理工社®

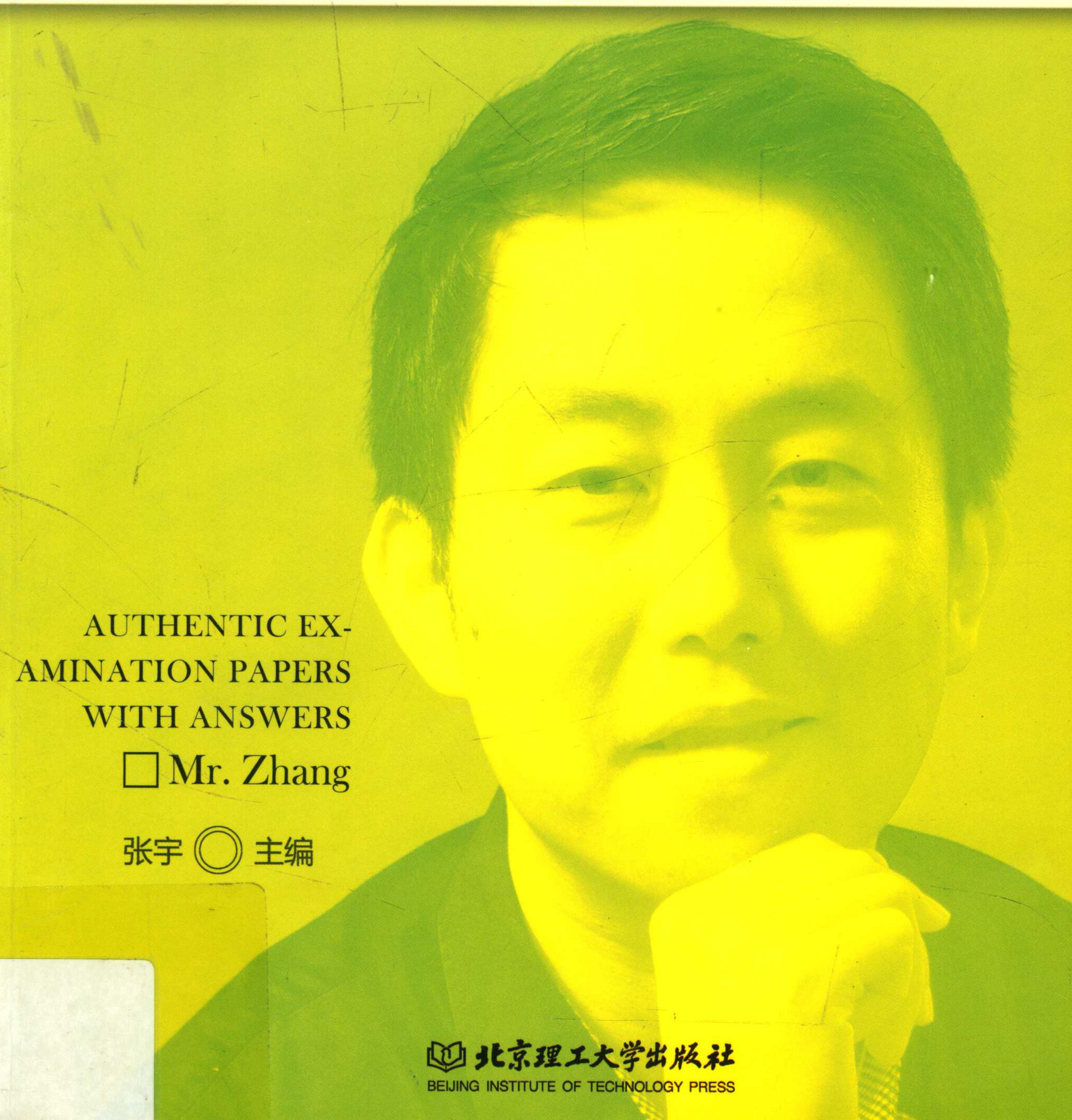
[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（精解分册 · 数学一）



AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社

[张宇考研数学系列丛书

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（精解分册 · 数学一）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 精解分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.7
ISBN 978-7-5640-9480-5

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 148159 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 15.5
字　　数 / 380 千字
版　　次 / 2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 46.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

——给读者一个全面的考研数学历史资料

先给读者讲个故事.1637年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:"方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解."现在说来,小学生都知道:$3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立.然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上"乱写乱画":"你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,…,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geqslant 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了."这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战.不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:"我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了."——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个"外行"难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼兹等等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来.一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了……直到1993年,也就是在费马提出这个定理的356年之后,才被美籍英裔数学家外尔斯证明出来,单单证明就写了1000多页.外尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖("唯一"是因为菲尔兹奖只授予40岁以前的数学家,但是当时的外尔斯已经45岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖).

费马的这个定理,被数学界称为"会下金蛋的鸡",因为在证明这个定理的数百年中,产生了好多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值.因此,费马的这个定理被正式命名为:**费马大定理**.你见过有几个定理叫"大定理"?很少很少.一个"大"字,足以体现这个定理的分量.

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自已体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用"费马大定理"的"大"字,把我的这本书命名为:真题"大"全解.因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从1987年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准.直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了如下两大特点:

第一,**考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大**.考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身"喜好"的影响很小.所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子.

第二,**考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须**.为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了.所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从

1987 年到今天积累下来的命制过的试题（这里还包括从未考过的备考卷上的试题），以此为基础，"参考""改编"甚至"照搬"这些题. 故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一，**考研数学试题收录的全面性**. 收录从全国统考以来所有的考研数学试题，给读者提供一个完整的历史资料，而不是部分试题. 从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则.

第二，**考研数学试题解析的权威性**. 凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织的专家写的答案，参考其答案. 总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和精解分册. 试卷分册中，我将 1987 年至 2014 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；精解分册中，试题及其解析则按章节进行分类，方便读者按照章节的逻辑性研读真题. 其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除. 那么在试卷分册中，被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分. 当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们不仅在每套试卷后安排了答案速查栏目，同时也将试卷分册与精解分册做了全面的索引. 值得注意的是，本书仅为数学一的真题大全解，需考数学一的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学二与数学三的真题大全解.

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处. 我在《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》中已经给读者提出了建议：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，不要有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？"干干净净"的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献. 感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2014 年 7 月 于北京

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

高等数学

第 1 章　函数、极限与连续

一、选择题

1.1.［1992－Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ］ 当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A)等于 2.　　(B)等于 0.　　(C)为 ∞.　　(D)不存在但不为 ∞.

答　应选(D).

解　由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$，

而
$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

则 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在，但不是 ∞.

1.2.［1994－Ⅰ，Ⅱ］ 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则必有

(A)$b=4d$.　　(B)$b=-4d$.　　(C)$a=4c$.　　(D)$a=-4c$.

答　应选(D).

解
$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{a\tan x}{x}+\frac{b(1-\cos x)}{x}}{\frac{c\ln(1-2x)}{x}+\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}},$$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0$；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x}{x}=-2$；
$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0.$$

则
$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\frac{a}{-2c}=2,$$

从而 $a=-4c$.

1.3.［2003－Ⅰ］ 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图 1.1－1 所示，则 $f(x)$ 有

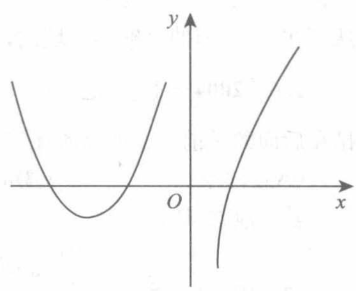


图 1.1－1

(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点.

答　应选(C).

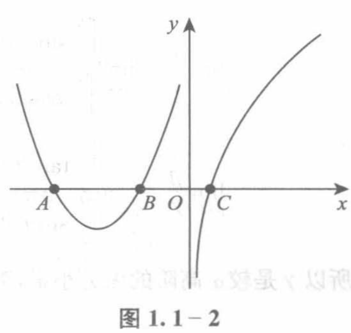


图 1.1－2

解　添字母如图 1.1－2，在点 A 左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$. 所以点 A 为 $f(x)$ 的极大值点，同理可知点 B 与 C 都是 $f(x)$ 的极小值点，关键是点 O 处，在它左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，而 $f(x)$ 在点 O 连续，所以点 O 也是 $f(x)$ 的极大值点(不论在 $x=0$ 处 $f(x)$ 是否可导，见极值第一充分条件).

1.4.［2003－Ⅰ］ 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意n成立.

(B)$b_n<c_n$ 对任意n成立.

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.

(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

答 应选(D).

解 令$d_n=b_nc_n$. 因$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1>0$，由保号性知，当$n$足够大时，$b_n>0$. 从而$c_n=\dfrac{d_n}{b_n}$有定义. 若$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}d_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\text{存在，}$$

与条件矛盾. 故$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在，选(D).

其它(A)、(B)、(C)均可举出反例. (A)的反例可取$a_n=\dfrac{2}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，当$n=1$时$a_1=2>0=b_1$. (B)的反例可取$b_n=\dfrac{n+1}{n}$，$c_n=n$，当$n=1$时$b_1=2>1=c_1$. (C)的反例可取$a_n=\dfrac{1}{n}$，$c_n=n$，$a_nc_n=1\to1$.

1.5.［2003－Ⅰ］ 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A)点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点.

(B)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点.

(C)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点.

(D)根据所给条件无法判别点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点.

答 应选(A).

解 由极限与无穷小的关系，在点$(0,0)$的充分小的邻域内有

$$f(x,y)=xy+(1+\alpha)(x^2+y^2)^2\text{，其中}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0.$$

于是 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)^2$.

从而在点$(0,0)$的足够小邻域内，在$xy>0$处$f(x,y)>0$，在$xy<0$处$f(x,y)<0$. 故知$f(0,0)$不是极值.

1.6.［2004－Ⅰ］ 把$x\to0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小量，则正确的排列次序是

(A)α,β,γ. (B)α,γ,β. (C)β,α,γ. (D)β,γ,α.

答 应选(B).

解 因
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^x\cos t^2\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\cos x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}{\int_0^x\cos t^2\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}\cos x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

所以γ是较α高阶的无穷小量，β是较γ高阶的无穷小量，即选项(B)正确.

1.7.［2007－Ⅰ］ 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

答　应选(B).

解　排除法．考生应对几个常用的等价无穷小量很熟悉．当 $x\to 0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$，不选(A)、(C)、(D)，所以选(B).

1.8.［2008－Ⅰ］ 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛．　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛．

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛．　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛．

答　应选(B).

解　在选项(B)中，因为数列 $\{x_n\}$ 单调，考虑到 $f(x)$ 是一个单调有界函数，所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调，而且有界，从而收敛．

1.9.［2009－Ⅰ］ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

答　应选(A).

解　根据泰勒公式，得

$$f(x)=x-\sin ax=x-\left[ax-\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)\right]$$
$$=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3-o(x^3),$$
$$g(x)=x^3\ln(1-bx)=x^2[(-bx)+o(x)]$$
$$=-bx^3+o(x^3).$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小量，所以

$$\begin{cases}1-a=0,\\ \dfrac{1}{6}a^3=-b\end{cases}\quad 即\ a=1,\quad b=\frac{1}{6}.$$

1.10.［2010－Ⅰ］ 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

(A) 1.　(B) e.　(C) e^{a-b}.　(D) e^{b-a}.

答　应选(C).

解　当 $a=b$ 时，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right]^{\frac{a^2}{x^2-a^2}\cdot x}=e^0=1;$$

当 $a\neq b$ 时，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right]^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}=e^{a-b}.$$

综上可知正确选项为(C).

1.11.［2013－Ⅰ］ 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k，c 为常数，且 $c\neq 0$，则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.　(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

答　应选(D).

解法 1 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，且 $c\neq 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}x^k=0$.

又因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{kx^{k-3}},$$
所以根据洛必达法则，知：

当 $k>3$ 时，
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\infty;$$
当 $k<3$ 时，
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=0.$$
依题设知
$$k=3,c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{3}.$$

解法 2 因为 $x-\arctan x=x-\left[x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]=\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{3-k}}{3}+\frac{o(x^3)}{x^k}\right].$$
由于当 $k>3$ 时，
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{3-k}}{3}+\frac{o(x^3)}{x^k}\right]=\infty;$$
当 $k<3$ 时，
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{3-k}}{3}+\frac{o(x^3)}{x^k}\right]=0.$$
所以依题设知
$$k=3,c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{3-k}}{3}+\frac{o(x^3)}{x^k}\right]=\frac{1}{3},$$
即选项(D)正确.

二、填空题

1.1.［1990－Ⅰ，Ⅱ］ 设 a 是非零常数，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________.

答 应填 e^{2a}.

解法 1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$. $(a\neq 0)$

当 $a=0$ 时，
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=1=e^{2a},$$
则对一切的 a，有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$.

解法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^x$，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2a}{x-a}\cdot x\right)=2a$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$.

1.2.［1990－Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ］ 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

答 应填 1.

解 由 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1\end{cases}$ 知,对一切的 x 有 $|f(x)|\leqslant 1$,则 $f[f(x)]=1$.

1.3.[1991—Ⅰ,Ⅱ] 已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$________.

答 应填 $-\dfrac{3}{2}$.

解 由于 $x\to 0$ 时 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$,$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,\text{即 } a=-\frac{3}{2}.$$

1.4.[1995—Ⅰ,Ⅱ] $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

答 应填 e^6.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\cdot\dfrac{2}{\sin x}\right)=6$,则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^6$.

1.5.[1996—Ⅰ,Ⅱ] 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$________.

答 应填 $\ln 2$.

解 由于 $\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^x$,

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax}{x-a}=3a$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=e^{3a}$. 由 $e^{3a}=8$ 知 $a=\ln 2$.

1.6.[1997—Ⅰ] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

答 应填 $\dfrac{3}{2}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$(1+\cos x)\ln(1+x)\sim 2x$,

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}$.

对于第一个极限,显然 $\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{3}{2}$;

对于第二个极限,是有界函数乘无穷小量仍是无穷小量,故
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

因而 原式 $=\dfrac{3}{2}$.

1.7.[1998—Ⅰ] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

答 应填 $-\dfrac{1}{4}$.

解 由洛必达法则,
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}. \qquad (*)$$

至此又有两条路可走. 一是分子分母同乘以($\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$),

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4};$$

或者是将(*)中的分母 $4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$ 先处理之,然后再将其余部分用洛必达法则.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=\frac{1}{4}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}.$$

1.8.[1999-Ⅰ] $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$________.

答 应填 $\frac{1}{3}$.

解 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

1.9.[2003-Ⅰ] $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

答 应填 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 或 $e^{-\frac{1}{2}}$.

解 $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$,

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

所以原式 $=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

本题也可用洛必达法则计算 $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$;也可用重要极限:原式 $=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$.

1.10.[2005-Ⅰ] 曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

答 应填 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

解 因为 $a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$,$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{4}$,所以 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 是曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线.

1.11.[2006-Ⅰ] $\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

答 应填 2.

解 当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,从而

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

也可以用洛必达法则求解:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x}=2.$$

三、解答题

1.1.［1987－Ⅰ,Ⅱ］ 求正常数 a 与 b,使等式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$ 成立.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\frac{x^2}{b-\cos x}=1$,故必有$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,得 $b=1$.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a}}$,从而$\frac{2}{\sqrt{a}}=1$,得 $a=4$.

1.2.［1988－Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ］ 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

解 由 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$.
所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,$x\leqslant 0$.

1.3.［1991－Ⅰ,Ⅱ］ 求$\lim\limits_{x\to +0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解法 1 由洛必达法则

$$原式=\exp\left\{\lim_{x\to +0}\frac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right\}=\exp\left\{\pi\lim_{x\to +0}\frac{-1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

解法 2 原式$=\lim\limits_{x\to +0}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\cdot\pi}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

1.4.［1992－Ⅰ,Ⅱ］ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解法 1 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}(\mathrm{e}^x-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{1}=1$.

解法 2 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}=1$.

1.5.［1993－Ⅰ,Ⅱ］ 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2$.

1.6.［1996－Ⅰ,Ⅱ］ 设 $x_1=10$,$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

证 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知,对一切正整数 n,都有 $x_n>x_{n+1}$,即$\{x_n\}$为单调减少数列. 又显见 $x_n>0$,$(n=1,2,\cdots)$,即$\{x_n\}$有下界,根据极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

再设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $a=\sqrt{6+a}$成立. 从而 $a^2-a-6=0$. 解得 $a=3$,$a=-2$,但因$x_n>0(n=1,2,\cdots)$,所以 $a\geqslant 0$,舍去 $a=-2$,得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

1.7.［2000－Ⅰ］ 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$，

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故原式$=1$.

1.8.［2002－Ⅰ］ 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0,f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

解 由题设条件知

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0.$$

由于 $f(0)\neq0$，故必有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}\\&=(a+2b)f'(0),\end{aligned}$$

因 $f'(0)\neq0$，故 $a+2b=0$.

于是得 $a=2,b=-1$.

1.9.［2006－Ⅰ］ 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ） 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

（Ⅱ） 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

（Ⅰ） **证** 由于当 $0<x<\pi$ 时 $0<\sin x<x$，所以当 $0<x_n<\pi$ 时，$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$. 已知 $0<x_1<\pi$，故由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$，

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n,$$

即$\{x_n\}$单调减少且 $x_n>0$. 由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，则 $a\geqslant0$. 将 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边命 $n\to\infty$ 取极限，得 $a=\sin a$，易见 $a=0$ 是它的一个解. 另一方面，若 $a>0$，必有 $a>\sin a$，所以由 $a=\sin a$ 只能得到唯一解 $a=0$，即有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ） **解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}},$$

又由（Ⅰ）知当 $n\to\infty$时 $x_n\to0$，故考虑函数极限：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\\&\xlongequal{\text{等价无穷小量替换}}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\xlongequal{\text{等价无穷小量替换}}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6},\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}},$$

从而
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$