浙江省高等教育重点教材

运筹学及其应用

胡觉亮　卢向南　莫燕 编著

浙江人民出版社

运筹学及其应用

胡觉亮　卢向南　莫　燕
编　著

浙江人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学及其应用/胡觉亮等编著.—杭州:浙江人民出版社,2004.8(2006.12重印)

ISBN 7-213-02890-1

Ⅰ.运… Ⅱ.胡… Ⅲ.运筹学 Ⅳ.022

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第086365号

运筹学及其应用

胡觉亮 卢向南 莫 燕 编著

出版发行	浙江人民出版社 (杭州体育场路347号) 市场部电话:0571-85176516
激光照排	杭州兴邦电子印务有限公司
印 刷	杭州大众美术印刷厂 (杭州市拱康路)
开 本	787×1092毫米 1/16
印 张	18.75
字 数	46.4万
版 次	2004年8月第1版 2006年12月第2次印刷
书 号	**ISBN 7-213-02890-1**
定 价	**32.00元**

如发现印装质量问题,影响阅读,请与市场部联系调换。

内容简介

本书是一本注重方法与应用，又兼顾原理的运筹学教材。全书由十一章构成，系统地介绍了运筹学中线性规划及对偶理论、运输问题、目标规划、整数规划、网络规划及网络计划技术、非线性规划、动态规划、排队论、决策论、存储论的基本概念、理论、方法、模型和应用。各章后均附有习题，以帮助复习基本知识和检查学习效果。

本书可作为高等学校数学与应用数学、信息与计算科学、管理、财经类和理工类其他专业本科生、研究生相关课程的教材与参考书，亦可供工程技术人员和经济管理干部研究参考。

前　言

运筹学(Operations Research)即最优化方法是20世纪40年代随着战争的需要和现代工业的迅速发展而产生、发展起来的一门多种学科交叉的综合学科，是最早形成的一门软科学。它把科学的方法(尤其是数学方法)、技术和工具应用到一个系统的各种管理问题上，为人们提供最佳的解决问题的方法。它是一门集数学理论与实验，既严密又富启发性的学科，既可把它当作应用数学的一个分支来研究，又几乎在所有科技领域(尤其在经济活动中)，包括生产管理、工程建设、军事作战、科学实验、财政经济以及社会系统等各个领域中有广泛应用。它已是各类专业人才必须具备的基本素质。

本书以线性规划为重点，系统地介绍了运筹学的主要分支：线性规划及对偶理论、运输问题、目标规划、整数规划、网络规划及网络计划技术、非线性规划、动态规划、排队论、决策论、存储论的基本概念、基本原理和基本方法。书中大部分内容作者在本科、研究生的《运筹学》、《最优化方法》等课程中多次使用和修改。本教材力图做到内容丰富而结构科学，以适应不同类型与层次的教学对象。考虑到运筹学理论上的严谨性和学生的学习后劲，对有关的原理和方法介绍了它们的来龙去脉，并给予了必要的推导和论证，有些用几何直观来加以解释，使读者知其然，且知其所以然；同时，通过实例入手，介绍数学模型，了解模型背景。并通过应用举例，培养学生建立数学模型、求解模型以及分析解答结果的能力和技巧，真正体现运筹学"源于实践，归于实践"的目标。

本教材作者分工如下：胡觉亮(浙江理工大学)完成第一、二、三、四、七章；卢向南(浙江大学)完成第八、九、十、十一章；莫燕(浙江理工大学)完成第五、六章。

作者要感谢浙江大学姚恩瑜教授对书稿形成的鼓励与支持。感谢浙江理工大学的周永华、韩曙光、周晓林老师和研究生董建明同学对本书的初稿提出的有益的建议和意见。

由于作者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，恳请专家、读者斧正，以利今后修改。

作　者

2004年7月

目　　录

第一章　线性规划及单纯形法

线性规划(Linear Programming,简记为 LP)是运筹学的一个重要分支,是运筹学中研究较早、发展较快、理论上较为成熟和应用上极为广泛的一个分支.特别是 1947 年 G. B. Dantzig 提出了一般线性规划问题求解的方法——单纯形法之后,线性规划的理论与应用都得到了极大的发展.单纯形法的有效性使它不仅是线性规划的最基本的算法之一,而且已成为整数规划和非线性规划某些算法的基础.

§1　线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题的提出

要利用线性规划的方法解决实际问题,首先要建立其数学模型.数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式,因此可以利用纯数学的方法进行研究,从而得到实际问题的性质及其解决的办法.从实际问题中建立数学模型,主要有以下三个步骤:

(1) 根据影响所要达到目的的因素确定决策变量;

(2) 由决策变量所受的限制条件确定决策变量所要满足的约束条件;

(3) 由决策变量和所要达到目的之间的函数关系确定目标函数.

例 1.1　资源的合理利用问题

某工厂在下一个生产周期内生产甲、乙两种产品,要消耗 A、B 和 C 三种资源,已知每件产品对这三种资源的消耗、这三种资源的现有数量和每件产品可获得的利润如表 1-1 所示.

问如何安排生产计划,使得既能充分利用现有资源又使总利润最大.

表 1-1

资源＼产品	甲	乙	资源限制
A	3	2	65
B	2	1	40
C	0	3	75
单件利润	1500	2500	

解　(1) 确定决策变量:

设 x_1, x_2 为下一个生产周期产品甲和乙的产量.

(2) 所满足的约束条件:

对资源 A 的限制:　$3x_1+2x_2\leqslant 65$

对资源 B 的限制:　$2x_1+x_2\leqslant 40$

对资源 C 的限制:　$3x_2\leqslant 75$

基本要求:　$x_1, x_2\geqslant 0$

(3) 明确目标函数:获利最大,即求 $z=1500x_1+2500x_2$ 的最大值,用 max 表示最大值,s. t. (subject to 的简写)表示约束条件,则该模型可记为:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=1500x_1+2500x_2\\
\text{s.t.}\quad & 3x_1+2x_2\leqslant 65\\
& 2x_1+x_2\leqslant 40\\
& 3x_2\leqslant 75\\
& x_1, x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

例 1.2 配料问题

某化工厂根据一项合同要为用户生产一种用甲、乙两种原料混合配制而成的特殊产品.甲、乙两种原料都含有 A、B、C 三种化学成分,其含量(%)和单位成本以及按合同规定产品中三种化学成分的最低含量(%)限制如表 1-2 所示.问厂方应如何配制该产品,使得总成本达到最小?

表 1-2

化学成分＼原料	甲	乙	产品成分最低含量
A	12	3	4
B	2	3	2
C	3	15	5
单位成本	3	2	

解 (1) 确定决策变量:

设每单位该产品用 x_1 单位甲原料和 x_2 单位乙原料配制而成.

(2) 所满足的约束条件配料平衡条件:

$x_1+x_2=1$

对化学成分 A 的要求:$12x_1+3x_2\geqslant 4$

对化学成分 B 的要求:$2x_1+3x_2\geqslant 2$

对化学成分 C 的要求:$3x_1+15x_2\geqslant 5$

基本要求: $x_1,x_2\geqslant 0$

(3) 明确目标函数:成本最小,即求 $z=3x_1+2x_2$ 的最小值,

该模型可记为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=3x_1+2x_2\\
\text{s. t.}\quad & 12x_1+3x_2\geqslant 4\\
& 2x_1+3x_2\geqslant 2\\
& 3x_1+15x_2\geqslant 5\\
& x_1+x_2=1\\
& x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

例 1.3 运输问题

设某种物资有两个产地 A_1,A_2,其产量分别为 2000 吨、1100 吨,另有四个销地 B_1、B_2、B_3、B_4 需要该种物资,其需求量分别为 1700 吨、1100 吨、200 吨、100 吨.已知每吨运费如表1-3所示,问如何调运,才能使总运费最省?

表 1-3

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	21	25	7	15
A_2	51	51	37	15

解 设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j($i=1,2;j=1,2,3,4$)的运量.由于总产量与总需求量相等(产销平衡),所以有约束条件:

对产地产量的约束

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100$$

对销地需求量的约束

$$x_{11}+x_{21}=1700$$
$$x_{12}+x_{22}=1100$$
$$x_{13}+x_{23}=200$$
$$x_{14}+x_{24}=100$$

另外 x_{ij} 是运输量必须是非负;因而还应满足 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3,4)$,目标函数为总运费 $z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}+15x_{24}$ 最小.

所以运输问题的模型可记为

$$\min\quad z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}+15x_{24}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \\
& x_{11}+x_{21}=1700 \\
& x_{12}+x_{22}=1100 \\
& x_{13}+x_{23}=200 \\
& x_{14}+x_{24}=100 \\
& x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

二、线性规划问题的数学模型

具体分析例1.1、例1.2、例1.3，虽然它们的背景意义各不相同，但从数学模型角度来看，却具有以下一些共同要点：

第一，求一组决策变量 x_i，并往往要求它们为非负；

第二，确定决策变量可能受到的约束，称为约束条件，它们可以用决策变量的线性等式或线性不等式来表示；

第三，在满足约束条件的前提下，使某个函数值达到最大（如利润等）或最小（如成本、运费等）. 该函数称为目标函数，它是决策变量的线性函数.

具备以上三个要素的问题称为线性规划问题. 简单地说，线性规划问题就是求一个线性目标函数在一组线性约束条件下的极值问题.

线性规划问题的一般形式为：

$$\max(\min)\quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.1a}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2 \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m
\end{aligned} \tag{1.1b}
$$

$$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \tag{1.1c}$$

其中 a_{ij}、b_i、c_j $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数，式(1.1a)称为目标函数，式(1.1b)和(1.1c)称为约束条件.

为了便于问题的讨论和求解方法的叙述. 我们约定线性规划的标准形式为

$$\max\quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.2a}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{aligned} \tag{1.2b}
$$

$$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2c}$$

这里等式右端 b_i 全为非负值$(i=1,2,\cdots,m)$，线性规划问题还可以用以下几种形式来表示：

1. 简记形式

$$\max\quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1.3a}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{1.3b}$$

$$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \tag{1.3c}$$

2. 矩阵形式

$$\max\quad z=cx \tag{1.4a}$$

s. t. $\quad Ax=b$ (1.4b)

$x \geqslant 0$ (1.4c)

3. 向量形式 $\quad \max \quad z=cx$ (1.5a)

s. t. $\quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b$ (1.5b)

$x \geqslant 0$ (1.5c)

其中 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为行向量,称为价值向量.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $m \times n$ 阶矩阵,称为约束条件的系数矩阵,简称为系数矩阵,$x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ 为决策向量,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T(b_i \geqslant 0;i=1,2,\cdots,m)$ 称为右端向量,$p_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$ 为 A 的第 j 列向量.

线性规划问题的标准形式具有如下特征:

1. 目标函数为求最大值;

2. 除决策变量的非负约束外,所有的约束条件都是等式,即它们是由含有 n 个未知数的 m 个方程组成的线性方程组,且右端常数均为非负;

3. 所有决策变量均非负.

对于各种非标准形式的线性规划问题,总可以通过以下变换,将其转化为标准形式:

1. 目标函数为求最小值,即为:$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$;

因为求 $\min \quad z$ 等价于求 $\max(-z)$,令 $z'=-z$,即化为:

$$\max \quad z'=-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

2. 右端项 $b_i<0$ 时,只需将等式或不等式两端同乘(-1),则该右端项必大于零;

3. 约束条件为不等式,即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$(或 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$),则可通过引入松弛变量 $x_{n+i} \geqslant 0$,将它化为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$(或 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$,这时 x_{n+i} 也称为剩余变量);

4. 决策变量无非负约束,设 x_j 没有非负约束,若 $x_j \leqslant 0$,可令 $x_j=-x_j'$,则 $x_j' \geqslant 0$;若 x_j 为自由变量,即 x_j 可为任意实数,可令 $x_j=x_j'-x_j''$,且 $x_j',x_j'' \geqslant 0$. x_j 的符号取决于 x_j' 和 x_j'' 的大小.

例 1.4 将下述线性规划问题化为标准形式.

$$\begin{aligned} \min \quad & z=x_1+2x_2+3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1+x_2+x_3 \leqslant 9 \\ & -3x_1+x_2+2x_3 \geqslant 4 \\ & 4x_1-2x_2-3x_3=-6 \end{aligned}$$

$x_1 \leqslant 0$、$x_2 \geqslant 0$、x_3 为自由变量

解 上述问题中令 $z'=-z$,$x'_1=-x_1$,$x_3=-x_3'-x_3''$,引进松弛变量 x_4,x_5,并按上述规则,则该问题的标准形式为:

$$\max \quad z'=x'_1-2x_2-3x'_3+3x''_3+0x_4+0x_5$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\
& 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\
& 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\
& x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

§2　线性规划问题的图解法

线性规划问题的图解法，就是借助几何图形来求解线性规划问题的一种方法. 图解法简单直观，有助于领会线性规划的基本性质及一般解法的基本思想. 为此，先介绍两个基本概念：

定义 1.1　在线性规划问题中，凡满足约束条件(1.2*b*)、(1.2*c*)的解 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 称为线性规划问题的可行解，所有可行解的集合称为可行解集(或可行域)，记作 $D=\{x \mid Ax=b, x\geqslant 0\}$.

定义 1.2　设线性规划问题的可行域为 D，若存在 $x^* \in D$，使得对任意的 $x\in D$ 都有 $cx^* \geqslant cx$，则称 x^* 为线性规划问题的最优解，相应的目标函数值称为最优值，记作 $z^*=cx^*$.

一、图解法的基本步骤

图解法的步骤可概括为：在平面上建立直角坐标系；图示约束条件，确定可行域和顶点坐标；图示目标函数和寻找最优解. 下面通过例 1.1 加以具体说明.

例 1.5　用图解法求解例 1.1.

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=1500x_1+2500x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 3x_1+2x_2\leqslant 65 \\
& 2x_1+x_2\leqslant 40 \\
& 3x_2\leqslant 75 \\
& x_1, x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

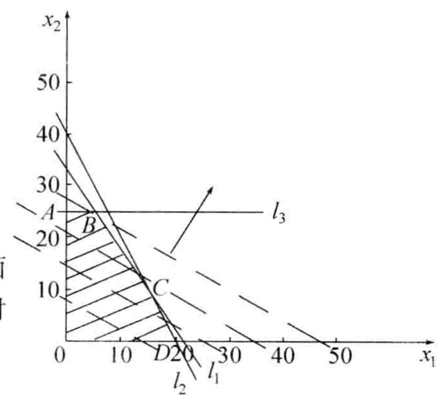

图 1-1

解　以变量 x_1 为横坐标轴，x_2 为纵坐标轴建立平面直角坐标系，由变量的非负性知，满足该约束条件的解(对应坐标系中的一个点)均在第 Ⅰ 象限内.

设 $l_1: 3x_1+2x_2=65$，$l_2: 2x_1+x_2=40$，$l_3: 3x_2=75$

在 x_1Ox_2 平面上作出直线 l_1, l_2, l_3，并通过判断确定不等式所确定的半平面. 各约束半平面交汇出来的区域 $OABCD$ 即为可行域，如图 1.1 所示. 考察目标函数 $z=1500x_1+2500x_2$，它在 x_1Ox_2 平面上代表以 z 为参数的一族平行线. 由小到大适当地给 z 赋值，如令 $z=0, 100, 500, \cdots$，可得到一组向右上方移动的平行线，而位于同一直线上的点具有相同的目标函数值，因而称为等值线. 在图 1.1 中以虚线表示当等值线平行移动到顶点 B 时，z 值达到最大. 因为如果 z 继续增大，等值线将离开可行域. 因此，B 点是使目标函数 $z=1500x_1+2500x_2$ 达到最大值的可行点，即为最优解. 由 B 点坐标为(5,25)知，最优解为

$$x_1^*=5, x_2^*=25,$$

及目标函数最优值 $z^*=70000$.

二、线性规划问题求解的几种可能结果

例 1.1 用图解法得到的最优解是唯一的，但对线性规划问题的求解还可能出现下列结果：

1. 无穷多最优解. 如将例 1.1 的目标函数设为 $z=1500x_1+1000x_2$，那么，最优情况下，目标函数的等值线与直线 l_1 重合. 这时，最优解有无穷多个，是线段 BC 上的所有点，最优值为 32500.

2. 无界解. 如将例 1.1 的约束条件变为：

$$
\begin{aligned}
3x_1+2x_2 &\geqslant 65\\
2x_1+\ \ x_2 &\geqslant 40\\
3x_2 &\geqslant 75\\
x_1,x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

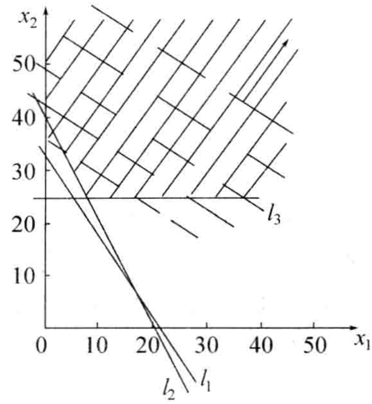

图 1-2

那么，如图 1.2 所示，可行域成为一个上无界的区域，最优值 $z\to\infty$，这时，问题无有限最优解，即解无界，称为无最优解.

3. 无可行解. 如下述线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=2x_1+x_2\\
\text{s.t.}\quad & x_1+\ \ x_2\leqslant 2\\
& 2x_1+3x_2\geqslant 8\\
& x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

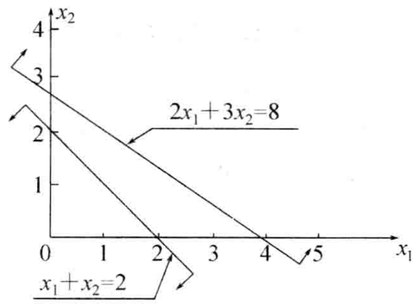

图 1-3

用图解法求解时看出不存在满足所有约束的公共区域(可行域)如图 1.3 所示，即无可行解，当然也无最优解.

通过图解法知道线性规划问题的可行域一般是凸多边形，而且若最优解存在，则一定能在可行域的某个顶点上得到；若在两个顶点上同时得到最优解，则这两顶点连线上的每一点都是最优解，此时有无穷多最优解；若可行域无界，则可能(不一定)发生最优解无界的情况，这时无最优解；若可行域为空集，则问题无可行解.

§3 线性规划问题解的基本性质

一、线性规划问题解的基本概念

考察线性规划问题：

$$\max\quad z=cx \tag{1.6a}$$

$$\text{s.t.}\quad Ax=b \tag{1.6b}$$

$$x\geqslant 0 \tag{1.6c}$$

其中 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为行向量；$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$ 均为列向量；$A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 阶矩阵；$b\geqslant 0$，并假设 A 的秩为 m，且只讨论 $m<n$ 的情形.

定义 1.3 在线性规划问题中，约束方程组(1.6b)的系数矩阵 A 的任意一个 $m\times m$ 阶的非奇异的子方阵 B(即 $|B|\neq 0$)，称为线性规划问题的一个基阵或基.

基阵 B 是由矩阵 A 中 m 个线性无关的列向量组成的，不失一般性，设：

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$$

并称 $P_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与基向量对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基变量. 线性规划问题中基变量以外的变量 $x_j(j=m+1,\cdots,n)$ 称为非基变量，在约束方程组中，与非基变量对应的向量 $P_j(j=m+1,\cdots,n)$ 称为非基向量，并记：

$$N=\begin{pmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(P_{m+1},P_{m+2},\cdots,P_n)$$

则系数矩阵 A 可以写成分块形式：

$$A=(B,N) \tag{1.7}$$

将基变量和非基变量组成的向量分别记为：

$$x_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T,x_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^T$$

则向量 x 也可以写成：

$$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

再将式(1.7)和(1.8)代入(1.6b)式，得$(B、N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b$，由矩阵的乘法可得：

$$Bx_B+Nx_N=b$$

可以把 x_N 看作一组自由变量(又称独立变量)，给它们任意一组值 $\bar{x}_N$，因为 B 是非奇异的，由克莱默(Cramer)法则可得对应 x_B 的唯一一组值 $\bar{x}_B$，于是 $\bar{x}=\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ 是约束方程组(1.6b)的一个解. 特别，令 $\bar{x}_N=0$ 时，则 $\bar{x}_B=B^{-1}b$，把约束方程组(1.6b)的这种特殊形式的解

$$x=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

称为基本解. 具体定义如下：

定义 1.4 在约束方程组(1.6b)中，对于选定的基 B，令所有的非基变量等于零，即令 $x_N=0$，得到的解(1.9)称为相应于基 B 的基本解，简称基解.

因为基 B 是 A 的一个 $m\times m$ 阶的非奇异子方阵，即它的列是从 A 的 n 列中选出的线性无关的 m 列，其选法最多共有 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$种，故基的个数最多有 C_n^m 个，于是一个线性规划问题的基本解最多只有 C_n^m 个.

基本解满足约束方程(1.6b)，但不一定满足非负约束条件(1.6c)，于是有以下定义.

定义 1.5 在基本解(1.9)中，若

$$x_B=B^{-1}b\geqslant 0 \tag{1.10}$$

则称此基本解为基本可行解,简称基可行解,这时对应的基 B 称为可行基. 各种解之间的关系可用文氏图来表示,如图 1.4.

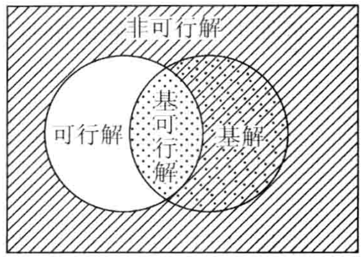

图 1 - 4

由于矩阵 A 的秩为 m,故对于选定的基 B,基变量共有 m 个,非基变量共有 $n-m$ 个,这样在一个基本解中,取零值的变量至少有 $n-m$ 个,而取非零值的变量最多只有 m 个.

定义 1.6 在线性规划问题的一个基可行解中,如果它所有的基变量都取正值,则称它是非退化的解;反之,如果至少有一个基变量取零值,则称它是退化的解. 一个线性规划问题,如果它的所有基可行解都是非退化的就称该问题是非退化的,否则就称它是退化的.

表 1 - 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	是否是基可行解
①	0	0	5	10	4	5	是
②	0	4	5	2	0	17	是
③	5	0	0	5	4	10	是
④	0	5	5	0	−1	20	否
⑤	10	0	−5	0	4	15	否
⑥	5	2.5	0	0	1.5	17.5	是
⑦	5	4	0	−3	0	22	否
⑧	2	4	3	0	0	19	是

例 1.6 找出下述线性规划问题的全部基解,并指出其中的基可行解.

$$\max \quad z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1+2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_j \geqslant 0 \ (j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

解 该线性规划问题的全部基本解见表 1 - 4,此处 $C_5^3=10$,但由于(P_1,P_3,P_4)和(P_2,P_4,P_5)两个子矩阵是奇异的,故只有 8 个基,得到 8 个基本解,该线性规划问题是非退化的.

二、线性规划问题解的基本性质

定理 1.1 设 x 是线性规划问题的可行解,

(1) 若 $x=0$,则它一定是基可行解;

(2) 若 $x\neq 0$,则 x 是基可行解的充要条件是它的非零分量所对应的列向量线性无关.

证明 (1) 此时 $Ax=0$,所以线性规划问题的所有基为可行基,$x=0$ 是任一可行基对应的基可行解.

(2) 不妨设 x 的前 k 个分量为非零分量,即

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T \qquad x_j>0(j=1,2,\cdots,k)$$

先证必要性. 如果 x 是基可行解,则它的非零分量必定是基变量,它们所对应的列向量 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 是基向量,故必线性无关.

再证充分性. 如果 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 线性无关,则必有 $k\leqslant m$,由于 x 是线性规划问题的可行解,即 $Ax=b,x\geqslant 0$,故

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b$$

如果 $k=m$,则 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 就是一个基,x 为与 B 相对应的基可行解,定理成立. 如果 $k<m$,则一定可以从其余的 $n-k$ 个列向量中,再选出 $m-k$ 个,设为 $P_{k+1},P_{k+2},\cdots,P_m$,使 $P_1,P_2,\cdots,P_k,P_{k+1},\cdots,P_m$ 构成基 B,易知 x 为相应于 B 的基可行解,定理也成立. 证毕.

定理 1.2 如果一个线性规划问题有可行解,则它必有基可行解.

证明 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是线性规划问题的一个可行解,如果 $x=0$,则由定理 1.1 知,它是线性规划的一个基可行解,定理成立. 如果 $x\neq 0$,不妨设 x 的前 k 个分量为非零分量.

则有 $x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_kP_k=b$,及 $x_1>0,x_2>0,\cdots,x_k>0$.

下面分两种情况讨论:

(1) 如果 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 线性无关,即 x 的非零分量对应的列向量线性无关,则由定理 1.1 知,它是线性规划的一个基本可行解,定理成立.

(2) 如果 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 线性相关,则必存在一组不全为零的数 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$ 使得

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_j P_j = 0 \tag{1.11}$$

假定有 $\delta_i\neq 0$,取
$$\varepsilon=\min\left\{\frac{x_i}{|\delta_i|}\,\middle|\,\delta_i\neq 0\right\} \tag{1.12}$$

作 $x^{(1)}=x+\varepsilon\delta,x^{(2)}=x-\varepsilon\delta$

其中 $\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k,0,\cdots,0)^T$

由(1.12)式知,必有
$$x_j\pm\varepsilon\delta_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \tag{1.13}$$

即 $x^{(1)}\geqslant 0,x^{(2)}\geqslant 0$,又因为由(1.11)式知

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j\pm\varepsilon\delta_j)P_j = \sum_{j=1}^{n}x_jP_j \pm \varepsilon\sum_{j=1}^{n}\delta_jP_j = b$$

故有 $Ax^{(1)}=b,Ax^{(2)}=b$,即 $x^{(1)},x^{(2)}$ 也是线性规划的两个可行解.

再由 ε 的取法知,在式(1.13)的诸式中,至少有一个等于零,于是所作的可行解 $x^{(1)}$ 或 $x^{(2)}$ 中,它的非零分量的个数至少比 x 的减少 1,如果这些非零分量所对应的列向量线性无关,则 $x^{(1)}$ 或 $x^{(2)}$ 为基可行解,定理成立. 否则,可以从 $x^{(1)}$ 或 $x^{(2)}$ 出发,重复上述步骤,再构造一个新的可行解 $x^{(3)}$ 或 $x^{(4)}$,使它的非零分量的个数继续减少. 这样经过有限次重复之后,必可找到一个可行解 $x^{(s)}$ 或 $x^{(s+1)}$,使它的非零分量对应的列向量线性无关(因为在最坏的情况下,到只有一个非零分量时,对应的只有一个非零列向量,它一定是线性无关的),故可行解 $x^{(s)}$ 或 $x^{(s+1)}$ 必为基可行解. 证毕.

定理 1.3 如果一个线性规划问题有最优解,则必存在一个基可行解是它的最优解.

证明 设 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 是线性规划的一个最优解,如果 x^* 是基本解,则定理成立;如果 x^* 不是基本解,则根据定理 1.2 的证明方法,可以构造两个可行解:

$$x^{(1)}=x^*+\varepsilon\delta,x^{(2)}=x^*-\varepsilon\delta,$$

它的非零分量的个数比 x^* 的减少,且有

$$cx^{(1)}=cx^*+\varepsilon c\delta,cx^{(2)}=cx^*-\varepsilon c\delta \tag{1.14}$$