



“十二五”国家重点图书出版规划项目

光学与光子学丛书

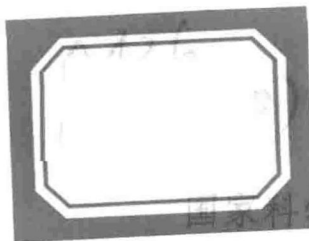
衍射计算及数字全息

(下册)

李俊昌 著



科学出版社



国家科学技术学术著作出版基金资助项目

“十二五”国家重点图书出版规划项目

光学与光子学丛书

衍射计算及数字全息

(下 册)

李俊昌 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

在标量衍射理论的框架下,本书系统总结经典及广义衍射公式的数值计算方法,对空间曲面光源衍射场的数值计算进行专门讨论,并且以数字全息及3D物体的计算全息为衍射计算的应用载体,对数字全息涉及的理论、技术及数字全息干涉计量进行详细介绍,对目前迅速发展全息3D显示技术进行研究。本书所附光盘给出全书的主要计算程序及计算时涉及的图像文件。

全书由9章及4个附录构成,分上、下两册出版。上册包含1~5章,下册包含6~9章及附录。第1章是数学预备知识;第2章介绍标量衍射理论及不同形式的衍射计算公式;第3章基于取样定理详细讨论不同衍射公式的数值计算方法;第4章对光全息术进行介绍;第5、6章是数字全息的基本理论;第7、8章介绍全息干涉计量理论及数字全息干涉计量的应用实例;第9章对数字全息3D显示及3D动画算法进行研究。附录A是计算机图像的基本知识;附录B循序渐进地给出MATLAB编写的全书主要计算程序、程序说明及计算实例;附录C是书中重要的彩色图像;附录D是本书所附光盘的内容介绍。为便于阅读全书,附录A~C同时由光盘给出。

本书可作为高等院校光学、光学工程、光信息科学技术、电子科学与技术等专业的研究生教材,也可供相关专业的教师及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

衍射计算及数字全息. 下册/李俊昌著. —北京:科学出版社,2014.6
(“十二五”国家重点图书出版规划项目. 光学与光子学丛书)

ISBN 978-7-03-041215-7

I. ①衍… II. ①李… III. ①光衍射-计算方法 IV. ①O436.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第126667号

责任编辑:刘凤娟/责任校对:邹慧卿

责任印制:钱玉芬/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第一版 开本:720×1000 1/16

2014年6月第一次印刷 印张:21 1/2

字数:420 000

定价:119.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换)



本丛书名由中国科学院院士母国光先生题写

光学与光子学丛书

《光学与光子学丛书》编委会

主 编 周炳琨

副主编 郭光灿 龚旗煌 朱健强

编 委 (按姓氏拼音排序)

陈家璧 高志山 贺安之 姜会林 李淳飞

廖宁放 刘 旭 刘智深 陆 卫 吕乃光

吕志伟 梅 霆 倪国强 饶瑞中 宋菲君

苏显渝 孙雨南 魏志义 相里斌 徐 雷

宣 丽 杨怀江 杨坤涛 郁道银 袁小聪

张存林 张书练 张卫平 张雨东 赵建林

赵 卫 朱晓农

序 言

在科学发展史中,激光是 20 世纪的一个重大成就。半个世纪以来,激光已经在科学研究、工业生产及国防科技中获得广泛应用。由于光的波粒二象性,在描述激光传播的宏观性质时,基于电磁场理论导出的波动方程是最基本的理论研究工具。实验研究表明,如果观测距离甚大于光波长,并且光传播过程中不涉及障碍物且光学元件结构尺寸接近于光波长,可以忽略波动方程中电矢量与磁矢量间的耦合关系,将电矢量视为标量,能十分准确地描述光传播的物理过程,这种理论称为标量衍射理论。根据标量衍射理论,当给定某空间平面上的光波场后,可以用不同形式的衍射积分计算与该平面相平行的空间平面上的光波场。然而,衍射积分通常无解析解,必须借助于计算机作数值计算。随着计算机技术的飞速发展,激光的应用研究与计算机已经结下不解之缘。然而,衍射计算通常是十分困难的工作。正如玻恩(M. Born)及沃尔夫(E. Wolf)在他们的名著《光学原理》(*Principles of Optics*)中指出的那样,“衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一。在衍射理论中,那种在某种意义上可以认为是严格的解,是很少有的”。

近 30 年来,李俊昌教授在衍射计算及数字全息研究领域先后完成过多项国家自然科学基金项目,并且借助改革开放形成的国际科技合作环境,与法国多所大学开展了科研及教学合作,承担过法国标致汽车公司的强激光变换系统的设计项目,在衍射计算及数字全息研究领域指导了中法双方的许多博士生。长期的科研及教学实践使他在衍射计算及数字全息研究领域具有深厚的理论功底及解决实际问题的能力。李俊昌教授总结他多年研究成果撰写的这部书,其主要特点如下:

其一,经典标量衍射理论给出了空间平面间衍射场的计算公式,但当光源是曲面光源或观测面为非平面时,这些公式不能直接使用。该书认真总结了包括作者在内的国内外研究人员有代表性的计算方法,给出得到实验证明了的计算实例。这些讨论有效扩展了标量衍射理论的应用范围,具有重要的实际意义。

其二,衍射数值计算理论虽然涉及较复杂的数学表达式,但是在解决实际问题的过程中可以加深对这些公式物理意义的理解。该书除基于取样定理讨论不同形式衍射积分的计算方法外,还给出衍射数值计算在二元光学元件设计以及虚拟三维物体计算全息中的应用实例,从事衍射理论学习及应用研究的科研人员能方便地从中受益。

其三,随着计算机及 CCD 技术的进步,基于传统全息及衍射计算理论而形成的数字全息技术具有重要的应用前景,目前国内尚无“数字全息”专著。该书不但

系统地阐述了数字全息的基本理论及实际应用，而且将数字全息作为衍射计算理论的应用载体，总结出多种形式的波前重建算法，给出详细实验证明。这些内容是相关专业的科研人员及研究生灵活应用衍射公式解决激光应用研究中遇到问题时的有益参考。

该书的实验基本取材于作者近 30 年在国内外的科研工作，所提供的程序也是作者在 MATLAB7.0 平台下编写并通过实验证实的。附录 B 及该书所附光盘循序渐进地给出书中各章节相对应的主要的衍射计算程序及数字全息物光场波前重建程序。利用所提供的程序，即便没有实验条件的读者也能在微机上证实该书的理论分析结果，对这些程序作简单修改，便能解决激光应用研究中遇到的许多实际问题。

衍射的数值计算是激光应用研究中涉及的一个基本问题，数字全息是基于衍射计算理论及现代计算机技术形成的并在不断发展的新兴技术。对于我国从事激光应用研究的科研人员及研究生，李俊昌教授的这部著作是一部非常好的参考书。



2013 年 12 月

目 录

(下 册)

序言

第 6 章 物光通过光学系统的波前重建	279
6.1 物光通过光学系统时波前重建的一般讨论	279
6.1.1 基于阿贝成像理论对 CCD 探测信息的研究	280
6.1.2 数字全息波前重建系统脉冲响应讨论	280
6.2 数字全息变焦系统	288
6.2.1 数字全息变焦系统简介	289
6.2.2 变焦系统研究	290
6.2.3 变焦系统的参数设计	290
6.3 柯林斯公式在波前重建中的应用	292
6.3.1 用柯林斯公式的逆运算实现波前重建	293
6.3.2 光波通过傍轴光学系统的可控放大率波前重建	297
6.4 经典衍射积分在物光通过光学系统波前重建中的应用	303
6.4.1 利用精确衍射公式通过光波场空间追迹进行波前重建	304
6.4.2 数字全息物光场在像空间及物空间的重建研究	308
6.4.3 光学系统光学矩阵元素的数字全息检测	313
参考文献	319
第 7 章 全息干涉计量的基本原理及常用技术	322
7.1 单曝光法或实时全息法	322
7.1.1 单曝光法基本原理	322
7.1.2 实时全息干涉计量实例	326
7.1.3 空间载波相移法在实时全息检测中的应用	336
7.2 双曝光法	341
7.2.1 双曝光法基本原理	341
7.2.2 物体的位移测量及一维位移测量实例	344
7.2.3 双曝光法三维位移场的检测	349
7.3 时间平均法	351
7.3.1 时间平均法基本原理	351

7.3.2 时间平均法测量实例	353
参考文献	356
第 8 章 数字全息在光学检测中的应用	358
8.1 数字全息干涉图的形成及干涉图的相位解包裹	358
8.1.1 数字全息干涉图像的形成及表示方法	359
8.1.2 干涉图像的相位解包裹	363
8.2 数字全息干涉计量常用技术	376
8.2.1 三维面形的数字全息检测	377
8.2.2 物体微形变的数字全息检测	385
8.2.3 时间平均法数字全息振动分析	388
8.2.4 三维粒子场检测	389
8.3 具有物光变换系统的数字全息检测	392
8.3.1 像面数字全息系统的一般讨论	393
8.3.2 微小物体的显微数字全息检测	394
8.3.3 大尺寸物体的数字全息检测实例	395
8.4 数字全息干涉计量的特殊技术	401
8.4.1 飞秒级瞬态过程的数字全息检测技术	401
8.4.2 共光程同轴显微数字全息检测	405
8.4.3 弱相干光源 LED 照明的数字全息显微术	409
8.5 数字全息 CT	411
8.5.1 拉东变换简介	412
8.5.2 数字全息 CT 原理	413
8.5.3 数字全息 CT 检测模拟	413
8.5.4 显微数字全息 CT 检测应用实例	415
8.6 多功能数字全息检测系统	417
参考文献	418
第 9 章 数字全息的 3D 显示及动画算法研究	422
9.1 传统全息及数字全息 3D 显示研究现状	422
9.1.1 传统全息 3D 显示技术的发展现状	422
9.1.2 数字全息 3D 显示技术研究进展	423
9.1.3 数字全息 3D 显示技术的优势与面临的挑战	425
9.2 数字微镜及其在数字全息 3D 显示中的应用	428
9.2.1 数字微镜工作原理	428
9.2.2 全息图的数字微镜显示	430
9.2.3 数字微镜 3D 显示系统的瞬时脉冲响应	432

9.2.4	数字显微镜 3D 显示系统点源离焦像的讨论	437
9.2.5	DMD 重建图像的近似计算及实验证明	439
9.3	空间光调制器 LCOS 原理及其在数字全息 3D 显示中的应用	441
9.3.1	空间光调制器 LCOS 的结构及原理简介	441
9.3.2	基于 LCOS 的全息图像显示系统研究	442
9.3.3	扩展 3D 重建像视场的技术简述	450
9.4	数字全息显示研究中 3D 物体的衍射场计算	455
9.4.1	基于点源法的 C-LUT 快速算法	456
9.4.2	曲面光源变换为平面光源的“光源变换法”	465
9.4.3	基于全息 3D 显示像的焦深对 LUT 算法及面元算法的改进	471
9.5	全息 3D 动画算法探析	474
9.5.1	3D 物体表面的数字描述及基本建模技术	474
9.5.2	基于环形空间光调制器阵列的全息 3D 动画模拟研究	478
9.6	结束语	481
	参考文献	482
附录 A	计算机图像的基础知识	487
A1	三基色原理及图像的数字表示	487
A2	二维场强度分布的数字图像表示	489
附录 B	基本计算程序及应用实例	491
B1	矩形孔夫琅禾费衍射的解析计算	492
B2	圆孔夫琅禾费衍射的解析计算	494
B3	三角形孔的夫琅禾费衍射解析计算及 IFFT 重建图像	496
B4	矩形孔菲涅耳衍射的解析计算	500
B5	菲涅耳衍射的 S-FFT 计算	504
B6	经典衍射公式的 D-FFT 计算	508
B7	柯林斯公式的 S-FFT 计算	515
B8	柯林斯公式的 D-FFT 计算	518
B9	倾斜三角形孔的菲涅耳衍射场及其逆运算	521
B10	倾斜面光源的菲涅耳衍射场及其逆运算	526
B11	同轴数字全息图及四步相移法波前重建模拟	530
B12	模拟生成单色离轴数字全息图	535
B13	数字全息图物光场的 1-FFT 重建	538
B14	数字全息图物光场的 DDBFT 局域重建	541
B15	数字全息图物光场的 VDH4FFT 重建	547
B16	数字全息图物光场的 FIMG4FFT 重建	553

B17	真彩色图像文件的读取、分解及存储	557
B18	模拟生成三基色光照明的真彩色离轴数字全息图	561
B19	真彩色数字全息图像的 FIMG4FFT 重建	569
B20	模拟生成物体微形变的二次曝光数字全息图	578
B21	基于二次曝光数字全息图的物光场波前重建及干涉图像	585
B22	生成加载于空间光调制器 LCOS 的相息图	591
附录 C	彩色图像附页	596
附录 D	《衍射计算及数字全息》书附光盘内容	604
索引	605
后记	609

(上 册)

第 1 章	数学预备知识
第 2 章	标量衍射理论
第 3 章	衍射的数值计算及应用实例
第 4 章	光全息的基本理论
第 5 章	数字全息及物光波前重建计算

第6章 物光通过光学系统的波前重建

随着计算机及 CCD 探测技术的进步,用 CCD 代替传统全息感光板的数字全息^[1] 逐渐成为一个研究热点^[2~15]。在该研究领域中,获得高质量的重建物光场是实现准确检测的基本保证。由于 CCD 面阵尺寸及分辨率均远小于传统感光材料,为能让 CCD 有效接收来自物平面的高频角谱,目前存在几种提高物光场重建质量的途径:其一,在 CCD 探测平面内平移 CCD^[2],或者利用第 5 章所述的改变照明物光角度的超分辨率记录技术,通过多次记录全息图形成一个等效的大面阵 CCD;其二,设置不同形式的反射镜^[8],让本来已经逸出 CCD 窗口的高频角谱分量反射于 CCD 窗口;其三,让 CCD 平面是物体的像平面^[11],基于像全息原理重建物光场。可以看出,第一种方法需要在不同时刻记录全息图,如果不采取特殊措施,原则上只适用于静态物理量的探测;第二种方法虽然能够实现瞬态测量,但为有效获取高频角谱分量,光学系统的调整及数据处理较复杂。而第三种方法理论上是一种能够充分使用 CCD 的分辨率,最大限度地获取物光场信息的方法^[16]。然而,当 CCD 不能准确置于物体的像平面,特别是进行多种波长光束照明的数字全息检测时,如果不采取特殊的消色差措施,则不存在统一的像平面。这时,不但要研究 CCD 在光学系统后任意位置的波前重建方法,还应解决多波长照明时重建同一放大率物光场像的问题。

本章将对物光通过一个光学系统到达 CCD 的物光场波前重建问题进行讨论。从理论上证明,设计合适的光学系统对物光场进行变换,是高质量重建物光波前的重要措施。并且,基于柯林斯公式及经典衍射积分的研究,导出波前重建的多种算法,其中包括具有重要实际意义的多种波长光束照明统一放大率的波前重建算法,每一种算法均给出相应的实验证明。

6.1 物光通过光学系统时波前重建的一般讨论

对于物体到 CCD 间无光束变换元件的情况,基于第 5 章式 (5-1-33),将 CCD 拍摄数字全息图及数字重建物光场视为一个成像过程,在以 z 轴为光轴的直角坐标系 $O-xyz$ 中,可将参考光为平面波时数字全息波前重建系统的脉冲响应表为

$$h(x, y) = \frac{NM\alpha\Delta x^3\beta\Delta y^3}{(\lambda d)^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{N\Delta x}{\lambda d}x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{M\Delta y}{\lambda d}y\right) \quad (6-1-1)$$

式中, Δx , Δy 分别是 CCD 像素在 x 及 y 方向的周期; $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 为像素填充因子; N 和 M 分别是 CCD 面阵在 x 及 y 方向的像素数; d 为物体到 CCD 的距离; λ 为光波长。

由于 δ 函数可定义为 $\delta(x, y) = \lim_{P, Q \rightarrow \infty} PQ \operatorname{sinc}(Px) \operatorname{sinc}(Qy)$ ^[17], 在式 (6-1-1) 中 $N\Delta x \times M\Delta y$ 为 CCD 的面阵尺寸, 因此, CCD 面阵尺寸越大, 物体到 CCD 的距离越小, 脉冲响应越接近 δ 函数, 成像质量越高。然而, 目前市场流行的 CCD 面阵宽度只是接近厘米的量级, CCD 面阵尺寸很难增加。此外, 在实验研究中, 为引入参考光, 物体到 CCD 间通常需要插入半反半透镜, 距离 d 的减小受到限制。以下基于阿贝成像及衍射的角谱理论, 对物光通过光学系统波前重建进行研究。

6.1.1 基于阿贝成像理论对 CCD 探测信息的研究

以单一透镜成像为例, 图 6-1-1 给出阿贝成像原理示意图^[17]。图中透镜孔径既是系统的入射光瞳, 也是系统的出射光瞳。当 CCD 置于 $PC_0 \sim PC_1$ 的任意位置时, 来自物平面并穿过成像透镜的角谱均能被 CCD 接收。然而, 被透镜变换后的物光角谱在像空间不同的位置有不同的分布, 是否存在一个优化的位置, 让重建物光场具有较高的质量是很有意义的问题。由于实际光学系统通常由多个元件构成, 下面引入柯林斯公式^[18]对任意给定的光学系统进行研究。

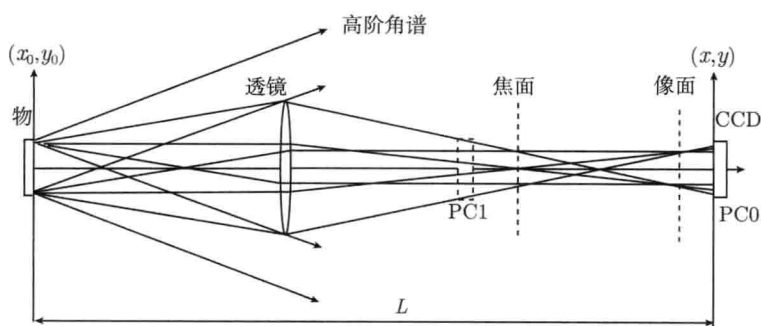


图 6-1-1 到达 CCD 探测窗角谱的阿贝成像示意图

6.1.2 数字全息波前重建系统脉冲响应讨论

1. 波前重建系统的矩阵光学描述

回顾本书第 2 章对柯林斯公式的讨论, 若轴对称傍轴光学系统可由 2×2 的矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 描述, 入射平面及出射平面的坐标分别由 (x_0, y_0) 及 (x, y) 定义。当知道进入系统的入射平面光波场 $U_0(x_0, y_0)$ 时, 系统出射平面光波场 $U(x, y)$ 可通

过柯林斯公式求出

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkL)}{j\lambda B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp \left\{ \frac{jk}{2B} \left[A(x_0^2 + y_0^2) + D(x^2 + y^2) - 2(x x_0 + y y_0) \right] \right\} dx_0 dy_0 \quad (6-1-2)$$

式中, $j = \sqrt{-1}$, L 为光学系统的轴上光程, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波长。

令物平面、CCD 探测平面及重建物平面坐标分别为 x_0y_0 、 xy 及 x_iy_i , 图 6-1-2 是数字全息波前重建系统示意图。不难看出, 数字全息记录及波前重建过程可以分解为两个部分。其一, 沿 z 轴传播的物光通过光学系统到达 CCD, 由 CCD 记录下与参考光干涉形成的数字全息图。这是一个实际光学过程。其二, 计算机虚拟重建光照明数字全息图, 用衍射的数值计算重建物光场。这是一个虚拟的光学过程。由于 CCD 面阵尺寸相对实际光学元件通常较小, 对于 x_0y_0 到 x_iy_i 的整个光学系统, 可以将系统的孔径光阑视为 CCD 面阵边界。这样, 根据阿贝或瑞利的成像理论, 可以只考虑孔径光阑对光传播的衍射受限问题^[17]。

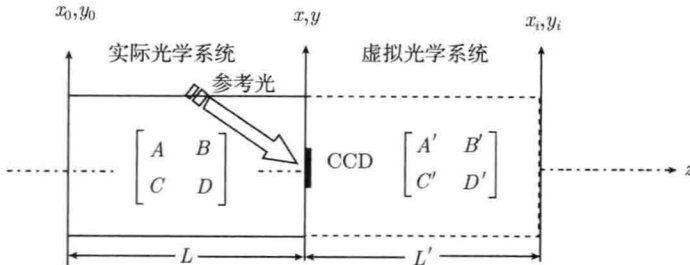


图 6-1-2 数字全息波前重建系统示意图

基于上述假定, 令 CCD 平面左侧的光学系统由矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 描述, CCD 平面右侧的光学系统由光学矩阵 $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ 描述, 若物光沿 z 轴传播后在 x_iy_i 平面能够重建 x_0y_0 平面的物光场, 按照矩阵光学理论应有

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-1-3)$$

由此解得

$$A' = D, \quad B' = -B, \quad C' = -C, \quad D' = A \quad (6-1-4)$$

因此, 一旦得到 xy 平面的物光场后, 利用式 (6-1-4) 确定的虚拟光学系统矩阵元素, 便能用柯林斯公式进行物光场重建。

2. 波前重建系统的脉冲响应

由于成像系统的特性可由系统的脉冲响应表述^[17]。现研究物平面上坐标 (ξ, η) 处的单位振幅点光源 $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$ 通过图 6-1-2 所示系统的响应^[19]。

鉴于 CCD 置于光学系统的像平面时使用像光场进行相关应用研究是最常见的情况, 以下分别对 CCD 在像平面及不在像平面两种情况的脉冲响应进行讨论。

1) CCD 在光学系统像平面的情况

在式 (6-1-2) 中, 令 $Ax_0 = x_a, Ay_0 = y_a$, 将积分号内的二次相位因子作配方运算, 并注意 $AD - BC = 1$, 可以将柯林斯公式重新写为

$$\begin{aligned} U(x, y) = & \exp(jkL) \exp\left[j\frac{kC}{2A}(x^2 + y^2)\right] \\ & \times \frac{1}{j\lambda BA} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} U_0\left(\frac{x_a}{A}, \frac{y_a}{A}\right) \\ & \times \exp\left\{j\frac{k}{2BA}[(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2]\right\} dx_a dy_a \end{aligned} \quad (6-1-5)$$

为得到物平面点光源 $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$ 在 CCD 平面的光波场, 上式中令

$$U_0\left(\frac{x_a}{A}, \frac{y_a}{A}\right) = \delta\left(\frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta\right) \quad (6-1-6)$$

并将 CCD 平面坐标由 (x_i, y_i) 表示, 得到

$$\begin{aligned} u_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) = & \exp(jkL) \exp\left[j\frac{kC}{2A}(x_i^2 + y_i^2)\right] \frac{1}{j\lambda BA} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \delta\left(\frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta\right) \\ & \times \exp\left\{j\frac{k}{2BA}[(x_a - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2]\right\} dx_a dy_a \end{aligned} \quad (6-1-7)$$

矩阵元素 $B = 0$ 的问题可以视为 $B \rightarrow 0$ 时的极限情况。上式与熟知的菲涅耳衍射积分比较不难看出, $B \rightarrow 0$ 时, 上式代表放大 A 倍的理想像经无限小距离 BA 衍射后与一相位因子的乘积。于是有

$$\begin{aligned} U_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) &= \lim_{BA \rightarrow 0} u_\delta(x_i, y_i; \xi, \eta) \\ &= \exp(jkL) \exp\left[j\frac{kC}{2A}(x_i^2 + y_i^2)\right] \frac{1}{A} \delta\left(\frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta\right) \end{aligned} \quad (6-1-8)$$

以上结果表明, 如果忽略光学系统的有限孔径衍射效应, 到达 CCD 的仍然是 δ 函数表示的理想像点。为简明起见, 以下忽略常数相位因子 $\exp(jkL)$ 。

当参考光与物光干涉并由 CCD 记录数字全息图后, 利用第 5 章式 (5-1-26) 描述数字全息图^[19], 用原参考光的数学表达式与数字全息图相乘, 进行离散傅里叶

变换, 用滤波窗取出物光项的频谱, 再作离散傅里叶反变换, 即得到 $B = 0$ 时点源的脉冲响应

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) = \alpha \Delta x \beta \Delta y \operatorname{rect} \left(\frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \operatorname{comb} \left(\frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ \times \exp \left[j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \frac{1}{A} \delta \left(\frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta \right) \quad (6-1-9)$$

若物平面光波场为 $O_0(\xi, \eta)$, 像平面光波场由以下叠加积分确定

$$O(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) d\xi d\eta \\ = \alpha \Delta x \beta \Delta y \operatorname{rect} \left(\frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \operatorname{comb} \left(\frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ \times \exp \left[j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) \frac{1}{A} \delta \left(\frac{x_i}{A} - \xi, \frac{y_i}{A} - \eta \right) d\xi d\eta \\ = \alpha \Delta x \beta \Delta y \operatorname{rect} \left(\frac{x_i}{N \Delta x}, \frac{y_i}{M \Delta y} \right) \operatorname{comb} \left(\frac{x_i}{\Delta x}, \frac{y_i}{\Delta y} \right) \\ \times \exp \left[j \frac{kC}{2A} (x_i^2 + y_i^2) \right] \frac{1}{A} O_0 \left(\frac{x_i}{A}, \frac{y_i}{A} \right) \quad (6-1-10)$$

以上结果表明, 若 CCD 置于光学系统的像平面, 可以通过数字全息图获得带有一个二次相位因子的理想像光场的 $M \times N$ 点取样。像光场的取样值与像素面积 $\alpha \Delta x \beta \Delta y$ 成正比, 与像的横向放大率 A 成反比, 是一个有明显物理意义的结论。

2) CCD 不在光学系统像平面的情况

利用柯林斯公式 (6-1-5), 并忽略常数相位因子 $\exp(jkL)$, 到达 CCD 平面的光波复振幅可以表为

$$u_{\delta}(x, y; \xi, \eta) = \exp \left[j \frac{kC}{2A} (x^2 + y^2) \right] \frac{1}{j \lambda B A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \delta \left(\frac{x_a}{A} - \xi, \frac{y_a}{A} - \eta \right) \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2BA} \left[(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 \right] \right\} dx_a dy_a \\ = \frac{1}{j \lambda B} \exp \left[j \frac{kC}{2A} (x^2 + y^2) \right] \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2BA} \left[(A\xi - x)^2 + (A\eta - y)^2 \right] \right\} \quad (6-1-11)$$

让 CCD 平面引入参考光, 若用原参考光的共轭光照射全息图形成衍射波, 全

息图透射光中的物光项则为

$$I_{\delta-}(x, y; \xi, \eta) = \alpha \Delta x \beta \Delta y \text{rect} \left(\frac{x}{N \Delta x}, \frac{y}{M \Delta y} \right) \text{comb} \left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y} \right) u_{\delta}(x, y; \xi, \eta) \quad (6-1-12)$$

利用上结果, 根据式 (6-1-4) 及柯林斯公式 (6-1-2), 再次忽略轴上光程引入的常数相位因子, 物平面上点光源 $\delta(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$ 在 $x_i y_i$ 平面的重构场则为

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) = \frac{1}{-j \lambda B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\delta-}(x, y; \xi, \eta) \times \exp \left\{ -\frac{j k}{2B} [D(x^2 + y^2) + A(x_i^2 + y_i^2) - 2(x_i x + y_i y)] \right\} dx dy \quad (6-1-13)$$

将式 (6-1-12) 代入式 (6-1-13), 整理后可用傅里叶逆变换表为

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) = \frac{\alpha \Delta x \beta \Delta y}{(\lambda B)^2} \exp \left\{ -j \frac{k}{2B} A [(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)] \right\} \times \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{N \Delta x}, \frac{y}{M \Delta y} \right) \text{comb} \left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y} \right) \right\}_{f_x = \frac{x_i - \xi}{\lambda B}, f_y = \frac{y_i - \eta}{\lambda B}} \quad (6-1-14)$$

利用矩形函数及梳状函数的傅里叶变换性质得

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) = \frac{M \alpha \Delta x^3 N \beta \Delta y^3}{(\lambda B)^2} \exp \left\{ -j \frac{k}{2B} A [(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)] \right\} \times \text{sinc} \left(N \Delta x \frac{x_i - \xi}{\lambda B} \right) \text{sinc} \left(M \Delta y \frac{y_i - \eta}{\lambda B} \right) * \text{comb} \left(\Delta x \frac{x_i - \xi}{\lambda B}, \Delta y \frac{y_i - \eta}{\lambda B} \right) \quad (6-1-15)$$

式中, 梳状函数与其余项卷积运算的结果形成的重建场是 x 方向及 y 方向的周期分别为 $\frac{\lambda B}{\Delta x}$ 及 $\frac{\lambda B}{\Delta y}$ 的周期函数。若重建场尺寸限制在这个二维周期内, 则有

$$h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) = \frac{M \alpha \Delta x^3 N \beta \Delta y^3}{(\lambda B)^2} \exp \left\{ -j \frac{k}{2B} A [(x_i^2 + y_i^2) - (\xi^2 + \eta^2)] \right\} \times \text{sinc} \left(N \Delta x \frac{x_i - \xi}{\lambda B} \right) \text{sinc} \left(M \Delta y \frac{y_i - \eta}{\lambda B} \right) \quad (6-1-16)$$

至此, 导出了 $B \neq 0$ 时系统的脉冲响应。

利用这个结果, 若物平面光波场为 $O_0(\xi, \eta)$, 重构场由以下叠加积分确定

$$\begin{aligned} O(x_i, y_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) h_{\delta}(x_i, y_i; \xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \exp\left[-j\frac{k}{2B}A(x_i^2 + y_i^2)\right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O_0(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2B}A(\xi^2 + \eta^2)\right] \\ &\quad \times \operatorname{sinc}\left[N\Delta x\left(\frac{x_i - \xi}{\lambda B}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[M\Delta y\left(\frac{y_i - \eta}{\lambda B}\right)\right] d\xi d\eta \quad (6-1-17) \end{aligned}$$

可以看出, 将物平面光波场 $O_0(\xi, \eta)$ 视为输入信号, 波前重建对应的系统并不是一个线性空间不变系统。然而, 如果只对重建图像的强度分布感兴趣, 将 $O_0(\xi, \eta) \exp\left[j\frac{k}{2B}A(\xi^2 + \eta^2)\right]$ 视为输入信号, $O(x_i, y_i)$ 视为输出信号, 数字全息波前重建系统则是一个二维线性空间不变系统。脉冲响应是

$$h(\xi, \eta) = \frac{M\alpha\Delta x^3 N\beta\Delta y^3}{(\lambda B)^2} \operatorname{sinc}\left[N\Delta x\left(\frac{\xi}{\lambda B}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[M\Delta y\left(\frac{\eta}{\lambda B}\right)\right] \quad (6-1-18)$$

由于 δ 函数可以表示为 $\delta(x, y) = \lim_{P, Q \rightarrow \infty} PQ \operatorname{sinc}(Px) \operatorname{sinc}(Qy)^{[17]}$, 式 (6-1-18) 表明, 尽管 $N\Delta x$ 及 $M\Delta y$ 是有限值, 当 B 趋于 0 时, $h(\xi, \eta)$ 趋于 $\alpha\Delta x^2 \beta\Delta y^2 \delta(\xi, \eta)$ 。由于 $B=0$ 对应于 CCD 平面是物平面的像平面情况, 按照这个结论, 将 CCD 探测器置于物体的像平面附近可以重建较理想的像光场。

$$h(x, y) = \frac{NM\alpha\Delta x^3 \beta\Delta y^3}{(\lambda d)^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{N\Delta x}{\lambda d}x\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{M\Delta y}{\lambda d}y\right)$$

应该指出, 式 (6-1-18) 是忽略 x_0y_0 到 xy 平面间光学系统的衍射受限作用而得到的近似结果。按照瑞利及阿贝的成像理论, CCD 平面的像光场是 x_0y_0 到 xy 平面的成像系统出射光瞳的衍射场。实际光学系统总是衍射受限系统, 出射光瞳不可能无限大, 因此, $B=0$ 时并不能得到理想像。此外, 根据取样定理, CCD 能够记录的最高频率受到像素间距离的限制, 在光学设计中盲目增大出射光瞳也是没有必要的。上结论给我们的一个启示是, 可以根据 CCD 能够接收的最高频率来合理设计光学系统, 以期获得最好的重建物光场质量。

由于任意透镜成像系统均能等价于一个单一薄透镜的成像系统, 将式 (6-1-18) 与式 (6-1-1) 比较不难看出, 当 $B < d$ 时, 在物平面与 CCD 平面间引入成像系统后, 物光通过透镜系统的变换等效于扩大了 CCD 的面阵尺寸, 有效捕捉了本来会逸出 CCD 窗口的高频角谱, 它与第 5 章的超分辨率重建研究是相似的, 可以高分辨率地重建物光场。但是, 采用透镜成像系统能有效简化全息图记录光学系统的设计及调整, 物光场的重建计算也比较简单。以下通过实验来证明上述结论。