高考数学试题解

（1949—1966）

第二铁路工程局教育处

一九七八年八月

高考数学试题解

（1949—1966）

高考数学试题解

（上　册）

第二铁路工程局教育处　　编

一九七八年八月

编者的话

为了贯彻执行英明领袖华主席关于“提高整个中华民族的科学文化水平”的指示，适应文化建设高潮的需要，我们收集、整理了《高考试题解答》，供中学生自学参考。

本书是在几份资料相互对照的基础上整理的，并非标准答案。为了启发读者的思路，有些试题纳入多种解法，一般第一种解法演算过程较详细，第二、三种解法稍有省略，留给读者自己演算，以便培养读者独立思考问题和解决问题的能力。

全书共分三册，即《高考数学试题解答》、《高考物理试题解答》及《高考化学试题解答》。《高考物理试题解答》为一九五〇年到一九六四年高考物理全国统考试题解答。《高考化学试题解答》为一九五三年到一九六五年和一九七八年高考化学全国统考试题解答。其中《高考数学试题解答》又分上、下两册。上册为一九四九年到一九六六年全国统考和部分省、市、高等院校高考试题解答，下册为一九七七年全国二十九个省、市、自治区高考试题和一九七八年全国高考统考试题解答。

本书承蒙兄弟单位积极提供资料，部份同志认真审编、核版，以及芷江县文教局、印刷厂的大力支援，才能与读者见面，在此，表示谢意。

由于我们受思想水平、知识水平的局限，以及时间仓促，错误和不当之处，欢迎读者提出宝贵意见。

一九七八年四月

目　　录

（上册）

一九四九年高考数学试题 …… 1
一、清华大学 …… 1
二、北京大学 …… 7
三、××大学 …… 12
四、河北工学院 …… 17
一九五〇年高考数学试题 …… 21
一、华北高等学校 …… 21
二、四川大学 …… 34
一九五一年华北、东北高等学校统一招生试题 …… 39
一九五二年高考数学试题 …… 53
一九五三年高考数学试题 …… 61
一九五四年高考数学试题 …… 69
一九五五年高考数学试题 …… 73
一九五六年高考数学试题 …… 76
一九五七年高考数学试题 …… 81
一九五八年高考数学试题 …… 87
一、湖南省高等学校 …… 87

二、北京高等学校 …… 89
三、华东高等学校 …… 94
四、云南高等学校 …… 98
五、四川高等学校 …… 103
六、湖北高等学校 …… 107
一九五九年高考数学试题 …… 111
一九六〇年高考数学试题 …… 115
一九六一年高考数学试题 …… 121
一九六二年高考数学试题 …… 128
一九六三年高考数学试题 …… 133
一九六四年高考数学试题 …… 138
一九六五年高考数学试题 …… 145
一九六六年高考数学试题 …… 154
科技大学入学试题 …… 158

一九四九年高考数学题

一、清华大学

甲组

1、证：若下式 $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$ 为含x之整平方式，则：

$$9p^2-14pq+9q^2=0;$$

再证：若 $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+\alpha)+(x+\alpha)(x+b)$ 为含x之整平方式，

则：$\alpha=b=c$

2、求1之三次根，证任一虚根之平方等于另一虚根；且$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=-1$，

式中n可为任何整数，唯不能为3之倍数。

3、(α)求适合于下列方程组未知数之比例值：

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & \cdots\cdots(1) \\ 2x-3y+4z=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(b)求下列方程组之解：

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & \cdots\cdots(1) \\ 2x-3y+4z=0 & \cdots\cdots(2) \\ 4x^3+3y^3+z^3-xyz=216 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

4、曲线$xy=\alpha^2$上一切线与坐标轴成一三角形，求此三角形之面积？

5、经过抛物线$y^2=2px$的焦点之弦，与抛物线对称轴成角θ，试证此弦在抛物线内之截线等于$\frac{L}{\sin^2\theta}$，式中L为正焦弦之长（经过焦点而又垂直于对称轴之弦称为正焦弦）。

6、证：(α)$3+4\cos\theta+\cos 2\theta\geqslant 0$；

(b)$\frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}=\cos x\cos 2x\cdots\cdots\cos 2^{n-1}x$

乙、丙组

1、求适合$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin x$及$0\leqslant X\leqslant 2\pi$角之值。

2、有连续三整数，其平方和为50，求此三数。

3、解 $x^6+64=0$

4、已知角A及角内一点p，求作一通过p点之直线，使其在A角之部分被p点平分。

5、PA、PB、PC为过元周上点P之三弦，PT为元之切线，设有一线与PT平行，交PA、PB、PC于A'、B'、C'三点，试证：$PA\cdot PA'=PB\cdot PB'=PC\cdot PC'$

题 解：

甲 组

1、证：$f(x)=(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$

$=x^2+(p+2q)x+2pq+x^2+(2p+q)x+2pq$

$=2x^2+3(p+q)x+4pq$

因f(x)为含x之整平方式，故f(x)有相等二实根

则判别式$\triangle=b^2-4ac=[3(p+q)]^2-4\times2\times4pq$

$=9(p^2+2pq+q^2)-32pq=9p^2-14pq+9q^2=0$

再证：$F(x)=(x+b)(x+c)+(x+c)(x+\alpha)+(x+\alpha)(x+b)$

$=x^2+(b+c)x+bc+x^2+(c+\alpha)x+c\alpha+x^2+(\alpha+b)x+\alpha b$

$=3x^2+2(\alpha+b+c)x+(\alpha b+bc+c\alpha)$

因F(x)为含x之整平方式，同理得：

$\triangle=b^2-4ac=[2(\alpha+b+c)]^2-4\times3\times(\alpha b+bc+c\alpha)$

$=4(\alpha+b+c)^2-12(\alpha b+bc+c\alpha)$

$=4(\alpha^2+b^2+c^2+2\alpha b+2bc+2c\alpha-3\alpha b-3bc-3c\alpha)$

$=4(\alpha^2+b^2+c^2-\alpha b-bc-c\alpha)=4[\alpha(\alpha-b)+b(b-c)+c(c-\alpha)]=0$

此式只有$\alpha=b=c$才能为0　∴　$\alpha=b=c$

2、解：设1的三次根为x，则$x^3=1$，$x^3-1=0$，$(x-1)(x^2+x+1)=0$

故$x_1=1$，　$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，　$x_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

证：$X_2^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=X_3$

又$X_3^2=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=x_2$

因n为整数，设$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$(k为整数)

当$n=3k$时

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}$$

$$=\left[\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right]^k+\left[\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right]^k=(1^3)^k+(1^3)^k=1^k+1^k=1+1\neq-1$$

当$n=3k+1$时

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+1}$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$=1\times\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)+1\times\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=-1$$

当$n=3k+2$时

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+2}$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$$=1\times\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+1\times\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=-1$$

故当n不为3之倍数时，无论n为任何整数，均有

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=1$$

3、解：(α)由(2)－(1)×2得：$y-2z=0$　　∴　　$y=2z$

将$y=2z$代入(1)，解之得：$x=z$　　∴　　$x:y:z=1:2:1$

解：(b)由(α)题的解法知，方程(1)与(2)所组成的方程组其未知数之比为：

$x:y:z=1:2:1$…………………………………………………………………（4）

即，$z=x$，$y=2x$，以此代入(3)得：$4x^3+3(2x)^3+x^3-x(2x)\cdot x=216$

$27x^3=216$，$x^3=8$，$x^3-2^3=0$，$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

解之得：$x_1=2$，$x_2=\dfrac{-2+\sqrt{2^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+\sqrt{3}i$

$x_3=-1-2\sqrt{3}i$

代入(4)得：$y_1=4$，　　$y_2=2(-1+\sqrt{3}i)=-2+2\sqrt{3}i$

$y_3=2(-1-\sqrt{3}i)=-2-2\sqrt{3}i$

$z_1=2$　　$z_2=-1+\sqrt{3}i$　　$z_3=-1-\sqrt{3}i$

$$\therefore\begin{cases}x_1=2\\y_1=4\\z_1=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=-1+\sqrt{3}i\\y_2=-2+2\sqrt{3}i\\z_2=-1+\sqrt{3}i\end{cases}\qquad\begin{cases}x_3=-1-\sqrt{3}i\\y_3=-2-2\sqrt{3}i\\z_3=-1-\sqrt{3}i\end{cases}$$

4、解：已知：在曲线$xy=\alpha^2$上通过点$M(x_o, y_o)$的切线与x轴及y轴分别相交于A点，与B点，

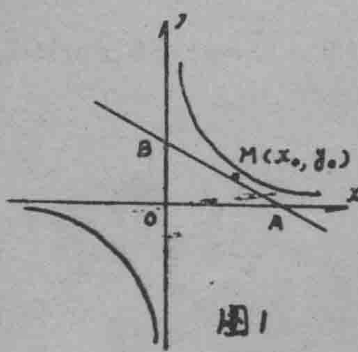

图1

求：$S\triangle AOB=?$

解法一：$xy=\alpha^2$，则在$M(x_o, y_o)$点处的切线方程为：

$$\frac{y_ox+x_oy}{2}=\alpha^2\quad 即\quad y_ox+x_oy=2\alpha^2$$

求坐标轴上的截距：当$y=0$时，$x=\dfrac{2\alpha^2}{y_o}$，

又$x=0$时，$y=\dfrac{2\alpha^2}{x_o}$，

则$S\triangle AOB=\frac{1}{2}|AO|\cdot|BO|$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha^2}{y_o}\times\frac{2\alpha^2}{x_o}=\frac{2\alpha^4}{x_o y_o}$$

因M点在曲线上，$x_o y_o=\alpha^2$，代入上式得：　$S\triangle AOB=\frac{2\alpha^4}{\alpha^2}=2\alpha^2$

解法二：△ABO的三个顶点坐标分别为：

$A\left(\frac{2\alpha^2}{y_o},\ 0\right)\quad B\left(0,\ \frac{2\alpha^2}{x_o}\right)\quad C(0,\ 0)$

$$S\triangle ABO=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{2\alpha^2}{y_o} & 0 & 1\\ 0 & \frac{2\alpha^2}{x_o} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha^2}{y_o}\times\frac{2\alpha^2}{x_o}=\frac{2\alpha^4}{x_o y_o}=\frac{2\alpha^4}{\alpha^2}=2\alpha^2$$

5、解：已知如左图所示，PM是通过抛物线$y^2=2Px(P>O)$之焦点F的割线（与曲线的交点为P，M）且与x轴成θ角。正焦弦$|AB|=L$

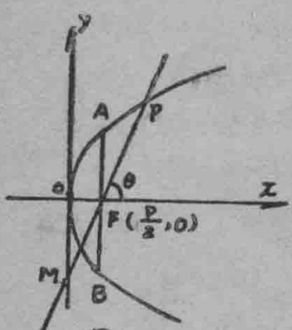

图2

求证：$|PM|=\frac{L}{\sin\theta}$

证：由$y^2=2Px$……………………………………(1)

得知焦点F的坐标为（$\frac{p}{2}$，0），即A、B两点的横坐标均为$\frac{P}{2}$，因A、B两点均在抛物线上，代入曲线方程得：

$y=\pm\sqrt{2px}=\pm\sqrt{2p\cdot\frac{p}{2}}=\pm P$，即A，B两点的纵坐标分别为P，$-P$，则$|AB|=2P$，所以，$L=2P$

割线PM的方程为：$y=\operatorname{tg}\theta\ (x-\frac{p}{2})$ ……………………………………(2)

解(1)，(2)组成的方程组：由(2)　$x=y\operatorname{ctg}\theta+\frac{p}{2}$……………………………(3)

将(3)代入(1)，　$y^2=2P(y\operatorname{ctg}\theta+\frac{p}{2})$

整理得：$y^2-2p\operatorname{ctg}\theta\, y-p^2=0$

故：$y=p\operatorname{ctg}\theta\pm\sqrt{(p\operatorname{ctg}\theta)^2-1\cdot(-p)^2}=p\operatorname{ctg}\theta\pm\sqrt{p^2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)}=p\operatorname{ctg}\theta\pm p\csc\theta$

即：$y_1=p(\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta)=p\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=p\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$

$y_2=p(\operatorname{ctg}\theta-\csc\theta)=p\left(\frac{-1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=-p\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

代入(3)得：$x_1=\frac{p}{2}+p\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$　　$x_2=\frac{p}{2}-p\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

∴　$|PM|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{P^2\text{ctg}^2\theta\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}+\text{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2+P^2\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}+\text{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=P\sqrt{\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}+\text{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2(\text{ctg}^2\theta+1)}$$

$$=P\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}+\text{tg}\frac{\theta}{2}\right)\csc\theta$$

$$=\frac{P}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{P}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2P}{\sin^2\theta}=\frac{L}{\sin^2\theta}$$

6、解： 证（α） 原式 $=3+4\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)$

$$=2(\cos^2\theta+2\cos\theta+1)=2(\cos\theta+1)^2\geq 0$$

（b） 右端 $=\dfrac{2^n\sin x}{2^n\sin x}\cos x\cos 2x\cdots\cdots\cos 2^{n-1}x$

$$=\frac{2^{n-1}(2\sin x\cos x)\cos 2x\cdots\cdots\cos 2^{n-1}x}{2^n\sin x}$$

$$=\frac{2^{n-1}\sin 2x\cos 2x\cdots\cdots\cos^{n-1}x}{2^n\sin x}=\frac{2^{n-2}(2\sin 2^1x\cos 2^1x)\cdots\cdots\cos 2^{n-1}x}{2^n\sin x}$$

$$=\frac{2^{n-2}\sin 2^2x\cos 2^2x\cdots\cdots\cos^{n-1}x}{2^n\sin x}$$

$$=\frac{2\sin 2^{n-1}x\cos 2^{n-1}X}{2^n\sin x}=\frac{\sin(2^nX)}{2^n\sin x}=\text{左端}$$

乙、丙组

1、解：左端 $=\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 故 $\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=0$ $\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\sin x=0$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)-\sin x=0$ $2\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right)=0$

则 $\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=0$ 和 $\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right)=0$

由 $\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=0$ 得 $\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+K\pi$

$$\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{8}-K\pi-\frac{\pi}{2} \qquad x=\frac{3}{4}\pi-2k\pi-\pi$$

∵ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ （已知） ∴ $K=-1$ $X=\frac{7}{4}\pi$

又由 $\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right)=0$， 得 $\frac{3\pi}{8}-\frac{3x}{2}=K\pi$， $\frac{3x}{2}=\frac{3\pi}{8}-K\pi$

故 $x=\frac{\pi}{4}-\frac{2k\pi}{3}$ ∵ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ （已知）

即只有 $K=0$ 或 $K=-1$ 时才有解：

$x_2=\frac{\pi}{4}=45^\circ$ $x_3=\frac{\pi}{4}-\frac{2(-1)\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}=165^\circ$

∴ 原三角方程的解是：$x=\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$

2、解：设此连续三整数为 $(x-1)$，x，$(x+1)$

根据题意得：$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=50$

化简 $(x^2-2x+1)+x^2+(x^2+2x+1)=50$。 $3x^2-48=0$

$3(x+4)(x-4)=0$ ∴ $x_1=4$， $x_2=-4$

故此连续三整数是3、4、5或－5，－4，－3

3、解一：$x^6=-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$

∴ $x=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{6}\right)$

$=2\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{2}\right)$

此外 $K=0$、1、2、3、4、5，

当 $K=0$ 时，得 $x_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$

当 $K=1$ 时，得 $x_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+i)=2i$。

当 $K=2$ 时，得 $x_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$

根据方程的复数共厄根定理，知此方程的其余三根为：

$x_4=-\sqrt{3}-i$ $x_5=-2i$ $x_6=\sqrt{3}-i$

故 $x^6+64=0$ 的根是：$\sqrt{3}\pm i$，$-\sqrt{3}\pm i$，$\pm 2i$

解二：$x^6+64=0$ 即 $x^6-(2i)^6=0$

分解因式：$[x^3-(2i)^3][x^3+(2i)^3]=0$

$(x-2i)(x^2+2ix-4)(x+2i)(x^2-2ix-4)=0$

从 $x-2i=0$， $x+2i=0$ 得 $x_1=2i$， $x_2=-2i$

从 $x^2+2ix-4=0$ $x_{3,4}=\frac{-2i\pm\sqrt{12}}{2}=-i\pm\sqrt{3}$

从 $x^2-2ix-4=0$ 得 $x_{5,6}=\dfrac{2i\pm\sqrt{12}}{2}=i\pm\sqrt{3}$

答案同上

4、解

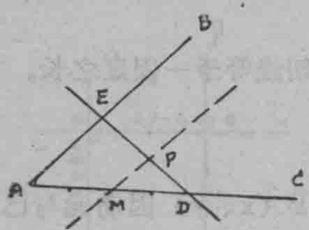

图3

已知：p为∠BAC内一点。

求作：过P点之直线，使其在A角之部分被P点平分。

作法：过P作PM∥AB，与AC相交于M，在AC上截取MD＝AM，过P、D两点作直线，与AB相交于E，则此直线DE即为所求（此题仅有唯一解）

证明：在△ADE中，由作法知：

AM＝MD　　PM∥AB

∴PD＝PE　　（三角形中位线定理）

5、解：

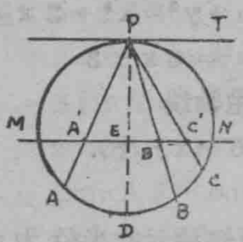

图4

已知：如左图所示，PA，PB，PC为⊙O之三弦，PT为切线割线MN∥PT与PA、PB、PC分别交于A′、B′、C′

求证：PA·PA′＝PB·PB′＝PC·PC′

证明：过切点P和园心O作直径PD与MN相交于E，连接AD

则∠PAD＝90°（直径上的园周角为直角）

∵MN∥PT（已知）

则∠PEA′＝∠EPT＝90°　　在直角△PAD和直角△PEA′中，

∠DPA＝∠A′PE（公共角）　　∠PAD＝∠PEA′＝90°

∴直角△PAD∽直角PEA′（两组角对应相等）　则$\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{FE}{PA'}$

故　PA·PA′＝PE·PD

同理可证：PB·PB′＝PE·PD　　PC·PC′＝PE·PD

故　PA·PA′＝PB·PB′＝PC·PC′

当MN与园相切和相离时，上面的证明同样成立。

二、北京大学

1、一动元与 $(x-2)^2+y^2=1$ 及y轴皆相切，求动元元心之迹轨方程。

2、用 $kxy-8x+9y-12=0$ 表示两条直线，求K之值及此两直线所夹之角。

3、若 $A+B+C=n\pi$，式中n为整数，证明：

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=(-1)^{n-1}4\sin A\sin B\sin C$$

4、在1，2，3，…………98，99，100共一百数内任意选出五十一个，证明，在此五十一

个数内，恒可找到两个数，其中一个为另一个之倍数。

5、证明 $(x^{2^0}+1)(x^{2^1}+1)(x^{2^2}+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)=\dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$

6、在△ABC的两边AB、AC上各取D、E点，使AD＝$\frac{1}{3}$AB，AE＝$\frac{1}{3}$AC，连接BE，CD相交于F点，证明△FBC的面积为△ABC之面积之半。

7、A、B、C为三个定点，求作一元通过A、B且从C到此元的切线等于一固定之长，

题解：

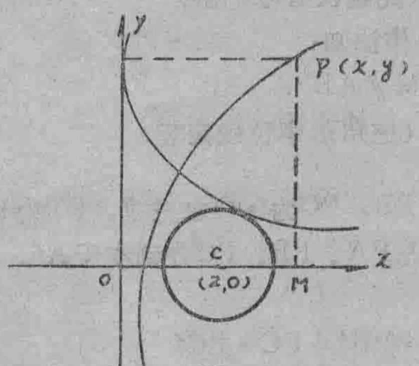

图5

1、(a) 外切时

解：设动元元心为P(x、y)因动元与已知元及y轴皆相切，可知动元的半径为x，两元心距离PC＝x＋1　　在直角△PCM中，

$CM^2+PM^2=PC^2$　　代入得

$(x-2)^2+y^2=(x+1)^2$

化简：$(x^2-4x+4)+y^2=x^2+2x+1$

$y^2=6x-3$

动元元心的轨迹方程为抛物线

$y^2=6(x-\frac{1}{2})$

(b) 内切元

设动元元心为P(x，y)，因动元与已知元及y轴皆相切，可知动元的半径为x，而元心距PC＝x－1

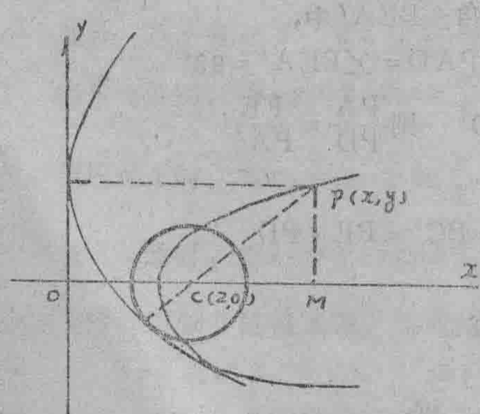

图6

在直角△PCM中

$CM^2+PM^2=PC^2$，代入得

$(x-2)^2+y^2=(x-1)^2$

化简：

$x^2-4x+4+y^2$

$=x^2-2x+1$

$y^2=2x-3$

动元元心的轨迹方程为抛物线

$y^2=2(x-\frac{3}{2})$

2、解：设原方程所表示的两条直线为 $Lx+my+n=0$ 和 $px+qy+\Upsilon=0$

则 $kxy-8x+9y-12=(Lx+my+n)(px+qy+r)$

$=Lpx^2+(Lq+mp)xy+mqy^2+(L\Upsilon+np)x$

$+(m\Upsilon+nq)y+n\Upsilon$

于是有：$Lp=0$，$Lq+mp=k$，$mq=0$

$L\gamma+np=-8 \qquad m\gamma+nq=9 \qquad n\gamma=-12$

解以上方程组得：$L=2 \qquad m=0 \qquad n=3$

$p=0 \qquad q=3 \qquad \gamma=-4 \qquad k=6$

所求两直线的方程为：$2x+3=0$和$3y-4=0$

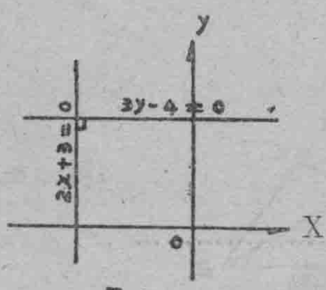

图-7

因前一直线平行于y轴，后一直线所平行于x轴直线，故此两夹之角为$\frac{\pi}{2}$。

3、解：证，当$n=1$时，$A+B+C=\pi$

左端$=\sin 2A+(\sin 2B+\sin 2C)=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin(\pi-A)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)$

$=2\sin A[\cos A+\cos(B-C)]=2\sin A\{\cos[\cos(B+C)]+\cos(B-C)\}$

$=2\sin A[-\cos(B+C)+\cos(B-C)]=2\sin A\cdot 2\sin B\sin C$

$=4\sin A\sin B\sin C=(-1)^{1-1}4\sin A\sin B\sin C$，原式成立。

当$n=2k$时（k为整数）$A+B+C=2K\pi$成立

左端$=\sin 2A+(\sin 2B+\sin 2C)=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin(2k\pi-A)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A-2\sin A\cos(B-C)=2\sin A[\cos A-\cos(B-C)]$

$=2\sin A\{\cos[2k\pi-(B+C)]-\cos(B-C)\}$

$=2\sin A[\cos(B+C)-\cos(B-C)]=2\sin A(-2\sin B\sin C)$

$=-4\sin A\sin B\sin C=(-1)^{2K-1}4\sin A\sin B\sin C$

当$n=2K+1$时（k为整数）$\qquad A+B+C=(2k+1)\pi$

$A=(2k+1)\pi-(B+C)=2k\pi+[\pi-(B+C)]$

$B+C=(2k+1)\pi-A=2k\pi+(\pi-A)$

左端$=\sin 2A+(\sin 2B+\sin 2C)=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin[2k\pi+(\pi-A)]\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin(\pi-A)\cos(B-C)=2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)$

$=2\sin A[\cos A+\cos(B-C)]$

$=2\sin A\{\cos[2k\pi+(\pi-\overline{B+C})]+\cos(B-C)\}$

$=2\sin A\{\cos[\pi-(B+C)]+\cos(B-C)\}$

$=2\sin A[-\cos(B+C)+\cos(B-C)]=2\sin A(2\sin B\sin C)$

$= 4\sin A\sin B\sin C = (-1)^{(2k+1)-1} 4\sin A\sin B\sin C$

故原式在n为一切整数时成立。

4、解：证：设任选的51个数为x_1，x_2，x_3……………x_{51}其中每一个数X_i都可以写成

$X_i = 2^n t_i$，此处t_i为奇数，n是正整数或0，即：

当X_i为奇数时，$n = 0$，$X_i = 2^0 t_i = 1 \times t_j = t_j$

又X_i为偶数时，n为正整数。

例如：$X_i = 2$，即$n = 1$，$t_i = 1$，$2^1 \times 1 = 2$

$Xi = 24$，即$n = 3$，$t_i = 3$，$2^3 \times 3 = 24$

……………………………………………………………………

因1、2、3…………100共100个数中总有50个奇数

故t_1、t_2、t_3………t_{51}等51个奇数中必有重复的

例如：$X_i = 20$，即$n = 2$，$t_i = 5$，$2^2 \times 5 = 20$

$X_i = 40$，即$n = 3$，$ti = 5$，$2^3 \times 5 = 40$

……………………………………………………………………

设其中第h个与第k个的t_i重复（$h \neq k$）

则 $t_h = t_k = t_i$，$X_h = 2^n t, X_k = 2^m t$ （m、n为正整数或0）

因 $X_h \neq X_k$，即$2^n t \neq 2^m t$，从而$n \neq m$

$\therefore \dfrac{X_h}{X_K} = \dfrac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}$ $\qquad X_h = 2^{n-m} x_k$

即x_h与X_k是倍数关系，于是得证。

5、解：证：左边$= \dfrac{(X-1)}{X-1}(X^{2^0}+1)(X^{2^1}+1)(X^{2^2}+1)\cdots\cdots(X^{2^n}+1)$

$= \dfrac{1}{X-1}\Big[(X-1)(X+1)\Big](X^{2^1}+1)(X^{2^2}+1)\cdots\cdots(X^{2^n}+1)$

$= \dfrac{1}{X-1}\Big[(X^{2^1}-1)(X^{2^1}+1)\Big](X^{2^2}+1)\cdots\cdots(X^{2^n}+1)$

$= \dfrac{1}{X-1}\Big[(X^{2^2}-1)(X^{2^2}+1)\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(X^{2^n}+1)$

$=$ ……………………………………………………………

$$=\frac{1}{X-1}(X^{2^n}-1)(X^{2^n}+1)=\frac{1}{X-1}(X^{2\cdot 2^n}-1)$$

$$=\frac{X^{2^{n+1}}-1}{X-1}=\text{右端}$$

6、解：

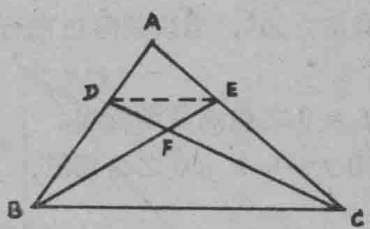

图 8

已知：如左图所示，$AD=\frac{1}{3}AB$

$AE=\frac{1}{3}AC$

求证：$\triangle FBC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

证：连接DE，则$\triangle ADE\sim\triangle ABC$

$DE=\frac{1}{3}BC$

$\because\ AD=\frac{1}{3}AB$

$\triangle ADE=(\frac{1}{3})^2\triangle ABC=\frac{1}{9}\triangle ABC$

在△CAD和△ABC中，以C为顶点，高相等　　$\triangle CAD=\frac{1}{3}\triangle ABC$

$$\triangle CDE=\triangle CAD-\triangle ADE=\frac{\triangle ABC}{3}-\frac{\triangle ABC}{9}=\frac{2}{9}\triangle ABC$$

又$\because$ $DE\parallel BC$，则$\triangle FDE\sim\triangle FBC$　　$\frac{DF}{FC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $FC=3DF=3(DC-FC)=3DC-3FC$，$4FC=3DC$，$FC=\frac{3}{4}DC$

在△EFC和△EDC中，以E为顶点，高相等

$\triangle EFC=\frac{3}{4}\triangle EDC=\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}\triangle ABC=\frac{1}{6}\triangle ABC$

又$\because$ $EC=\frac{2}{3}AC$，在△BCE和△BAC中，以B为顶点，高相等　$\triangle BCE=\frac{2}{3}\triangle ABC$

故　$\triangle FBC=\triangle BCE-\triangle EFC=\frac{2\triangle ABC}{3}-\frac{\triangle ABC}{6}=\frac{1}{2}\triangle ABC$

7、解：已知：A、B、C三定点及定长线段α

求作：⊙O通过A、B两点，且从C到⊙O的切线等于α

作法：（1）连接AC；

（2）作线段AC、α、α的第四比例线段b；（$CA:\alpha=\alpha:b$）

（3）在AC上取D点，使$CD=b$

（4）过A、B、D三点作元O，则⊙O即为所求

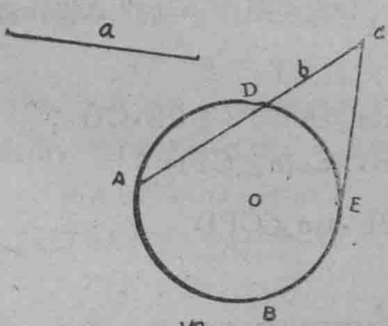

图 9

证明：由C向⊙O作切线CE

$\because$ $CE^2=CA\times CD=CA\cdot\frac{\alpha^2}{CA}=\alpha^2$

$\therefore$ $CE=\alpha$

即⊙O为所求者

讨论：如C点在线段AB上，此时C在元内，则无解。