



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

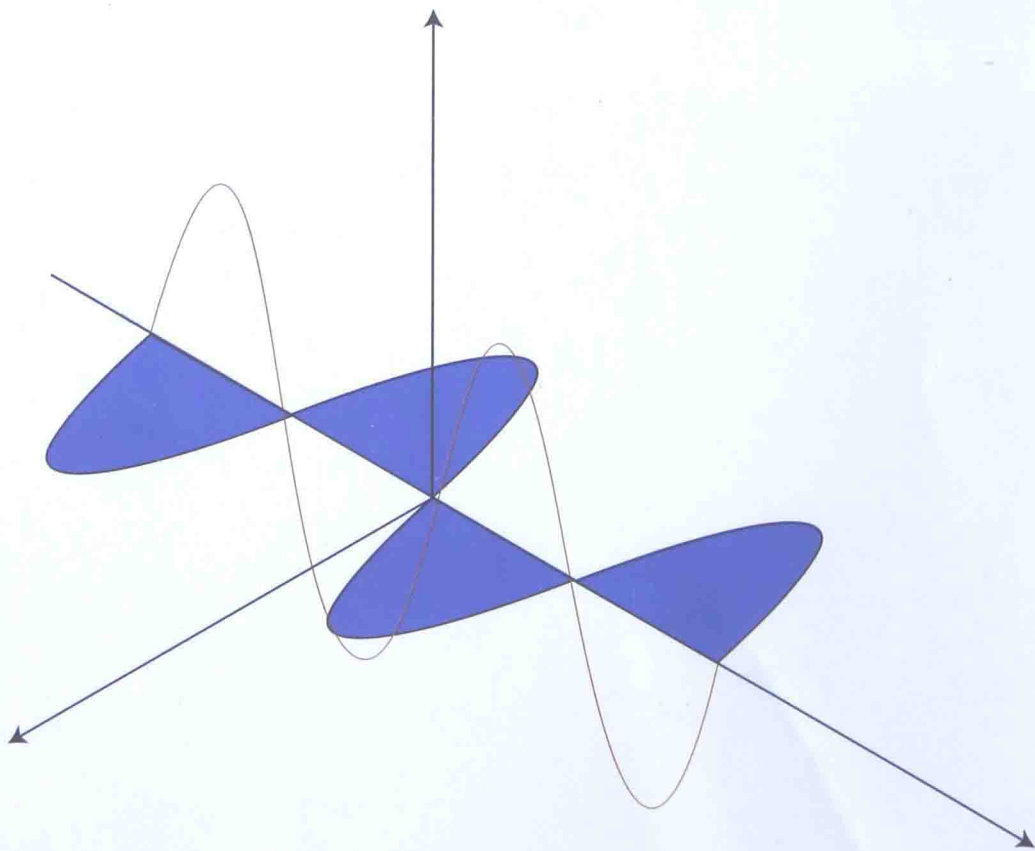
信息与通信工程

Guidance for Field and Wave Electromagnetics: Teaching, Learning and
Graduate Student Entrance Examination

电磁场与电磁波 教学、学习与考研指导

张洪欣 沈远茂 张鑫 编著

Zhang Hongxin Shen Yuanmao Zhang xin



清华大学出版社



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会
高等学校电子信息类专业系列教材

Guidance for Field and Wave Electromagnetics: Teaching, Learning and
Graduate Student Entrance Examination

电磁场与电磁波 教学、学习与考研指导

张洪欣 沈远茂 张鑫 编著

Zhang Hongxin Shen Yuanmao Zhang xin

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是张洪欣、沈远茂、韩宇南编写的《电磁场与电磁波》的配套教学辅导用书。本书共收录了 500 余道习题,包括典型例题、习题和考研题。本书章节安排与主教材一致,共分为 9 章,每章包括内容提要及学习要点、典型例题解析、主教材习题解答、典型考研试题解析四部分,每道题均给出了详细的解答。本书凝聚了编者多年的教学心得体会与解题技巧,注重对概念、公式及定律的理解和应用,对主要知识点和难点做了剖析,既简明扼要,又重点突出;本书的特点是选题典型,与教学和考研要求紧密结合。在解题过程中注意凝练思路,突出物理概念和数学手段的结合,强调分析方法,便于学生学习和巩固知识。

本书可以作为高等院校电子信息类和电气信息类专业电磁场基础理论课程的辅助参考用书,也可以作为研究生入学考试的辅导用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波教学、学习与考研指导/张洪欣,沈远茂,张鑫编著. —北京:清华大学出版社,2014
高等学校电子信息类专业系列教材
ISBN 978-7-302-36388-0

I. ①电… II. ①张… ②沈… ③张… III. ①电磁场—高等学校—教学参考资料 ②电磁波—高等学校—教学参考资料 IV. ①0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 099163 号

责任编辑:盛东亮

封面设计:李召霞

责任校对:梁毅

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:25 字 数:621千字

版 次:2014年12月第1版 印 次:2014年12月第1次印刷

印 数:1~2500

定 价:45.00元

产品编号:055655-01

高等学校电子信息类专业系列教材

一 顾问委员会

谈振辉	北京交通大学	(教指委高级顾问)	郁道银	天津大学	(教指委高级顾问)
廖延彪	清华大学	(特约高级顾问)	胡广书	清华大学	(特约高级顾问)
华成英	清华大学	(国家级教学名师)	于洪珍	中国矿业大学	(国家级教学名师)
彭启琮	电子科技大学	(国家级教学名师)	孙肖子	西安电子科技大学	(国家级教学名师)
邹逢兴	国防科技大学	(国家级教学名师)	严国萍	华中科技大学	(国家级教学名师)

一 编审委员会

主 任	吕志伟	哈尔滨工业大学			
副主任	刘 旭	浙江大学	王志军	北京大学	
	隆克平	北京科技大学	葛宝臻	天津大学	
	秦石乔	国防科学技术大学	何伟明	哈尔滨工业大学	
	刘向东	浙江大学			
委 员	王志华	清华大学	宋 梅	北京邮电大学	
	韩 焱	中北大学	张雪英	太原理工大学	
	殷福亮	大连理工大学	赵晓晖	吉林大学	
	张朝柱	哈尔滨工程大学	刘兴钊	上海交通大学	
	洪 伟	东南大学	陈鹤鸣	南京邮电大学	
	杨明武	合肥工业大学	袁东风	山东大学	
	王忠勇	郑州大学	程文青	华中科技大学	
	曾 云	湖南大学	李思敏	桂林电子科技大学	
	陈前斌	重庆邮电大学	张怀武	电子科技大学	
	谢 泉	贵州大学	卞树檀	第二炮兵工程大学	
	吴 瑛	解放军信息工程大学	刘纯亮	西安交通大学	
	金伟其	北京理工大学	毕卫红	燕山大学	
	胡秀珍	内蒙古工业大学	付跃刚	长春理工大学	
	贾宏志	上海理工大学	顾济华	苏州大学	
	李振华	南京理工大学	韩正甫	中国科学技术大学	
	李 晖	福建师范大学	何兴道	南昌航空大学	
	何平安	武汉大学	张新亮	华中科技大学	
	郭永彩	重庆大学	曹益平	四川大学	
	刘缠牢	西安工业大学	李儒新	中科院上海光学精密机械研究所	
	赵尚弘	空军工程大学	董友梅	京东方科技集团	
	蒋晓瑜	装甲兵工程学院	蔡 毅	中国兵器科学研究院	
	仲顺安	北京理工大学	冯其波	北京交通大学	
	黄翊东	清华大学	张有光	北京航空航天大学	
	李勇朝	西安电子科技大学	江 毅	北京理工大学	
	章毓晋	清华大学	谢凯年	赛灵思公司	
	刘铁根	天津大学	张伟刚	南开大学	
	王艳芬	中国矿业大学	宋 峰	南开大学	
	苑立波	哈尔滨工程大学	靳 伟	香港理工大学	
丛书责任编辑	盛东亮	清华大学出版社			

序

FOREWORD

我国电子信息产业销售收入总规模在 2013 年已经突破 12 万亿元,行业收入占工业总体比重已经超过 9%。电子信息产业在工业经济中的支撑作用凸显,更加促进了信息化和工业化的高层次深度融合。随着移动互联网、云计算、物联网、大数据和石墨烯等新兴产业的爆发式增长,电子信息产业的发展呈现了新的特点,电子信息产业的人才培养面临着新的挑战。

(1) 随着控制、通信、人机交互和网络互联等新兴电子信息技术不断发展,传统工业设备融合了大量最新的电子信息技术,它们一起构成了庞大而复杂的系统,派生出大量新兴的电子信息技术应用需求。这些“系统级”的应用需求,迫切要求具有系统级设计能力的电子信息技术人才。

(2) 电子信息系统设备的功能越来越复杂,系统的集成度越来越高。因此,要求未来的设计者应该具备更扎实的理论基础知识和更宽广的专业视野。未来电子信息系统的设计越来越要求软件和硬件的协同规划、协同设计和协同调试。

(3) 新兴电子信息技术的发展依赖于半导体产业的不断推动,半导体厂商为设计者提供了越来越丰富的生态资源,系统集成厂商的全方位配合又加速了这种生态资源的进一步完善。半导体厂商和系统集成厂商所建立的这种生态系统,为未来的设计者提供了更加便捷却又必须依赖的设计资源。

教育部 2012 年颁布了新版《高等学校本科专业目录》,将电子信息类专业进行了整合,为各高校建立系统化的人才培养体系,培养具有扎实理论基础和宽广专业技能的、兼顾“基础”和“系统”的高层次电子信息人才给出了指引。

传统的电子信息学科专业课程体系呈现“自底向上”的特点,这种课程体系偏重对底层元器件的分析与设计,较少涉及系统级的集成与设计。近年来,国内很多高校对电子信息类专业课程体系进行了大力度的改革,这些改革顺应时代潮流,从系统集成的角度,更加科学合理地构建了课程体系。

为了进一步提高普通高校电子信息类专业教育与教学质量,贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》和《教育部关于全面提高高等教育质量若干意见》(教高【2012】4 号)的精神,教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会开展了“高等学校电子信息类专业课程体系”的立项研究工作,并于 2014 年 5 月启动了《高等学校电子信息类专业系列教材》(教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材)的建设工作。其目的是为推进高等教育内涵式发展,提高教学水平,满足高等学校对电子信息类专业人才培养、教学改革与课程改革的需要。

本系列教材定位于高等学校电子信息类专业的专业课程,适用于电子信息类的电子信

息工程、电子科学与技术、通信工程、微电子科学与工程、光电信息科学与工程、信息工程及其相近专业。经过编审委员会与众多高校多次沟通,初步拟定分批次(2014—2017年)建设约100门课程教材。本系列教材将力求在保证基础的前提下,突出技术的先进性和科学的前沿性,体现创新教学和工程实践教学;将重视系统集成思想在教学中的体现,鼓励推陈出新,采用“自顶向下”的方法编写教材;将注重反映优秀的教学改革成果,推广优秀的教学经验与理念。

为了保证本系列教材的科学性、系统性及编写质量,本系列教材设立顾问委员会及编审委员会。顾问委员会由教指委高级顾问、特约高级顾问和国家级教学名师担任,编审委员会由教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会委员和一线教学名师组成。同时,清华大学出版社为本系列教材配置优秀的编辑团队,力求高水准出版。本系列教材的建设,不仅有众多高校教师参与,也有大量知名的电子信息类企业支持。在此,谨向参与本系列教材策划、组织、编写与出版的广大教师、企业代表及出版人员致以诚挚的感谢,并殷切希望本系列教材在我国高等学校电子信息类专业人才培养与课程体系建设中发挥切实的作用。

吕志伟 教授

前言

PREFACE

为了更好地帮助广大学生对“电磁场与电磁波”课程的学习及考研复习,编写该教学与学习辅导用书。本书不仅包括主教材的内容提要及重点与难点分析、习题解答等,还针对经典的例题和典型考研试题进行剖析。旨在帮助学生掌握该门课程的主要内容,加强对概念、公式和定理的理解,透过电磁现象认识电磁规律的本质,掌握解题的基本思路和方法;提升对重要知识点的理解,掌握解题技巧,提高解题能力,并对难点进行剖析,达到硕士研究生考试的要求。所选题目均来自于经典范例、著名高校的考研或者期末考试真题,具有很强的代表性,可以帮助学生更快更好地掌握该课程的学习方法,活学活用,强化解题思路,提高对整个知识脉络的把握能力和认识水平。

本书共分9章,每章包括内容提要及学习要点、典型例题解析、主教材习题解答、典型考研试题解析四部分。本书凝聚了编者多年从事电磁场与电磁波教学的心得体会与解题方法,在概念描述、公式及定律的理解上有一定独到之处,可以帮助学生释疑。对知识脉络、重要公式、基本定理、经典范例等逐次展开,通过对主要知识点和难点的剖析,循序渐进,逐渐提升认识水平,提高理解层次,便于学生学习和巩固知识,把握该门课程的完整体系。

本书对电磁场与电磁波的教学、学习及考研都有参考价值,也可以作为高等院校电子信息类和电气信息类专业电磁场基础理论课程的辅助参考用书。希望本书能够使读者共享编者对电磁场与电磁波的心得体会,使得该门课程易教易学。本书由张洪欣、沈远茂、张鑫编写,得到了北京邮电大学电子工程学院、滨州学院物理与电子科学系以及清华大学出版社的大力支持,在此一并表示诚挚的感谢。

限于编者学识有限,书中难免存在一些缺点、疏漏和不足,敬请广大读者批评指正。

编者

2014年4月

于北京邮电大学

目录

CONTENTS

第 1 章 矢量分析	1
1.1 内容提要及学习要点	1
1.1.1 矢量代数.....	1
1.1.2 三种常用的坐标系.....	1
1.1.3 标量场的梯度.....	3
1.1.4 矢量场的通量与散度.....	4
1.1.5 矢量场的环量与旋度.....	5
1.1.6 格林定理.....	6
1.1.7 亥姆霍兹定理及矢量场的唯一性定理.....	6
1.2 典型例题解析	6
1.3 主教材习题解答.....	13
1.4 典型考研试题解析.....	25
第 2 章 静电场和恒定电场	30
2.1 内容提要及学习要点.....	30
2.1.1 静电场的基本方程	30
2.1.2 电位	31
2.1.3 电介质中的场	31
2.1.4 静电场的边界条件	32
2.1.5 电容、电场的能量及电场力.....	32
2.1.6 恒定电场	33
2.1.7 静电场比拟法	33
2.2 典型例题解析.....	33
2.3 主教材习题解答.....	47
2.4 典型考研试题解析.....	59
第 3 章 恒定磁场	71
3.1 内容提要及学习要点.....	71
3.1.1 恒定磁场的基本方程	71
3.1.2 恒定磁场的位函数	72
3.1.3 磁偶极子与介质的磁化	73
3.1.4 恒定磁场的边界条件	74
3.1.5 电感	74
3.1.6 恒定磁场的能量和磁场力	74
3.2 典型例题解析.....	75

3.3	主教材习题解答	89
3.4	典型考研试题解析	100
第4章	静态电磁场边值问题的解法	110
4.1	内容提要及学习要点	110
4.1.1	边值问题的分类	110
4.1.2	边界条件的分类	110
4.1.3	静态电磁场的唯一性定理	110
4.1.4	分离变量法	110
4.1.5	镜像法	112
4.2	典型例题解析	113
4.3	主教材习题解答	127
4.4	典型考研试题解析	142
第5章	时变电磁场	160
5.1	内容提要及学习要点	160
5.1.1	麦克斯韦方程组	160
5.1.2	时变电磁场的边界条件	161
5.1.3	时谐电磁场及麦克斯韦方程组的复数形式	162
5.1.4	时变电磁场的能量及功率	162
5.1.5	时变电磁场的唯一性定理、位函数及波动方程	163
5.2	典型例题解析	163
5.3	主教材习题解答	173
5.4	典型考研试题解析	185
第6章	平面电磁波	194
6.1	内容提要及学习要点	194
6.1.1	波动方程	194
6.1.2	均匀平面电磁波	195
6.1.3	电磁波的极化	196
6.1.4	导电媒质中的均匀平面波	198
6.2	典型例题解析	201
6.3	主教材习题解答	214
6.4	典型考研试题解析	229
第7章	平面电磁波在媒质界面上的反射与折射	243
7.1	内容提要及学习要点	243
7.1.1	反射系数、折射系数	243
7.1.2	行波、驻波与行驻波	243
7.1.3	时谐平面波在不同媒质分界面上反射、折射的一般规律	244
7.1.4	时谐平面波向不同媒质界面的垂直入射	246
7.1.5	时谐平面波向不同媒质界面的斜入射	247
7.1.6	平面波在导电媒质分界面的反射与折射	250
7.1.7	平面波在多层媒质分界面的垂直入射	251
7.2	典型例题解析	252
7.3	主教材习题解答	273

7.4	典型考研试题解析	280
第8章	导行电磁波	296
8.1	内容提要及学习要点	296
8.1.1	导行电磁波及其导行系统	296
8.1.2	双线传输线	298
8.1.3	同轴传输线	300
8.1.4	矩形波导中的导波	300
8.1.5	导波的驻波及谐振腔	304
8.2	典型例题解析	305
8.3	主教材习题解答	320
8.4	典型考研试题解析	334
第9章	电磁辐射	352
9.1	内容提要及学习要点	352
9.1.1	滞后位	352
9.1.2	电偶极子的辐射	352
9.1.3	磁偶极子的辐射	354
9.1.4	电与磁的对偶原理	354
9.1.5	对称振子天线	355
9.1.6	天线的基本参数	355
9.2	典型例题解析	356
9.3	主教材习题解答	366
9.4	典型考研试题解析	375
参考文献		387

1.1 内容提要及学习要点

本章主要掌握标量场和矢量场的基本性质及其运算。掌握矢量在三种常见正交坐标系中的运算及相互表示,理解矢量积的物理意义,掌握基本矢量的运算法则。掌握通量、环量及方向导数的概念及计算,牢固掌握“三度”(梯度、散度、旋度)的基本概念、物理意义,以及在三种常用坐标系(直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系)中的计算和运算规则。理解亥姆霍兹定理及矢量场的唯一性定理,了解格林定理。

1.1.1 矢量代数

1. 矢量的点积

两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是一个标量,即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ 。

理解点积的物理意义在于理解“投影”,即一个矢量在另一矢量上的投影,点积表征两矢量(信号)间含有平行分量成分的多少。如果两矢量正交(垂直),则其点积为零;如果两矢量平行,则其点积的绝对值取最大值。

2. 矢量的叉积

两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的叉积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 是一个矢量,即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_n AB \sin \theta$ 。

注意: 矢量的叉积不满足交换律,但是服从分配律。利用矢量的叉积可以表征两矢量间含有垂直分量(正交分量)成分的多少。如果两矢量正交,则其叉积有最大值;如果两矢量平行,则其叉积为零。

常用公式:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-1)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-2)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-3)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-4)$$

1.1.2 三种常用的坐标系

三种常用的正交坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。它们的坐标分别为 (x, y, z) 、 (ρ, ϕ, z) 和 (r, θ, ϕ) 。

注意：在圆柱坐标系中的 e_ρ, e_ϕ 和球坐标系中的坐标单位矢量都不是常矢量，因为其方向随空间坐标变化。因此，在圆柱坐标系或者球坐标系下对矢量的积分运算通常都转化到直角坐标系下进行，掌握坐标系之间的转换具有重要意义。

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系之间的转换关系为

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (1-5)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1-6)$$

1. 三种常用坐标系中的积分元

在直角坐标系中，线元、面积元、体积元分别表示为

$$d\mathbf{r} = e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad (1-7)$$

$$dS_x = e_x (dydz), \quad dS_y = e_y (dzdx), \quad dS_z = e_z (dxdy) \quad (1-8)$$

$$dV = dxdydz \quad (1-9)$$

在圆柱坐标系中，线元、面积元、体积元分别表示为

$$d\mathbf{r} = e_\rho d\rho + e_\phi \rho d\phi + e_z dz \quad (1-10)$$

$$dS_\rho = e_\rho \rho d\phi dz, \quad dS_\phi = e_\phi \rho dz, \quad dS_z = e_z \rho d\rho d\phi \quad (1-11)$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1-12)$$

在球坐标系中，线元、面积元、体积元分别表示为

$$d\mathbf{r} = e_r dr + e_\theta r d\theta + e_\phi r \sin \theta d\phi \quad (1-13)$$

$$dS_r = e_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad dS_\theta = e_\theta r \sin \theta dr d\phi, \quad dS_\phi = e_\phi r dr d\theta \quad (1-14)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1-15)$$

2. 矢量表示在三种常用坐标系中的转换表示

矢量在圆柱坐标系与直角坐标系中的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

矢量在球坐标系与直角坐标系中的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

3. 三种常用坐标系中的矢量运算表示

在直角坐标系中

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-18)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-19)$$

在圆柱坐标系中

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z \quad (1-20)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} \quad (1-21)$$

在球坐标系中

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \quad (1-22)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix} \quad (1-23)$$

1.1.3 标量场的梯度

1. 方向导数

标量场 $u(P)$ 的方向导数是一个标量, 它表示在某点处沿某一方向的变化率。

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1-24)$$

其中, $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是方向余弦。

2. 梯度的概念

标量场在某点处可以有多个方向导数。梯度是一个矢量, 其模就是在给定点处的最大方向导数, 其方向就是该点最大方向导数的方向。梯度的方向也称为最陡下降方向, 与等值面垂直。对于三维函数, 梯度方向与法向一致; 在直角坐标系下, 对二元函数, 梯度的方向与法向矢量在 xOy 平面上投影的方向平行。

梯度与方向导数的关系: 方向导数等于矢量场的梯度在该方向的投影。

3. 哈密尔顿算符及梯度运算

梯度表示为 $\nabla u = \mathbf{e}_n \frac{du}{dn}$ 。其中, 哈密尔顿算符 ∇ 兼有矢量与微分运算的双重作用, 其方向可以认为沿“法向”。在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中, 哈密尔顿算子分别表示为

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-25)$$

$$\nabla u = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial u}{\rho \partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-26)$$

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (1-27)$$

注意: 通常 ∇' 表示对带撇坐标 (x', y', z') 作微分运算 (带撇坐标常对应定点, 不带撇坐标对应动点), 且 $\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$ 。

拉普拉斯算符 ∇^2 :

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u \quad (1-28)$$

在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中, 标量场 u 的拉普拉斯运算分别为

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1-29)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1-30)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (1-31)$$

矢量场的拉普拉斯算符运算为

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$$

可以证明,在直角坐标系中,矢量场的拉普拉斯算符运算简化为

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{e}_x \nabla^2 F_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 F_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 F_z \quad (1-32)$$

1.1.4 矢量场的通量与散度

1. 矢量场的通量

矢量场的通量是从物理量中抽象出来的一个数学概念,通常具有若干物理意义,如磁通量、电通量、热量、流量等。矢量 \mathbf{F} 穿过曲面 S 的通量为

$$\Psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_S F dS \cos \theta \quad (1-33)$$

通量描述了矢量场的发散性质,即“膨胀”或穿越曲面的“突围”能力,体现了矢量在曲面法线方向的分量的量度。当 $\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} > 0$ 时说明闭合曲面 S 内有源(正通量源); $\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} < 0$ 时表示闭合曲面 S 内有洞(负通量源); 当 $\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 时,则闭合曲面内无通量源。

2. 矢量场的散度

矢量场 \mathbf{F} 的散度是标量,表示通过某点处单位体积的通量(通量体密度)。

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-34)$$

在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系下,散度的计算公式为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (1-37)$$

散度描述的是矢量场中各点的场量与通量源之间的关系,刻画了矢量场沿等值面法线方向的变化率。若在矢量场存在的全部区域中其散度处处为零,则称该场为无散场(无源场)或管形场。

3. 散度定理

散度定理表明,矢量场 \mathbf{F} 的散度在体积 V 的体积分,等于矢量场 \mathbf{F} 在限定该体积的闭合面 S 上的面积分,即

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1-38)$$

利用散度定理可将矢量散度的体积分转化为该矢量的封闭曲面的面积分,或反之。

1.1.5 矢量场的环量与旋度

1. 矢量场的环量

矢量场的环量也是从物理量中抽象出来的一个数学概念,通常具有若干物理意义,如电流、功、环流等。环量是一个闭合曲线积分,即

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-39)$$

环量描述矢量场的涡旋性,即矢量场围绕曲线的“缠绕”或者“闭合”能力,体现了矢量在闭合路径切线方向的分量的量度。

2. 矢量场的旋度

矢量场 \mathbf{F} 在某点处的环量面密度最大值定义为旋度,它是一个矢量。

$$\text{curl} \mathbf{F} = \mathbf{e}_n \left[\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right]_{\max} \quad (1-40)$$

注意,环量面密度也是一个矢量,某点具有无穷多个不同方向的环量面密度。旋度的方向为取得环量面密度最大值时的闭合曲线包围面元的法线方向。任一方向上的环量面密度的大小就是旋度在该方向上的投影。

旋度描述的是矢量场中各点的场量与涡旋源之间的关系,刻画了矢量场沿等值面(线)切线方向的变化率。若在矢量场存在的全部区域中其旋度处处为零,则称该场为无旋场或保守场。

在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中,矢量场 \mathbf{F} 旋度的表达式为

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1-41)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \quad (1-42)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin\theta F_\phi \end{vmatrix} \quad (1-43)$$

3. 斯托克斯定理

斯托克斯定理描述的是矢量场旋度的曲面积分与该矢量沿闭合曲线积分之间的一个变换关系。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-44)$$

1.1.6 格林定理

格林定理包括两个等式:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{e}_n dS = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (1-45)$$

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S (\psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{e}_n dS = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (1-46)$$

1.1.7 亥姆霍兹定理及矢量场的唯一性定理

矢量场可表示为一个标量函数 u 的梯度和一个矢量函数 \mathbf{A} 的旋度之和,即

$$\mathbf{F} = -\nabla u + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-47)$$

式中的标量函数由 \mathbf{F} 的散度和 \mathbf{F} 在边界 S 上的法向分量完全确定; 而矢量函数则由 \mathbf{F} 的旋度和 \mathbf{F} 在边界面 S 上的切向分量完全确定。

矢量场的唯一性定理: 如果矢量场在某空间区域处处单值, 且其导数连续有界, 则该矢量场由它的散度、旋度以及边界上矢量场的切向分量或法向分量唯一确定。

无旋场和无散场: 在无界空间中, 散度与旋度均处处为零的矢量场是不存在的, 源是产生场的起因, 矢量场由其散度及旋度确定, 可分为无旋场和无散场; 而在有界空间中, 矢量场根据散度及旋度是否为零, 可分为 4 类, 其中散度和旋度为零的场又称为调和场。因为 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, 故调和场 \mathbf{F} 也是有势场。

重要公式:

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1-48)$$

结合“ ∇ ”的方向沿“法向”, 以上公式则不难理解和记忆。

因此, 无旋场和无散场可以表示为

$$\mathbf{F} = -\nabla u, \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-49)$$

1.2 典型例题解析

【例题 1-1】 将圆柱坐标系中的矢量场 $\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = 2\mathbf{e}_\rho + 3\mathbf{e}_\phi$ 在直角坐标系下表示。

$$\text{解: } \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\phi - 3\sin\phi \\ 2\sin\phi + 3\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z = z$$

所以

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} [(2x - 3y)\mathbf{e}_x + (2y + 3x)\mathbf{e}_y]$$

【例题 1-2】 已知圆柱坐标系中的矢量 $\mathbf{A} = 4\mathbf{e}_\rho + 3\mathbf{e}_\phi + 2\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{e}_\rho + 2\mathbf{e}_\phi + 2\mathbf{e}_z$ 的起点坐标分别为点 $P(4, \pi/6, 2)$ 和点 $Q(2, \pi/3, 2)$ 。求起点坐标在点 $M(1, \pi/4, 2)$ 处的矢量 $\mathbf{C} =$

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

解: 由于 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 并非定义在同一 $\phi = C$ (常数) 平面上, 故在圆柱坐标系下不能直接求和。需要变换到直角坐标系中求和。对于起点坐标为 $P(4, \pi/6, 2)$ 的矢量 $\mathbf{A} = 4\mathbf{e}_\rho + 3\mathbf{e}_\phi + 2\mathbf{e}_z$, 有

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 & 0 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.964 \\ 4.598 \\ 2 \end{bmatrix}$$

对于起点坐标为 $Q(2, \pi/3, 2)$ 的矢量 $\mathbf{B} = -3\mathbf{e}_\rho + 2\mathbf{e}_\phi + 2\mathbf{e}_z$, 有

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 & 0 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.232 \\ -1.598 \\ 2 \end{bmatrix}$$

于是, 在直角坐标系下

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.268 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

再将其变换到圆柱坐标系下为

$$\begin{bmatrix} C_\rho \\ C_\phi \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & \sin\pi/4 & 0 \\ -\sin\pi/4 & \cos\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.268 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.225 \\ 3.017 \\ 4 \end{bmatrix}$$

故在圆柱坐标系下

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = 1.225\mathbf{e}_\rho + 3.017\mathbf{e}_\phi + 4\mathbf{e}_z$$

【例题 1-3】 三角形的三个顶点为 $P_1(0, 1, -2)$ 、 $P_2(4, 1, -3)$ 、 $P_3(6, 2, 5)$ 。

- (1) 判断 $\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形;
- (2) 求三角形的面积。

解: (1) 设 \mathbf{r}_1 为原点到点 P_1 的矢量, \mathbf{r}_2 为原点到点 P_2 的矢量, \mathbf{r}_3 为原点到点 P_3 的矢量, 则

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z$$

而

$$\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{R}_{23} = (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \cdot (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) = 0$$

由此可知 $\mathbf{R}_{12} \perp \mathbf{R}_{23}$, 也就是说 P_2 角为直角, 故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为直角三角形。

- (2) 三角形面积:

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{R}_{23}| = \frac{1}{2} |\mathbf{R}_{12}| |\mathbf{R}_{23}| \sin\theta = \frac{1}{2} |\mathbf{R}_{12}| |\mathbf{R}_{23}|$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + 1^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 8^2} = 17.13$$

【例题 1-4】 试判断下列矢量场 \mathbf{F} 是否为均匀矢量场:

- (1) 圆柱坐标系中 $\mathbf{F} = \mathbf{e}_\rho F_1 \sin\phi + \mathbf{e}_\phi F_1 \cos\phi + \mathbf{e}_z F_2$, 其中 F_1 、 F_2 都是常数;
- (2) 球坐标系中, $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r F_0$, 其中 F_0 为常数。

解: (1) 圆柱坐标与直角坐标单位矢量关系为