. ■

例 1.2.12　设 C_1 与 C_2 表示分别由两个相交的圆所围起的点的集合. 于是，集合 $C_1\cup C_2$ 与 $C_1\cap C_2$ 分别由图 1.2.1 中**文氏图**(Venn diagram)阴影区域来表示. ■



a) $C_1\cup C_2$　　　　b) $C_1\cap C_2$

图 1.2.1

定义 1.2.5　在一些讨论或研究中，要涉及讨论的所有元素的整体. 对于正在研究的所有元素这种集合可给出一个特定称谓，称为**空间**(space). 我们经常用字母诸如$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$表示.

例 1.2.13　抛四次硬币，设 x 表示正面朝上次数. 当然，正面朝上次数将是数 0，1，2，3，4. 于是，这个空间是集合$\mathcal{C}=\{0,1,2,3,4\}$. ■

例 1.2.14　考察底为 x 且高为 y 的非退化长方形. 为了保证有意义，x 与 y 两者均为正的. 于是，空间由集合$\mathcal{C}=\{(x,y): x>0, y>0\}$给出. ■

定义 1.2.6　设$\mathcal{C}$表示空间，并且设 C 表示$\mathcal{C}$的子集. 由所有$\mathcal{C}$中的且不是 C 的元素所组成的集合称为 C 的补集(complement，或称为余集)(通常，相对于$\mathcal{C}$而言). C 的补集用 C^c 表示. 特别地，$\mathcal{C}^c=\varnothing$.

例 1.2.15　设$\mathcal{C}$如同例 1.2.13 所定义的，同时设集合 $C=\{0,1\}$. C 的**补集**(相对于$\mathcal{C}$而言)是 $C^c=\{2,3,4\}$. ■

例 1.2.16　给定 $C\in\mathcal{C}$. 于是，$C\cup C^c=\mathcal{C}$，$C\cap C^c=\varnothing$，$C\cup\mathcal{C}=\mathcal{C}$，$C\cap\mathcal{C}=C$，而 $(C^c)^c=C$. ■

例 1.2.17(德摩根律)　我们将要证明一系列有用的规则，即著名的德摩根律. 设$\mathcal{C}$表示空间，而设 $C_i\subset\mathcal{C}$，$i=1,2$. 于是

$$(C_1\cap C_2)^c=C_1^c\cup C_2^c \tag{1.2.1}$$

$$(C_1\cup C_2)^c=C_1^c\cap C_2^c \tag{1.2.2}$$

习题 1.2.4 要求读者证明这些规则. ■

微积分教科书和本书中所使用的许多函数均是将实数映射到实数. 可是，我们时常涉及将集合映射到实数的函数. 当然，这样的函数称为集合函数，或者更简单地称为**集函数**(set function). 我们将给出集函数的一些实例，并在某些简单集合上计算它们.