MPA

2015年MPA联考高分突破

数学分册

全国公共管理专业学位研究生教育指导委员会秘书处 组编

中国人民大学出版社

2015年MPA联考高分突破
数学分册

全国公共管理专业学位研究生
教育指导委员会秘书处　组编

胡显佑　褚永增　编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2015年MPA联考高分突破．数学分册/全国公共管理专业学位研究生教育指导委员会秘书处组编．—北京：中国人民大学出版社，2015.5
ISBN 978-7-300-21391-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①D035

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第113993号

2015年MPA联考高分突破
数学分册
全国公共管理专业学位研究生教育指导委员会秘书处　组编
2015 Nian MPA Liankao Gaofen Tupo
Shuxue Fence

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.1kao.com.cn（中国1考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**版　　次**	2002年6月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2015年6月第14版
总 印 张	58.75	**印　　次**	2015年6月第1次印刷
总 字 数	1 434 000	**总 定 价**	169.00元（共四册）

出版说明

为帮助考生在使用《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试大纲》和《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试指南》的基础上，进一步适应考试要求，全面、系统、有针对性地复习专业课各门课程，我们特邀请各联考院校的专家编写了这套“MPA联考高分突破”系列图书，包括公共管理基础、逻辑、数学和语文共四个分册。

本套书具有以下特点：

定位精准。本套书定位于对考点、重点、难点的精解精练，内容是《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试大纲》和《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试指南》的继续和延伸。书中既注重知识的全面系统，又注重知识在考试中的应用，在内容全面的基础上突出重点，力求将重点、难点和考点讲清、讲透，帮助考生在薄弱环节下工夫。

结构实用。各分册均包括考点提示、例题分析、同步练习、模拟试卷等方面的内容，将大纲要求、逻辑结构、考试要点、强化训练等巧妙地结合在一起，知识脉络分明，重点内容突出，帮助考生边学边练，巩固复习成果，熟悉考试，适应考试。

权威人士编写。本套书的编写者，均为多年从事硕士研究生教学、命题研究和考试辅导的专家学者，他们熟悉专业学位的命题、考试以及考生的需要，深谙命题的原则、思路和最新考试动态。他们结合多年命题研究成果和经验编写出的各分册，具有很强的权威性、实战性和针对性。

由于各专业学位的英语考试统一为“在职攻读硕士学位全国联考英语考试”，所以这套书不包含英语部分。为帮助考生复习英语，我们出版了“在职攻读硕士学位全国联考英语考试系列”辅导图书，供考生参考选用。

我们相信，广大考生在认真阅读本套书后，一定能够迅速提高专业水平和应试能力，在考试中取得优异成绩。

中国人民大学出版社

前　言

公共管理硕士（MPA）自 2001 年实行全国统一联考。数学作为联考的必考科目之一，要求考生系统地掌握微积分和概率统计的基础知识，要求考生具有一定的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力、基本运算能力和综合运用能力。这对于工作多年、尤其是工作中不系统运用数学的考生来说确实是一个相当高的要求。

为了帮助有志攻读 MPA 的考生顺利通过数学联考，我们建议，考生在复习数学时应有计划地分为三个阶段：在第一阶段，应根据联考数学考试大纲和考试指南，系统地复习有关概念、定理和公式。每复习一单元的内容，必须完成必要的基本练习，达到基本掌握考试内容的目的。在第二阶段，则应在第一阶段的基础上，总结问题，将考试重点和题型进行归纳，通过适量的综合练习达到融会贯通的目的。在第三阶段，则进行适量的考前模拟测验，检查自己复习的效果，补救复习中的漏洞。

本书是为考生第二阶段的复习编写的。根据考试大纲的要求，本书将各章节的重点题型加以归纳总结。各类题型均有适量的典型例题，并做了详细解答。书中还对各类解题方法做了小结，并在各章都附有自测练习。例题和自测练习既注重循序渐进，又强调数学概念、定理和方法的综合运用。这将使考生的应试能力有较大的提高。

本书第一版出版后，受到了广大考生的欢迎，成为许多辅导班的必备教材。根据广大师生的建议，本书第 13 版又对上一版进行了修订，改正了前版中个别的排印错误。通过修订，读者使用起来会更方便。

编者

目录

第一章
函数、极限与函数的连续性

第一节 函　数

考点归纳

1. 函数的概念、函数的定义域和值域.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 反函数.
4. 复合函数.
5. 基本初等函数的性质和图形.

考点突破

命题趋势

函数是微积分学的研究对象，有关函数性质的讨论将贯穿整个微积分学. 重点题型为：求函数的定义域；求反函数；求复合函数；判断函数的奇偶性.

难点剖析

1. 分段函数. 分段函数的定义域是各段定义域的并集；其反函数、复合函数应分段求出.

2. 函数的有界性与单调性. 函数的这两个性质可应用导数进行讨论，我们将在第二章讨论这一问题. 一些简单的初等函数的有界性、单调性可根据基本初等函数的性质直接判定.

3. 函数的周期性. 有关三角函数周期的讨论请参阅附录.

典型例题

题型 1：求函数的定义域

基本初等函数的定义域可直接得出；分段函数的定义域为各段定义域的并集；复合函数的

定义域,则应根据基本初等函数的定义域,得到一个不等式组,解不等式组可得复合函数的定义域.

例 1(填空题) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$的定义域为________.

解 由已知函数知,自变量 x 应满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x+2>0\\ x+2\neq 1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x>-2\\ x\neq -1\end{cases}$$

在数轴上表示如图 1—1:

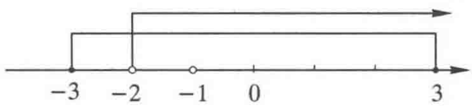

图 1—1

由此可得,定义域

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

例 2(填空题) 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$,则 $f(\ln x)$的定义域为________.

解 由例 1,$f(x)$的定义域为

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

所以,对于 $f(\ln x)$,有

$$-2<\ln x<-1 \text{ 或 } -1<\ln x\leqslant 3$$

即 $\mathrm{e}^{-2}<x<\mathrm{e}^{-1}$ 或 $\mathrm{e}^{-1}<x\leqslant \mathrm{e}^3$

于是 $f(\ln x)$的定义域为$(\mathrm{e}^{-2},\mathrm{e}^{-1})\cup(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^3]$.

例 3(选择题) 下列各选项中,两个函数相同的是( ).

(A) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}, g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}, g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

解 (A) $f(x)$和 $g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但是

$$g(x)=|\cos x|$$

即 $f(x)$与 $g(x)$的对应规则不同. $f(x)$与 $g(x)$是不同的函数.

(B) 两函数有相同的定义域$(-\infty,0)\cup(0,1)$,当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,故$f(x)$与 $g(x)$是相同的两个函数.

故本题应选(B).

小结 1. 两个函数 $f(x),g(x)$的定义域相同,且对应规则相同时,两个函数相同.

2. 如果已知函数 $y=f(x)$的解析表达式,求其定义域,应考虑:

(1)分母不能是零;

(2)偶次根式下,被开方数非负;

(3)对数函数中底数大于 0,且不等于 1,而真数应大于 0;

(4)在反正弦、反余弦函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中,$|x|\leqslant 1$.

根据这些要求,列出不等式组,即可求出定义域.

例 4(填空题) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2, & -3\leqslant x<0\\ x, & 0<x\leqslant 4\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>4\end{cases}$$

则函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域为________.

解 函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域就是函数 $y=f(x)$的值域,故只需求 $f(x)$的值域.

对于 $y=f(x)$,

当$-3\leqslant x<0$ 时,有$-36\leqslant f(x)<0$;

当 $0<x\leqslant 4$ 时,有 $0<f(x)\leqslant 4$;

当 $x>4$ 时,有 $f(x)>4$.

由此得 $f(x)$的值域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$,即 $f^{-1}(x)$的定义域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$.

小结 求函数的定义域的方法.

1. 根据基本初等函数的定义域,列出不等式组,求出其解集,一般用区间表示. 如例 1.

2. 对于分段函数,其定义域是各段定义域的并集,如例 4.

3. 对于复合函数 $f(g(x))$的定义域,应先求出 $f(x)$的定义域,再列出关于 $g(x)$的不等式,此不等式的解集就是 $f(g(x))$的定义域,如例 2.

题型 2:求反函数

求函数 $y=f(x)$的反函数,只需解出 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上,需将 x 换为 y,y 换成 x,即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 5(填空题) 函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的反函数为________.

解 由已知函数,得

$$e^x y+y=e^x$$

$$e^x=\frac{y}{1-y}$$

即 $$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

所以 $f(x)$的反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

例 6 求函数

$$y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2\\ \ln x-\ln 2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

的反函数.

解 由 $x\leqslant 0$ 和 $y=x-2$,得

$$x=y+2,y\leqslant -2$$

由 $0<x<2$ 和 $y=-\sqrt{4-x^2}$,得

$$x=\sqrt{4-y^2},-2<y<0$$

由 $x\geqslant 2$ 和 $y=\ln x-\ln 2$,得

$$x=2e^y,y\geqslant 0$$

即

$$x=\begin{cases}y+2, & y\leqslant -2\\ \sqrt{4-y^2}, & -2<y<0\\ 2e^y, & y\geqslant 0\end{cases}$$

故所求反函数

$$y=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -2\\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x<0\\ 2e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

注意 分段函数的反函数应分段求出,再合写在一起.

例 7 求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域.

解 函数的值域为其反函数的定义域. 由已知函数,有

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$$

可得其反函数为

$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

解不等式$\dfrac{1+x}{1-x}>0$,得$-1<x<1$. 即函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$的值域为$-1<y<1$.

题型 3:求复合函数的表达式

若已知 $f(x)$和 $g(x)$的解析表达式,求 $f(g(x))$的表达式,只需用 $g(x)$代入 $f(x)$中的 x.

若已知 $f(g(x))$的解析表达式,求 $f(x)$的表达式,可令 $t=g(x)$,并将 $f(g(x))$化为 t 的一个表达式.

例 8(填空题) 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,则 $f'(x)=$________.

解 要求 $f'(x)$,需由已知条件先求出 $f(x)$.

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$,则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. 即

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以

$$f(t)=t^2-2$$

即 $f(x)=x^2-2$. 由此易得

$$f'(x)=2x$$

例 9 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$,

求 $f(x+1)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}(x+1)-1, & x+1<0\\ (x+1)^2, & x+1\geqslant 0\end{cases}$

即 $f(x+1)=\begin{cases}x, & x<-1\\ (x+1)^2, & x\geqslant -1\end{cases}$

例 10 若函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$,求函数 $g(x)=f(f(x))$及其定义域.

解 由已知条件,有

$$g(x)=\begin{cases}1,|f(x)|\leqslant 1\\ 0,|f(x)|>1\end{cases}$$

而对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,总有 $|f(x)|\leqslant 1$,故

$$g(x)=1$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 11(填空题) 设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$,则 $f(x)=$________.

解 $f(x)$与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$的自变量之间互为倒数,于是用$\frac{1}{x}$代替 x,有等式$\frac{1}{x^2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$,与原方程联立,可解得 $f(x)=\frac{2x-x^2}{3(x+1)}$.

题型 4:判断函数的奇偶性

讨论函数 $y=f(x)$的奇偶性时,必须注意函数定义域的对称性. 例如,定义在$[0,+\infty)$上的函数 $y=x^2$ 就不是偶函数.

判断函数 $y=f(x)$是否为奇函数或偶函数的基本方法是利用函数奇偶性的定义.

例 12 设 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,$f(x)$为奇函数,判断$F(x)$的奇偶性.

解 设 $g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}g(-x)&=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\\ &=-g(x)\end{aligned}$$

即 $g(x)$为奇函数,又 $f(x)$为奇函数,故 $F(x)$为偶函数.

例 13(选择题) 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数 $f^{-1}(x)$是( ).

(A) 奇函数,但非偶函数

(B) 偶函数,但非奇函数

(C) 既是奇函数,也是偶函数

(D) 非奇、非偶函数

解法 1 因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数. 而 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$的曲线关于 $y=x$ 成轴对称,因此 $f^{-1}(x)$必为奇函数. 故本题应选(A).

解法 2 由 $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$可得

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0$$

所以 $$e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^{x}>0$,由上式舍去负号项,有

$$e^{x}=y+\sqrt{y^2+1}$$

所以 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

反函数 $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

由于
$$\begin{aligned}f^{-1}(-x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f^{-1}(x)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(x)$为奇函数.

故本题应选(A).

例 14(选择题) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导. 若 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,则(　　)是奇函数 .

(A)$g(x)$　　　　(B)$g(-x)$

(C)$g'(x)$　　　　(D)$1+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

解 对于(A),(B)

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x).$$

所以(A)、(B)均为偶函数.

对于(C)

$$g'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)-f'(-x)].\text{所以}$$

$$\begin{aligned}g'(-x)&=\frac{1}{2}[f'(-x)-f'(x)]\\&=-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(-x)]\\&=-g'(x)\end{aligned}$$

所以 $g'(x)$为奇函数,故本题应选(C).

例 15(选择题)　设定义在$(-\infty,+\infty)$的偶函数 $f(x)$存在导函数，下列函数可能既非奇函数也非偶函数的是(　　).

(A) $f'(x)$　　　　(B) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

(C) $-f(2x)$　　　　(D) $f(x)x^3$

解　可以验证，$f'(x)$为奇函数，$f(x)x^3$ 也为奇函数，$-f(2x)$为偶函数，仅(B)的奇偶性与 a 的取值有关，即仅当 $a=0$ 时，为偶函数. 故本题应选(B).

例 16　设 $F(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$是连续函数，判断 $F(x)$的奇偶性.

解　$F(-x)=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t$，

令 $u=-t$，则 $t=0$ 时，$u=0$；$t=-x$ 时，$u=x$. $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$. 于是

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^x f(u^2)\mathrm{d}u\\&=-F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$为奇函数.

小结　一些有关奇函数、偶函数的结论可作为定理使用，应熟记. 其中较重要的是：

1. 奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.
2. 两个奇(偶)函数的积必为偶函数.
3. 可导奇(偶)函数的导数必为偶(奇)函数.
4. 若 $f(x)$为连续的奇(偶)函数，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

为偶(奇)函数.

题型 5：函数的图形

在了解基本初等函数的性质和图形的基础上，会判断函数 $y=f(x)$的图形的特点及 $y>f(x)$或 $y<f(x)$所表示的区域.

例 17(选择题)　假设甲、乙两国关于拥有洲际导弹数量的关系曲线 $y=f(x)$和 $x=g(y)$的意义是：

当甲国拥有导弹 x 枚时，乙国至少需储备导弹 $y=f(x)$枚，才有安全感；

当乙国拥有导弹 y 枚时，甲国至少需储备导弹 $x=g(y)$枚，才有安全感.

这两条曲线将坐标平面的第一象限分成四个区域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，如图 1—2 所示. 双方均有安全感的区域是(　　).

(A) Ⅰ和Ⅲ　　　　(B) Ⅲ

(C) Ⅱ　　　　(D) Ⅱ和Ⅳ

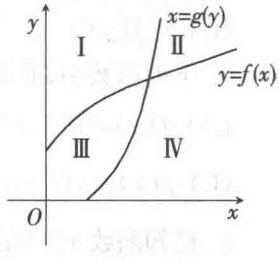

图 1—2

解　根据已知条件：当甲国拥有导弹 x 枚时，乙国至少需储备导弹 $y=f(x)$枚，所以乙国的导弹储备区域为Ⅰ和Ⅱ.

类似的分析知：甲国的导弹储备区域为Ⅱ和Ⅳ，故两国均有安全感的区域为Ⅱ. 本题应选(C).

自测练习

(一) 选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$,则(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的值域是(　　).

(A) $-1\leqslant y\leqslant 1$　　(B) $-1\leqslant y<1$

(C) $-1<y\leqslant 1$　　(D) $0\leqslant y\leqslant 1$

3. 若 $f(x)=x\mathrm{e}^{-|\sin x|}\quad(-\infty<x<+\infty)$,则 $f(x)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 奇函数

4. 函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为(　　).

(A) $[-3,-2]\cup[3,4]$　　(B) $(-3,-2)\cup(3,4)$

(C) $(-3,2]\cup[3,4]$　　(D) $[-3,2)\cup(3,4]$

5. 设 $x\in(-1,1)$,则函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$(　　).

(A) 既是奇函数,又是单调减函数

(B) 既是奇函数,又是单调增函数

(C) 既是偶函数,又是单调减函数

(D) 既是偶函数,又是单调增函数

6. 设 $f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,则下列函数中必为奇函数的是(　　).

(A) $f[g(x)]$　　(B) $g[f(x)]$

(C) $f[f(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

7. 下列函数中,非奇非偶的函数是(　　).

(A) $f(x)=3^x-3^{-x}$　　(B) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(C) $f(x)=x(1-x)$　　(D) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

8. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调减,则下列函数中单调增的是(　　).

(A) $f^2(x)$　　(B) $\dfrac{1}{f(x)}$

(C) $f(-x)$　　　　　　　　　　　　(D) $xf(x)$

(二) 填空题

1. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为________;

反函数为________;

值域为________.

2. 如果 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$,且 $f[f(x)]=x$,则 $a=$________.

3. 设 $f(e^{2x})=xe^{-2x}$,则 $f'(x)=$________.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,记 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n次}$,则 $f_n(x)=$________.

5. 函数 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$的定义域为全体实数,则 k 的取值范围是________.

6. 已知 $f(x)+f(y)=f(z)$,如果 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $z=$________.

7. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,则 $a=$________,$b=$________.

(三) 计算题

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^x f(t^2)dt\quad(a>0,a\neq1)$

2. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\ln(1-e^{-x})$　　(2) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant0\\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1\\ \ln x, & 1\leqslant x\end{cases}$

3. 若函数 $f(x)=x^3+x^2+x+1$,证明 $x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

4. 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)>0$. 求 $\varphi(x)$,并确定其定义域.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$,求 $g[f(x)]$.

6. 某商品供给量 Q 是价格 P 的函数:

$$Q=Q(P)=a+b\cdot c^P$$

若 $P=2$ 时 $Q=30$;$P=3$ 时 $Q=50$;$P=4$ 时 $Q=90$,求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

参考答案及解析

(一) 选择题

1. 答:(D)

解 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\(-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}$,化简后,得

$$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}.$$故应取(D).

2. 答:(C)

解 $y=\dfrac{-1-x^2+2}{1+x^2}=-1+\dfrac{2}{1+x^2}$. 而 $0<\dfrac{2}{1+x^2}\leqslant 2$,所以,$-1<y\leqslant 1$. 故应取(C).

3. 答:(D)

解 $f(-x)=-x\mathrm{e}^{-|\sin(-x)|}=-f(x)$. 故应取(D).

4. 答:(A)

解 由 $x^2-x-6\geqslant 0$,且 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$,解得 $x\in[-3,-2]$ 或 $x\in[3,4]$. 故应取(A).

5. 答:(A)

解 对 $x\in(-1,1)$,$f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$.

即 $f(x)$ 为奇函数,而

$$f'(x)=-\frac{1}{(1-x^2)\ln 10}<0$$

所以,$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调减. 故应取(A).

6. 答:(D)

解 因为 $g[g(-x)]=g[-g(x)]=-g[g(x)]$,即 $g[g(x)]$ 必为奇函数. 故应取(D).

7. 答:(C)

解 对于选项(C),$f(-x)=-x(1+x)$,故 $f(x)$ 为非奇非偶函数,选项(A),(B),(D) 均为奇函数. 故应取(C).

8. 答:(C)

解 对任意的 $x_1<x_2$,有 $-x_1>-x_2$,所以,$f(-x_1)<f(-x_2)$,即 $f(-x)$ 为单调增函数. 故应取(C). 选项(A),(B),(D) 均不正确. 如:$f(x)=-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为单调减函数,但 $f^2(x)=x^2$,$\dfrac{1}{f(x)}=-\dfrac{1}{x}$,$xf(x)=-x^2$ 均非单调函数.

(二) 填空题

1. 答:$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;$\dfrac{1-x}{1+x}$;$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

解 定义域为 $x\neq -1$,即 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,所以反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,$f^{-1}(x)$ 的定义域 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 就是 $f(x)$ 的值域.

2. 答:-3.

解 $f[f(x)]=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{ax}{2x+3}+3}=\dfrac{a^2x}{2ax+6x+9}=x$,故必有 $2a+6=0$,得 $a=-3$.

3. 答:$\dfrac{1}{2x^2}(1-\ln x)$.

解　先求 $f(x)$. 令 $t=\mathrm{e}^{2x}$，则 $x=\frac{1}{2}\ln t$，于是，$f(t)=\frac{1}{2}\ln t\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{2t}\ln t$，即 $f(x)=\frac{1}{2x}\ln x$. 所以，

$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}\ln x+\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x^2}(1-\ln x).$$

4. 答：$\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

解　$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，设 $f_{n-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，则 $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

5. 答：$0\leqslant k<\frac{3}{4}$.

解　由已知条件，方程 $kx^2+4kx+3=0$ 无实根，所以判别式 $\Delta=16k^2-12k<0$，解得 $0<k<\frac{3}{4}$，而 $k=0$ 时，$y=\frac{7}{3}$，仍有定义，故 $0\leqslant k<\frac{3}{4}$.

6. 答：$\frac{xy}{x+y}$.

解　由已知条件，有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$，解得 $z=\frac{xy}{x+y}$.

7. 答：4；-1.

解　$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b=8x+3$. 于是，$2a=8, a+b=3$. 得 $a=4, b=-1$.

(三) 计算题

1. **解**　(1) $f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}=-\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

$$
\begin{aligned}
(2) f(-x)&=\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\int_0^{-x}f(t^2)\,\mathrm{d}t \quad [\text{令 } t=-u]\\
&=\left(\frac{a^x}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)\int_0^{x}f(u^2)\,\mathrm{d}(-u)\\
&=-\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}\int_0^{x}f(t^2)\,\mathrm{d}t\\
&=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a^x+1}\right)\int_0^{x}f(t^2)\,\mathrm{d}t\\
&=f(x)
\end{aligned}
$$

故 $f(x)$ 为偶函数.

2. **解**　(1) 由 $y=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$ 知，定义域为 $(0,+\infty)$，且 $\mathrm{e}^y=1-\mathrm{e}^{-x}$，所以 $\mathrm{e}^{-x}=1-\mathrm{e}^y$，得 $x=-\ln(1-\mathrm{e}^y)$，即所求反函数为 $y=-\ln(1-\mathrm{e}^x)$.

(2) 当 $x\leqslant 0$ 时，有 $y=x-1$，所以 $x=y+1, y\leqslant -1$；当 $0<x<1$ 时，有 $y=-\sqrt{1-x^2}$，所以 $x=\sqrt{1-y^2}, -1<y<0$；当 $x\geqslant 1$ 时，有 $y=\ln x$，所以 $x=\mathrm{e}^y, y\geqslant 0$. 故所求反函数为

$$y=\begin{cases}x+1, & x\leqslant -1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0\end{cases}.$$