多波前法的理论研究及实施技术

DUOBOQIANFA DE LILUN YANJIU JI SHISHI JISHU

董晓马 刘 洁 郝晓松◎著

黄河水利出版社

多波前法的理论研究及实施技术

董晓马　刘　洁　郝晓松　著

黄河水利出版社
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

多波前法的理论研究及实施技术/董晓马,刘洁,郝晓松著.
郑州:黄河水利出版社,2014.9
ISBN 978-7-5509-0913-7

Ⅰ.①多… Ⅱ.①董… ②刘… ③郝… Ⅲ.①波前集-研究 Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第213922号

组稿编辑:贾会珍 电话:0371-66028027 E-mail:110885539@qq.com

出 版 社:黄河水利出版社
地址:河南省郑州市顺河路黄委会综合楼14层 邮政编码:450003
发行单位:黄河水利出版社
发行部电话:0371-66026940、66020550、66028024、66022620(传真)
E-mail:hhslcbs@126.com
承印单位:河南新华印刷集团有限公司
开本:787 mm×1 092 mm 1/16
印张:6.75
字数:200千字 印数:1—1 000
版次:2014年9月第1版 印次:2014年9月第1次印刷

定价:25.00元

前　言

在科学技术和工程问题中广泛使用的有限单元法的求解，最后总归结为对大型或巨型的稀疏线性方程组的计算。尽管计算机的速度，内存、外存的容量等在不断提高，但随着工程实际问题复杂程度的增加和分析要求的不断提高，计算机性能的提高并不能完全满足大规模计算的需要。因此，研究如何节省存储容量和计算时间的算法是很有必要的。本书主要围绕如何在求解稀疏线性化方程组的过程中节省存储容量和计算时间而对多波前法的理论、方法进行了研究，详细探讨了该法的实施技术。

结合稀疏矩阵的特点，探讨了稀疏线性方程组的求解方法，特别就稀疏矩阵的 Cholesky 分解法进行了深入讨论并给出了其详细算法。对在非并行、向量计算机平台上稀疏对称正定线性方程组的求解方法——多波前法的理论、方法及其特点进行了深入研究。

就多波前法执行过程的消去树，以及如何由稀疏矩阵构造出消去树做了深入探讨。通过对消去树进行后序遍历及对后序遍历做进一步的优化，使得多波前法分解过程中的运算量和对存储空间需求达到几乎最小。

研究了在消去树指导下多波前法进行集成/分解时所用到的矩阵分解法，这种分解法以 Cholesky 分解法为基础，是多波前法的核心。该分解法糅合了 Column-Cholesky 法与 Submatrix-Cholesky 法，与消去树及栈的数据结构相配合，非常适于多波前法。

对稀疏矩阵的存储结构以及对执行多波前法时的内存管理进行了较为深入的分析，对在计算机上实现多波前法时对数据结构的安排及对存储管理的一些优化技术，包括双链表、栈、阵列等进行了研究，这些关键技术的解决为多波前法的实施提供了可靠的保证。

结合具体的算例，给出了多波前法的实施模块，并设计了相应的算法，编制了相应的程序。结果表明，该方法对于稀疏对称正定线性方程组的求解是有效的，该方法可望应用于有限单元法所生成的稀疏线性方程组的快速有效求解中。

本书撰写分工如下：董晓马撰写 14 万字，刘洁撰写 5 万字，郝晓松撰写 1 万字。

由于作者时间和水平有限，书中难免有不妥之处，请广大读者批评指正。

作　者

2014 年 5 月

目　录

第1章 绪 论

随着现代科学技术的发展,人们正在不断建造更为快速的交通工具、更大规模的建筑物、更大功率的发电机组、更大跨度的桥梁和更为精密的机械设备,这一切都要求工程师在设计阶段就能精确地预测出产品和工程的技术性能,需要对结构的静、动力强度以及速度场、流场、电磁场等技术参数进行分析计算。有限元分析方法为解决这些复杂的工程分析计算问题提供了有效的解决途径。

有限单元(简称有限元)法是随着电子计算机技术和数值分析方法的发展而迅速发展起来的一种现代计算方法。它是20世纪50年代首先在连续体力学领域——飞机结构静、动态分析中应用的一种有效的数值分析方法,随后很快广泛地应用于求解热传导、电磁场、流体力学等连续性问题领域。有限单元法的核心思想是结构的离散化,就是将实际结构假想地离散为有限数目的规则单元组合体,实际结构的物理性能可以通过对离散体进行分析,从而得出满足工程精度的近似结果来替代对实际结构的分析,这样就可以解决很多实际工程需要而理论分析又无法解决的复杂问题。近年来,随着计算机技术的普及和计算速度的提高,有限元分析在工程设计和分析中得到了越来越广泛的重视,已经成为解决复杂的工程分析计算问题的有效途径,从自行车到航天飞机,几乎所有的设计制造都已离不开有限元分析计算。

而对有限元问题的计算,归根结底是对有限元分析中产生的大型或巨型的稀疏线性方程组:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

的计算。其中,$n_{eq} \times n_{eq}$的对称正定的系数矩阵A通常称为总体刚度矩阵,$\vec{x}$、$\vec{b}$则分别是待求的位移向量和已知的n维荷载向量。由于工程有限元法问题的复杂性和解题规模迅速增加,线性方程组的未知量数目常常达到10^4甚至10^6,这给采用分块一维活动列存储方案或波前法的传统直接求解器带来了巨大的困难,主要反映在求解时间和总体刚度矩阵的大小上。

尽管计算机的速度,内存、外存的容量等在不断提高,但随着工程实际问题复杂程度的增加和分析要求的不断提高,计算机性能的提高并不能完全满足大规模计算的需要。因此,研究如何节省存储容量和计算时间的算法是很有必要的。另外,更快更节省存储空间的算法一直是计算科学所追求的目标之一,是计算力学的核心技术之一,也是计算力学

和计算数学领域中的一个非常重要的课题(陈璞等,2002)。它的进步将为工程与科学计算带来发展的动力。Fellippa(1999)指出,从实践和研究两方面的意义看,有限元的快速解法一直是计算力学的前沿课题之一。

1.1 关于稀疏线性方程组的求解

求解线性方程组的方法一般来说分为两大类,即直接法和迭代法。直接法通过对方程组直接进行一系列的运算而得到解,而迭代法则通过逐次逼近来解线性方程组,迭代过程一直进行到近似解达到预定的精度为止。本书主要讨论直接法。相对于迭代法而言,直接法的优点是运算步骤一定,运算次数有限,计算量小并可事先估计,因此得到了广泛应用。较常用的直接法有 Gauss 消去法以及 Gauss 消去法的一些变形,如全主元 Gauss 消去法、高斯 - 约当(Gauss-Jordan)消去法等。而在矩阵求解中用到的则是以 Gauss 消去法为基础的一些改进方法,称为矩阵分解法,如 LU 分解法、LDL^T 分解法、Cholesky 分解法等。

但是科学技术和工程问题中需要求解的线性方程组的系数矩阵 A 往往是大型的或巨型的稀疏矩阵,其特点一是阶数很大,二是含有大量的零元。这些特点使得在对相应的稀疏矩阵化线性方程组求解时,不能直接采用通常适用于满矩阵的求解方法,原因是:

(1)由于矩阵阶数太大,若存储整个矩阵,将会占用大量的存储空间,甚至会存不下,因此需要特别的存储方案,即最好仅对非零元进行存储而不存储零元;

(2)若仅存储非零元,则消去过程就只需对非零元进行操作,而用于满矩阵的求解方法则是对所有元素进行操作的,因此必须对原有求解方法作相应的改变;

(3)若直接采用这些用于满矩阵的求解方法,则消去过程中将产生大量填入元,从而使矩阵的稀疏性遭到破坏,这导致的结果是对存储空间需求的急剧增大,因此要设法在消去过程中尽可能保持矩阵的稀疏性。

这些都说明虽然对于线性方程组的求解已经有了标准解法,但对于稀疏矩阵,却因其特殊性,需要作专门的研究。研究稀疏线性化方程组求解方法的直接目的是充分利用和保持矩阵的稀疏性来节省存储容量和计算时间。而存储容量问题、计算时间问题和保证求解过程的数值稳定性问题,是稀疏线性化方程组解法中遇到的三大问题(杨绍祺等,1985)。

对于稀疏线性化方程组的求解研究围绕着上面提到的三大问题一般从以下三方面入手。

首先是对存储方案(也就是对稀疏矩阵的数据结构)的研究。一是研究稀疏矩阵如何在计算机中存储以使存储容量最小;二是研究存储方案如何适应求解算法,如何与之配

合以便于算法的实现。在过去40年中,不少有限元软件采用了分块一维活动列存储。最近几年,总体刚度矩阵的存储逐渐变为稀疏存储法,国际上一些著名的有限元分析软件已经将稀疏存储的三角分解作为主要求解方案(陈璞等,2002)。与传统的存储方案比较,稀疏存储法仅需为刚度矩阵及其分解因子的非零元分配存储空间,矩阵的运算都在索引形式下进行,只有非零元才被处理。稀疏存储法要比传统的一维活动列存储更快速,需要更少的内存及磁盘空间。另外,在对稀疏矩阵进行消去的过程中,不可避免地要产生填入元,这样,在消去过程中,存储的数据结构要不断地修改,特别是经常需要插入非零元(填入元)或删除(进行消去时)非零元,因此稀疏矩阵的数据结构必须便于插入和删除。常用的存储方案有线性表、位结构、变带宽存储和双链表(十字链表)等。更新、更先进的有Schreiber(1982)提出的"相对索引存储法"(the relative indexing storage scheme),而北京大学陈璞等(2002)提出的"细胞稀疏索引存储方案"更是有效地提高了求解速度且减少了存储容量。

其次是对选主元策略的研究。该研究包括两个方面的目的:一是为保证求解过程的数值稳定性而进行的选主元策略;二是在求解过程中为保持矩阵的稀疏性而进行的选主元策略。选主元的顺序或者说消元的顺序会极大地影响填入量(所谓填入量,是指消去过程中产生的填入元的个数),若主元顺序选择不当,就会在分解过程中产生大量的填入元,可能使本来很稀疏的矩阵几乎变成满矩阵,这样一来,就使得稀疏矩阵的存储方案成为徒劳,而计算量则与普通的满矩阵消去法相当。因此,稀疏矩阵算法的关键之一是研究如何在消去过程中尽可能地保持矩阵的稀疏性。另外,主元数值大小对解的舍入误差影响较大,为了保证求解过程的数值稳定性,应在剩余矩阵中选主列中绝对值最大的元为主元(这就是列主元法),或者选取剩余矩阵中绝对值较大的元为主元(这就是所谓的全主元法)。一般来说,选列主元对于保证解的精度就足够了。但是,这种数值稳定性的要求与保持稀疏性的要求常常是不相容的,必须在两者之间进行折中。还有,由于保持稀疏性的选主元策略与矩阵元素无关,只与矩阵的稀疏结构相关,因此对一个问题而言仅需进行一次该方面的选主元即可。但保持数值稳定性的选主元策略则依赖于剩余矩阵中元素的数值,也就是说,选主元必须在实际的分解过程中"动态"地进行,即在选定一个主元后,应立即对剩余矩阵进行修改(行列置换),然后才能选择下一个主元。因此,选主元的策略必须兼顾稀疏性和数值稳定性。当然,有限元问题中的稀疏矩阵一般具有对角占优的特点,这样直接把对角元作为主元就可以保证求解过程的数值稳定性。常用的策略有局部填入量最小(Markowitz,1957)、最小自由度法(minimum degree method)(Rose,1972)、修正最小自由度法(modified minimum degree method)(Liu,1985)、多重剖分法(nested dissection scheme)(George,1981;Duff,1989)等,当然,这些方法在刚提出时一般是为了保持矩阵的稀疏性,后来不断改进而兼顾了保持数值的稳定性。

最后是对求解方法本身的研究。众所周知,总体刚度矩阵的三角分解是求解正定稀疏线性方程组中计算量最大的部分,因此该部分是研究如何充分利用矩阵的稀疏性,以减少运算量,从而达到节省运算时间和降低存储容量的目的。实际上,该部分的研究基础是直接法和迭代法,而基础部分的研究早就成熟,现在的研究主要集中在对基本方法组合、并行化等方面。

当然,这三方面的研究并非截然分开的,而是紧密结合在一起,具有密切的联系,甚至从某一方面讲,三者是不能分开考虑的。

1.2 本书的主要研究内容

由于稀疏矩阵的特殊性,原有的线性方程组的标准解法不能直接应用到稀疏线性方程组的求解上,而必须做相应的改变,需要专门的研究。本书研究的目的是充分利用稀疏线性方程组的系数阵的稀疏性,寻求既能节省存储(包括主存和辅存)容量又能快速稳定求解的矩阵求解算法。

在国外,已发表了大量的论文,提出了一些有效的算法和应用程序。Gaustavson et al.(1967)、Lee(1968)提出的编译码方法是20世纪60年代提出的节省计算机存储容量和计算时间的著名设想之一,该方法的核心是研究稀疏线性方程组的结构,建立一系列的指示器,对给定的问题和数据结构,编出解方程组的代码程序;正式求解时,再用一个被称为译码器的程序,将上述代码程序翻译成计算机指令程序。该算法是后来发展的一些算法的基础,但其存在一些严重的缺点,如算法过于复杂、编码时间过长等。Weeks et al.(1973)提出了一种指令流方法,采用比较简单的数据结构,通过研究被求解问题的矩阵方程的结构,形成解方程的计算机指令流。由于求解过程没有循环,因而求解过程十分迅速。但是,由于指令流的长度随方程组的阶数而增加,解高阶的稀疏矩阵问题就需要大容量的计算机;此外,生成指令流的时间较长,而且随方程组阶数的增加而增加;再者,这种指令流又与具体问题密切相关,分析每个具体问题都生成相应的指令流,因而影响解题效率。近几年来,人们把著名的LU分解法推进了一步,采用模拟定序、符合LU分解、数值LU分解等算法,有效地解决了存储容量问题和计算时间问题,是目前比较好的稀疏线性方程组解法之一。

多波前法(multifrontal method)是一种有效的大型稀疏线性方程组的求解方法。多波前法是由Duff et al.(1983)在Irons(1970)的波前法基础上发展起来的。该方法通过一定的优化策略把稀疏矩阵的整个分解过程重新组织成一系列的小的稠密矩阵的分解(Liu,1992),从而达到使数值分解的运算量减少到几乎最小。从概念上看,多波前法主要是对与三角分解相关的运算做了重新组织,它把对一个大型稀疏矩阵的分解任务转化成了一系列的子任务,而每个子任务则只包括对小的多的稠密波前阵的局部分解,通过这一系列

的局部分解就可得到相应的分解因子(系数),随后对分解因子进行回代、求解就可以得到原方程组的解。

多波前法是以高斯分解法为基础的直接求解法,其通常是在消去树(elimination tree)的指导下按一定的次序进行集成、消元分解。一般分解过程采用 Cholesky 分解法进行,但做了一定的改变,这里用到的是糅合了 Column-Cholesky 法和 Submatrix-Cholesky 法的一种混合方法。在进行波前阵的集成时用的是与 Column-Cholesky 法相似的方法,而在对波前阵进行分解消去以得到分解因子阵及形成更新阵时则采用了 Submatrix-Cholesky 法。Duff(1996)指出在多波前法中,重点是进行先期的以减少运算量为目的的排序。实际上,排序不仅能够减少运算量,从而节省计算时间,还能够节省计算时所需的存储空间。而排序的结果一般用树的形式表达,树的每个节点表示一个波前阵(frontal matrix)的分解,而每条边则表示从子节点向父节点的数据(这里指更新阵 update matrix)传递。这样与消去树配合,对于任何节点,只要其所有子节点向其传递数据完毕,则该节点即可进行消元分解,当所有节点的消元(分解)都进行完后,就可进行回代,从而求解,这就是多波前法的基本过程。

多波前法的有效性使其在稀疏线性方程组对应的各类稀疏矩阵(对称的、非对称的、正定的、非正定的等)的求解中都得到了相应应用。但国外对多波前法的研究大都集中在向量机、并行机以及分布式处理系统等环境中,并且对于该方法的描述比较抽象,如会涉及大量的图论、数据结构等方面的概念,同时也没有给出具体的相关算法或者介绍不详,更缺少可以利用的公开的源代码。另外,在国内,我们缺乏进行并行运算的条件,而更需要的是能在非并行机如桌面 PC 上运行的该方法。这些都说明有必要结合我们的现状而对多波前法进行研究。

本书围绕如何节省存储容量和计算时间而对多波前法的理论、方法及具体实施技术进行了较为深入的研究,而运算环境则限定在桌面 PC 系统上。本书主要从以下几个方面展开了工作:

(1)讨论了稀疏矩阵的特点以及由此而引起的在稀疏线性方程组求解时遇到的问题,对线性方程组的解法及一般矩阵的分解法进行了综述。

(2)就多波前法的核心部分进行了研究。详细讨论了如何由稀疏矩阵生成相应的消去树,以及多波前法如何在消去树指导下进行集成、分解,并就集成、分解时所用到的矩阵分解法——以 Cholesky 法为基础,糅合了 Column-Cholesky 分解法和 Submatrix-Cholesky 分解法的方法——进行了讨论,并给出了其算法描述。

(3)探讨了多波前法的具体实施技术,并就求解稀疏线性方程组时用到的一些技术——存储策略(数据结构)、选主元策略等进行了讨论。进一步研究了多波前法实施中以消去树为基础对存储进行优化的问题,并对执行多波前法时的内存管理措施进行了讨论。同时,就实施过程中的一些关键问题的算法做了详细研究,给出了具体实现各步功能

的算法。

(4)运用所设计的算法,详细给出了用多波前法求解稀疏线性方程组的实际算例,编制了相应的程序,并对程序的执行进行了考证。

第2章 有限单元法及其工程应用

2.1 有限单元法简介

2.1.1 有限单元法的产生背景(Felippa et al.,1980; Cheng et al.,1982; Thornton,1993; 王勖成等,1997)

有限单元法是一种能求得许多科学技术和工程问题近似解的数值离散化方法(Thornton,1993)。该法最初是在20世纪50年代作为处理固体力学问题的方法出现的,它把原来用于一般框架系统结构分析的方法推广用以分析复杂边值问题,现已成为结构分析的一种最有效的工具,并被广泛地应用于许多领域的非结构问题中。

在科学技术领域,对于许多力学问题和物理问题,人们已经得到了它们应遵循的基本方程(常微分方程或偏微分方程)和相应的定解条件(边界条件)。但能用解析方法求出解析解(精确解)的只是少数方程性质比较简单且几何形状相当规则的问题,而对于大多数问题,由于方程的某些特征的非线性性质或由于求解区域的几何形状比较复杂,无法求得其解析解(analytical solution)。虽然这类问题的解析解很少存在,但是这些却又是工程师和科学家必须去解决的问题。对这类问题的求解通常有两种途径。一种是引入简化假设,将方程和几何边界简化为能够处理的形式,从而得到问题在简化状态下的解答。但是这种方法只有在很有限的情况下才是可行的,过多的简化可能导致误差太大或根本不正确的解答。因此,人们多年来寻找和发展了另一种求解途径——保留问题的复杂性而去寻求问题的近似数值解。特别是近40年来随着电子计算机的飞速发展和广泛应用,数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。

已经发展的数值分析方法可分为两大类。一类以有限差分法为代表,其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解。对于一个问题有限差分法求解步骤是:首先将求解区域划分为网格,然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程,也就是用有限差分方程式对原基本方程(微分方程)做逐点的估计。当采用较多的节点时,近似解的精度可以得到改进。借助于有限差分法,能够求解某些相当复杂的问题,特别是在求解建立于空间坐标系的流体流动问题时,有限差分法有其独特的优势。因此,在流体力学领域内,它至今仍占支配地位。但在用于求解几何形状复杂不规则的问题时,我们发现有限差分法变得难以运用,因为其精度将降低甚至发生困难。

另一类数值分析方法是首先建立和原问题基本方程及相应定解条件相等效的积分形式,然后建立近似解法。如配点法、最小二乘法、Galerkin 法、力矩法等都属于这一类数值

方法,如果原问题的方程具有某些特定的性质,则其等效积分形式可以归结为某个泛函的变分,相应的近似解法实际上是求解泛函的驻值问题,里兹法就属于这一类近似方法。上述不同方法在不同的领域或类型的问题中均得到了成功的应用,但是也只能限于几何形状规则的问题。其根本原因是它们都是在整个求解区域上假设近似函数。因此,对于几何形状复杂的问题,不可能建立合乎要求的近似函数。而有限单元法的出现,是数值分析方法研究领域内重大突破性的进展。

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个且按一定方式相互连接在一起的单元的组合体,有限单元法不像有限差分法假想求解区域由一系列网格组成,而是假想求解区域由许多小且互相连接的单元或子区域所组成。由于单元能按不同的连接方式进行组合,且单元本身又可以有不同形状,因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为数值分析方法的另一个很重要的特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数(不管它是压力、温度、位移、应力,还是其他量),单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个节点的数值和其插值函数来表达。这样一来,一个问题的有限元分析中,未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(也即自由度),从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,一经求解出这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解。显然,随着单元数目的增加,也即单元尺寸的缩小,或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高,解的近似精度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

2.1.2 有限单元法的发展历史(王勖成等,1997;Thornton,1993;欣顿等,1982)

虽然 Clough 在 1960 年的论文中首次引用了有限单元法处理平面弹性问题,但有限单元法的概念远早于此时就有了。从应用数学角度来看,有限单元法基本思想的提出可以追溯到 Courant 在 1943 的工作,他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合来求解 St. Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念,但是直到 1960 年以后,随着电子数值计算机的广泛应用和发展,有限单元法的发展速度才显著加快。

现代有限单元法第一个成功的尝试是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题,这是 Turner、Clough 等在分析飞机结构时于 1956 年得到的结果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的,采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough 进一步处理了平面弹性问题,并第一次提出了"有限单元法"的名称,使人们认识了有限单元法的功效。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础与途径来说,正如上面所提到的,Turner、Clough 等开始提出有限单元法时是利用直接刚度法,它来源于结构分析的刚度法,很大程度上是依靠一种物理的解释,即结构被假定为仅在若干离散节点处相连的单元

组成。这对我们明确有限单元法的一些物理概念是有很大帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。以后,对于结构力学问题应用虚功原理和能量方法解决,于是该法被归纳出来,其广泛的数学依据也得到认识。

1963～1964年,Basseling、Melosh和Jones等证明了有限单元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的另一种形式,从而使用里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法,确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是,有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的,而且事先不要求满足任何边界条件,因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。

从20世纪60年代后期开始,进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金(Galerkin)法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件、但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的情况,因此进一步扩大了有限单元法的应用领域。实际上,这种方法现在已经广泛地被认为是在满足适当边界条件和初始条件下求解偏微分方程组的一般数值方法。

2.2 有限单元法的基本方法和分析问题的基本步骤

有限单元法的另一个优点是可以用多种方法导出单个单元的性质(如刚度矩阵等),基本上有四种不同的处理方法。第一种方法称为直接法,它来自结构分析中的直接刚度法。虽然该方法只适合较简单的问题,但却很容易通过它理解有限元的基本概念。第二种方法称为变分法,它建立在变分学基础上,而且牵涉到求泛函的极值。对固体力学问题而言,泛函变为位能、互补位能或它们的导数。变分处理法有助于延伸有限单元法至不同的工程问题,扩大了有限单元法的应用范围,其同时能用于处理简单及复杂的单元形状。第三种方法完全建立在数学的基础上,称为加权余量法(加权残值法),该法是从基本微分方程着手的。此法可应用在没有泛函存在的问题中,因为对于有些问题,其泛函不存在或仍未被发现,从而就没有可供变分处理法所使用的泛函,也就不用能变分处理法来处理。第四种方法建立在系统热能守恒或机械能守恒的基础上。这种能量守恒法如同加权余量法一样不需要变分的描述,因此扩大了有限单元法的应用范围。

对于不同物理性质和数学模型的问题,不管用哪种方法求得单元性质,在用有限单元法求解问题的解时都有大致相同的基本步骤,只是具体公式推导和运算求解不同。

有限元求解问题的基本步骤通常为:

(1)物体离散化。将求解区域分割成单元,有各种不同的单元形状如三角形、矩形等可供选择,而且同一区域可用不同的单元形状。显然,单元越小(网络越细)则离散域的近似程度越好,计算结果也越精确,但计算量及误差都将增大,因此求解域的离散化是有限元法的核心技术之一。

(2)选择插值函数,确定状态变量及控制方法。这一步为指定单元的节点并选择代表单元内场变量变化的插值函数,场变量可以为标量、向量或高阶张量。虽非惯例,但因多项式容易微分和积分,所以常选多项式为插值函数。根据指定的节点数目、节点

未知数的数目和特征，以及某些节点和边界必须满足的连续条件，我们就可选定多项式的幂。

(3)单元特性分析(单元推导)。一旦有限单元模型建立(也就是说，一旦单元和插值函数被确定)，我们就该确定单个单元性质所代表的矩阵方程式，这个工作可利用前面提过的四种方法来完成：直接法、变分法、加权余量法及能量守恒法。变分法通常最方便，但使用何种方法完全依问题特性而定，这样就可推导出有限单元的列式，其中包括选择合理的单元坐标系，建立单元试函数，以某种方法给出单元各状态变量的离散关系，从而形成单元矩阵(结构力学中称刚度阵或柔度阵)。

为保证问题求解的收敛性，单元推导有许多原则要遵循。对工程应用而言，重要的是应注意每一种单元的解题性能与约束。例如，单元形状应以规则为好，畸形时不仅精度低，而且有缺秩的危险，将导致无法求解。

(4)集成单元特性以求得系统方程组。为求得整个系统的性质，我们必须把所有单元性质集成起来。简言之，我们必须把代表单个单元行为的矩阵方程组集成，以求得代表整个区域行为的矩阵方程组。除整体矩阵因包含许多的单元从而包括更多的节点外，两者从形式上说是相同的，集成的基础建立在场变量的节点值对共有该节点的诸单元都是相同的，而在求解系统方程组以前须引入边界条件以修改系统方程组。

(5)求解系统方程组。上述步骤产生一组方程式，求解该方程组就可获得未知场变量的节点值(未知量)，一经求得这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。

(6)若需要则作进一步计算。有时我们需要用系统方程组的解计算重要参数。例如，润滑问题中系统方程组求出的为压力分布，从节点的压力分布，我们可能要计算速度分布或剪力分布等。

简言之，有限元分析可分成三个阶段：前处理、求解和后处理。前处理是建立有限元模型，完成单元网格划分；后处理则是采集处理分析结果，使用户能简便提取信息，了解计算结果。

2.3 有限单元法的应用领域

有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。最近又发展到求解几个交叉学科的问题。例如，当气流流过一个很高的铁塔时产生变形，而塔的变形又反过来影响到气流的流动，这就需要用固体力学和流体动力学的有限元分析结果交叉迭代求解，即所谓流固耦合的问题。并且，有限单元法在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化、设计并和计算机辅助设计技术(CAD)相结合。

从工程技术、物理学和应用数学方面，按所要解决问题的特性，可以看出有限单元法的三类主要应用领域(王勖成等，1997；Thornton，1993；欣顿等，1982)：

第一类是稳定问题(equilibrium problem)或称为时间无关的问题。多数的应用属于这一类。这种问题的例子包括线弹性系统应力分析、静电学、静磁学、稳态热传导和在多孔介质中的流体流动。对于固体力学的稳定问题,我们想求出的是已知机械或热荷载下的应力应变或温度分布。同样地,对流体力学的稳定问题,我们想求压力、速度、温度或浓度分布。

第二类问题称为固体力学或流体力学的特征值问题(eigenvlaue problem)。特征值问题是稳定问题的推广,在特征值问题中必须确定某些参数的特种值或临界值。这些稳态问题常需要确定固体或流体的自然频率和振动模态。线弹性系统自然频率的确定就是这些问题的例子。另外,土木工程中考虑湖泊和水坝的相互作用时,特征值问题即出现,而在太空工程中当液体燃料在挠性储存槽飞溅时,特征值问题亦出现。另一类的特征值问题包括结构的稳定性以及层流的稳定性问题。

第三类是连续介质力学中与时间有关的问题或传播问题(propagation problem)。该类问题由上述两类问题加上时间所构成。流体动力学和弹性连续体的瞬时动态分析就是这类问题的两个例子。

需要注意的是,在这三类应用领域中,有些问题会包含一些非线性性质,从而使分析复杂化。随着科学技术的发展,线性理论已经远远不能满足设计的要求,许多工程问题如材料的破坏与失效、裂纹扩展等仅靠线性理论根本不能解决,必须进行非线性分析求解,例如薄板成型就要求同时考虑结构的大位移、大应变(几何非线性)和塑性(材料非线性);而对塑料、橡胶、陶瓷、混凝土及岩土等材料进行分析或需考虑材料的塑性、蠕变效应时则必须考虑材料非线性。众所周知,非线性问题的求解是很复杂的,它不仅涉及很多专门的数学问题,还必须掌握一定的理论知识和求解技巧,学习起来也较为困难。为此,国外一些公司花费了大量的人力和物力开发非线性求解分析软件,如ADINA、ABAQUS等适合于求解非线性问题的有限元分析软件,并广泛应用于工程实践。

Thornton(1993)指出,几乎所有的工程问题都是有限单元法的潜在使用者。但该法能解特定问题并不意味它是最有效、最实用的方法,通常解决某一问题有多种方法,每一种方法都有其优点,但没有一种方法对任何问题都是最好的。因此,当设计者或分析者面对一连续介质问题时,首先应决定该使用哪种方法。选择何种方法必须视具体的条件如计算机设备、软件以及所需花费的时间和金钱而定。

随着计算机的普及和计算机软硬件的快速发展,特别是基于有限单元法的大型商业化有限元分析软件如ABAQUS、ADINA、ANSYS、COSMOS、NASTRAN、MARC等的推广,有限单元法应用的范围延伸到了几乎所有的工程领域。

2.3.1　土木工程领域

在土木工程领域,其应用包括:

(1)高层与大型建筑的整体分析(动、静力分析)。

(2)桥梁工程中的反应谱分析和非线性时程分析,如图2.1所示。

(3)大型水土结构的计算与分析。

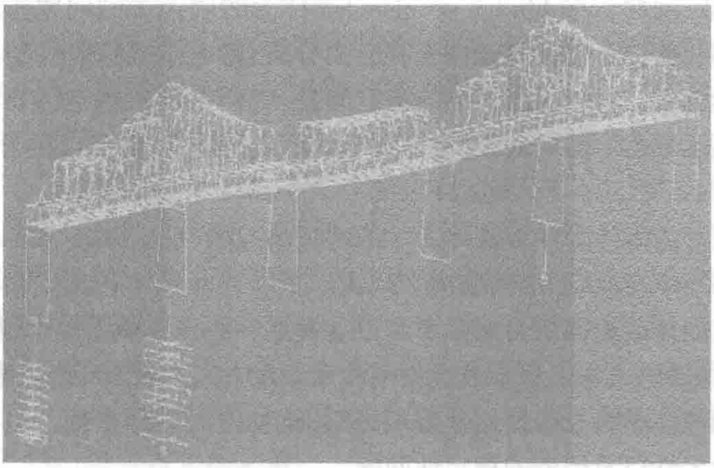
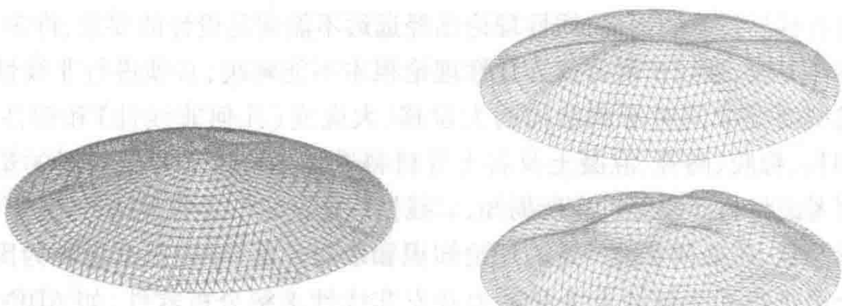


图 2.1　美国加利福尼亚州奥克兰湾大桥非线性抗震事故分析

(4)大跨度空间结构动静力有限元分析,如图 2.2 所示。

(5)高层建筑上部结构和地基的共同作用分析等。



正常使用荷载组合作用下的变形图

第一阶、第二阶振型图

图 2.2　大跨度空间结构动、静力有限元分析

2.3.2　汽车工业领域

在汽车工业领域,其应用包括:

(1)整车结构的静态实验、冲击实验仿真。

(2)发动机系统多场耦合分析。

(3)油泵管道应力和流动分析。

(4)轮胎横径向刚度、防滑等力学分析。

(5)汽车风阻系数的计算等,如图 2.3 所示。

2.3.3　航空航天领域

在航空航天领域,其应用包括: