# 数学分析

## 第三册

周民强　方企勤　编著

科学出版社

# 数学分析

## 第三册

周民强　方企勤　编著

科学出版社
北京

# 内 容 简 介

本书讲述的是高等数学的基础内容——数学分析，其核心内容是微积分学，全书共三册. 本书为第三册，共分七章，包括多元函数及其极限、连续性，多元函数的微分学(一)，多元函数的微分学(二)，含参变量的积分，重积分，曲线积分与曲面积分，各种积分之间的联系、场论初步.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义基础上修改而成，内容丰富、深入浅出. 对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题，本书以加注的形式予以解说，以利于读者更好地接受新知识. 在章末附有后记，意在为读者更清楚地了解知识背景，更迅速地提高数学能力创造条件. 本书选用适量有代表性、启发性的例题，还选入足够数量的习题和思考题. 习题和思考题中，既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做.

本书可作为大学本科阶段的数学、概率统计、应用数学、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析. 第3册/周民强，方企勤编著. —北京：科学出版社，2014. 12
ISBN 978-7-03-042500-3

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①周…　②方…　Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材
Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 268492 号

责任编辑：姚莉丽/ 责任校对：刘亚琦
责任印制：霍　兵/ 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014年12月第 一 版　开本：720×1000 1/16
2014年12月第一次印刷　印张：18 1/2
字数：372 000
**定价：42.00元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

本教材的前身是北京大学数学科学学院教学讲义，2002 年由上海科学技术出版社出版发行. 2014 年在科学出版社的鼓励下，经修订后再版发行. 在撰稿的进程中，以下五个方面是作者着重思考并力图落实的：

(1) 加强导引性论述，适当介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法. 这或许有益于树立正确的数学观，增加学习的活泼性.

(2) 适当提高起点，扩大知识面. 书中在讲解各种理论的应用时，列举了丰富的典型例题，以利于在提高启发式教学水平的同时，让学生有一个扩展的自学园地.

(3) 为了培养学生数学思维的习惯，使学生养成“会学”数学的能力，本书在每章节后列有适当数量的思考问题. 此外，还以加注、用小字和后记的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项，这有助于引发读者的创新思维.

(4) 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一，本书一律用原文书写(在脚注中给出中文译名供参考)，并尽力介绍他们的国籍和生卒年代. 尊重那些曾为人类科学进步作出过贡献的学者，是我们后代人文明的表现之一.

(5) 对于想用本书作为正式教材的学校和教师，在教学实践中必须依据培养目标和实际情况对其内容作适当取舍，不能照本宣科，特别是对带有 * 标记的内容. 在这里，还希望广大读者和教师对本书提出批评和建议.

作　者[①]

2014 年 2 月

---

① 本书(第三册)原由方企勤主写(现已去世). 这次再版由周民强做了较多修改和补充. 为便于操作，兹采用现在的署名方式.

# 致 读 者

《数学分析》的核心内容是"微积分"——微分学与积分学的统称，它是数学发展史中最伟大的成果，始创于17世纪下半叶，其代表人物是两位著名的学者：英国的I. Newton(1643～1727)和德国的G. W. Leibniz(1646～1716).

Newton和Leibniz对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同，他们两个使微积分学成为一门独立的学科，而不再是古希腊几何的附庸和延续，且为许多课题提供了崭新的研究方法. 自微积分始，数学发展成为以变量数学为中心的时期. 微积分从运动、变化的观点和方法来考察各种事物和现象，这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际. 因此，微积分的建立给予科学、技术领域巨大的影响，推动了生产力的发展. 特别是在天文学、力学方面的成就，在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条. 但另一方面，也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难，但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期，由于科学技术进步的推动，促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作，终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系，为微积分的普及创造了更加有利的条件，也使它成为今天众多院校的必修课程.

因此，在三百余年后的今天，学习微积分已不能算是件"时髦"的事情了. 如果从培养21世纪的人才而言，或许只能说是一张"入门券"而已.

学习微积分课程的目的有三：一是可应用于实际课题的计算；二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力；三是要为学习其他课程奠定基础.

本册介绍多元函数微积分内容，与一元函数微积分相比较，其内容有共性也有差异. 从共性看，它们都是研究函数的性态，而且在方法上也都主要是从局部入手，从而在体系上仍为同一的格式：极限—连续—微分—积分. 另一方面，由于多元函数所依赖的自变量多了，致使许多课题的研究复杂化了，自然也导致所得结果在某些方面更加深刻和丰富. 不过，本册也只能点到为止. 最后必须指出的是，掌握一元微积分的知识是学好多元微积分的基础.

怎样才能学好数学？首先是要对它有兴趣，爱好数学. 谈到学习方法，人们公认的是勤思考、多练习，善于总结、会提问题，以及有一个锲而不舍的精神. 至于说捷径，正如著名的数学教育家Polya(波利亚)所说的，我们不可能制定一种最有效

的思维方法,思维能力的培养只有通过思维训练才能获得.说得绝对一些,如果有一种“万能”的手段可以解决一切问题,那么这门科学不也就没有生命力了吗?!

自然,这并不等于说,学习就没有方法可循了.对正确理解微积分的思维,掌握其逻辑推演的步骤,作者在这里提出下列六种有着对立关系的对象和判定.建议读者在学习过程中着重加以辨清和熟悉.

(1) 设定的条件是充分的还是必要的!

(2) 量与量之间是相关的还是无关的!

(3) 某个量在运算过程中是常量还是变量!

(4) 运算过程是有限的还是无限的!

(5) 语句陈述是肯定的还是否定的!

(6) 不同语句的陈述谁在先谁在后!

*　　*　　*

学问者,学习,问难也.业精于勤,荒于嬉.

# 目　录

# 绪论　多元函数微积分史简介

在自然界和社会中，各种事物和现象的运动、变化往往与多种因素密切相关，这就使得其数量之间的关系呈现多元化，反映在数学里就有了多个自变量的函数.

多元函数的微分运算，早在 18 世纪初期的科学研究中就已出现，如 Newton（研究多项式方程 $f(x,y)=0$）和 Bernoulli 兄弟（研究等周问题）都用了偏导数. 不过，创建偏导数理论还应归功于 Euler，Clairaut 和 D'Alembert，其主要动力是来自偏微分方程领域的工作. 这是因为课题本身所含的物理意义要求考察只有单个自变量变化的情形.

要求建立多元函数重积分的意识，实际上也早已蕴涵在 Newton 的名著《自然哲学的数学原理》关于球与球壳作用于质点上的引力的研究成果中，虽然他当时用的是几何学的语言. 而当微积分的理论在 18 世纪广泛开展起来时，Newton 的这一成果立刻被后人用分析数学的形式加以改写并推广. 不仅如此，重积分的思想还被用来表示方程

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$$

的解.

重积分变量替换的课题，是从 Lagrange 关于旋转椭球体的引力计算中引发的，由于他在三重积分的计算中遇到了困难，便引进了变量替换公式

$$\begin{cases} x=a+r\sin\varphi\cdot\cos\theta, \\ y=b+r\sin\varphi\cdot\sin\theta, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \\ z=c+r\cos\varphi, \end{cases}$$

这实际上相当于用微分量 $r^2\sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$ 代替微分量 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

总的说来，在 18 世纪初人们所处理的重积分都是比较简单的，化重积分为累次积分来计算的课题并未引起足够的重视. 即使在 1770 年左右，Euler 曾涉及这一领域，但有关这一积分次序的交换课题，也只是到了 19 世纪在分析基础严密化思潮的推动下，才受到人们的关注. 其中原因之一是，1814 年法国数学家 Cauchy 指出，如果被积函数不连续，那么计算重积分时，积分的先后次序是至关重要的，特别是在函数无界时，下述两个积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y, \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

不一定相等.

大家知道，对于在定义域上的可微函数，其导函数在定义域上的积分值与原函数在定义域边界上的值有着紧密的联系．在一维的情形时，一元函数的 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

就是这一事实的表现．而反映在多维空间的多元函数的微积分理论中，正是著名的 Green 公式，以及相继的 Gauss 公式和 Stokes 公式．当然，这些极重要的成果的获得是始于物理学课题的深入探讨，其核心是位势理论的展开．例如，Green 的工作就是旨在把位势函数的概念移用到电磁学的研究中．自学成才的 Green 是沿欧洲大陆工作路线前进的第一个英国数学家，在他的影响下，形成了剑桥强大的数学物理学派，其中包括 W. Thomson，G. Stokes，Rayleigh 以及 C. Maxwell.

# 第 13 章　多元函数及其极限、连续性

## 13.1　多元函数的概念

### 13.1.1　背景

我们已经学过一元实值函数 $y=f(x)$，即数值 $y$ 只依赖于一个变量 $x$ 的情形. 然而，无论是自然界，还是在社会活动和科学研究中，经常遇到或从中提炼出的数量不是由单个因素(或变量)所能决定的，而是与多种因素(多于一个变量)有关，并且这些因素之间没有内在联系(多个变量是互相独立的).

**例 1**　圆柱体的体积 $V$ 的数值是由底半径 $r$，高 $h$ 两个独立的自变量所决定的：$V=\pi r^2 h$.

**例 2**　电路中的电压 $V$ 与线路的电阻及电流 $I$ 满足关系式 $V=RI$，或写成 $I=V/R$.

**例 3**　影响一个圆锥体体积 $V$ 的值有上底半径 $r$，下底半径 $R$，高 $h$ 三个量：$V=\pi h(R^2+Rr+r^2)/3$.

如果再用数学符号来概括，如例 1 中用 $x,y$ 表示 $r,h$，用 $z$ 表示 $V$，那么可写成 $z=\pi x^2 y$；如例 3 中用 $u$ 表示 $V$，$x,y,z$ 代替 $R,r,h$，那么可写成 $u=\pi z(x^2+xy+y^2)/3$.

上述范例提示我们，必须从更一般抽象的角度出发去研讨由两个、三个(或更多)独立的自变量构成的函数：$z=f(x,y)$，$u=f(x,y,z)$ ($u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$) 等. 它们统称为多元函数. 在给出多元函数的一般定义之前，还需先谈一谈它们的定义域问题(虽然在某些具体课题中，自变量变动范围是自明的).

### 13.1.2　多元函数的定义及其几何表示

1. 多元函数的定义

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，自变量 $x,y$ 的变动在二维坐标平面内进行，成为一个动点，常以 $P:(x,y)$ 表示. 点 $P$ 按要求所达到而形成的点的全体成为一个点集 $E$(也用记号 $D,G,B,I$ 等). 若限定点 $P$ 变动的条件记为 $J(x,y)$，那么满足 $J(x,y)$ 的点 $(x,y)$ 所形成的点集常记为

$$E=\{(x,y):J(x,y)\}.$$

例如，单位开圆(不计边界)为 $B=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$；闭矩形记为 $I=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$(也记为 $[a,b]\times[c,d]$)；第一(正)象限为 $E=\{(x,y):x>0,$

$y>0\}$.

类似地，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 定义在三维空间内，点 $(x,y,z)$ 满足条件 $J(x,y,z)$ 形成的点集记为

$$E=\{(x,y,z):J(x,y,z)\}.$$

例如，半径为 $r$ 的闭球体 $E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$；第一（正）卦限为 $E=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}$（不计及边界（正平面）$x=0,y=0,z=0$）.

现在，我们可以给出多元函数的定义了，并以二元函数为例，其余类推.

**定义 13.1** 若对于二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 中的一个点集 $E$ 中的每一点 $P:(x,y)$，可依确定的法则 $f$（亦称变换、映射）唯一地对应出一个实值 $z$，则（应）变量 $z$ 称为（自）变量 $x,y$ 在 $E$ 上的二元函数，其间的关系记为 $z=f(x,y)$. 值域（$z$ 值的范围）常记为 $f(E)$ 或 $R(f)$.

与一元函数类似，多元函数也常以复合的形式出现.

若在式 $z=f(u,v)$ 中，$u$ 和 $v$ 本身又是自变量 $x,y$ 的函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则称

$$z=f(u,v)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=F(x,y)$$

为 $x$ 与 $y$ 的一个复合函数. 例如，$z=F(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$ 是函数 $z=f(u,v)=\mathrm{e}^u\sin v$ 与 $u=\varphi(x,y)=xy$，$v=\psi(x,y)=x+y$ 的复合函数. 自然，函数的复合必须注意定义域. 如函数 $f(\cdot,\cdot)$ 的定义域是 $D$，$\varphi(\cdot,\cdot)$ 与 $\psi(\cdot,\cdot)$ 的公共定义域是 $E$，且它们的值域含于 $D$ 中，则复合函数 $f(\varphi(\cdot,\cdot),\psi(\cdot,\cdot))$ 的定义域是 $E$.

从集合论的观点看问题，函数概念是映射的特定情形：设 $X,Y$ 是两个集合，其间存在着一种对应关系，记作 $f$. 对 $X$ 中每一个元素 $P$，根据对应规则 $f$，$Y$ 中有唯一的元素 $Q$ 与之对应，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的一个映射. 记作 $f:X\to Y$，$Q=f(P)$，且称 $X$ 为 $f$ 的定义域，$Y$ 为 $f$ 的取值域，$f(X)=\{Q:Q=f(P),P\in X\}$ 为值域. 若对 $P_1\neq P_2$，有 $f(P_1)\neq f(P_2)$（或 $f(P_1)=f(P_2)$ 时必有 $P_1=P_2$），则称映射 $f$ 为单射（或单叶）. 若 $f(X)=Y$，则称 $f$ 为满射. 若 $f$ 是单射且是满射，则称 $f$ 为 $X$ 到 $Y$ 的双射.

### 2. 多元函数的几何表示

我们知道，一元函数 $y=f(x)$ 的图像是一条平面曲线，这种几何表示对研讨函数的性态和加深理解有着重要的作用. 类似地，描述多元函数的几何表示也有同样的重要性. 现以二元函数为例示意如下.

如图 13-1 所示，设定用 $x,y,z$ 三个直线为轴的直角坐标系，且在 $Oxy$ 平面内将函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 $E$ 中一点 $P:(x,y)$ 的上方标出以 $z$ 为第三个坐标的点 $M:(x,y,z)$. 当动点 $(x,y)$ 遍及定义域 $E$ 时，点 $(x,y,z)$ 就会在三维空间中描绘出一个"曲面"，我们称它为此二元函数的几何图像. 注意到在解析几何中，空间曲

面可用二元函数(或函数方程)来表示,那么,在二元函数与空间曲面之间就有着一种互逆的对应关系.

**例 1** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,定义域为 $E=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$,其几何图形是:以 $Oxy$ 平面上原点为心,半径为 1 的上半球面(即球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半个,见图 13-2).

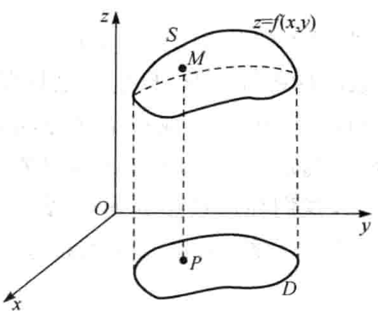


图 13-1

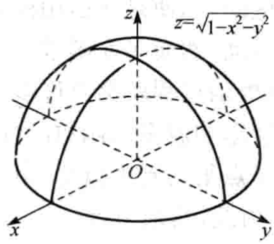


图 13-2

**例 2** $z=x^2+y^2$,定义域为整个 $Oxy$ 平面. 图形是三维上半空间中的旋转曲面(图 13-3).

**例 3** $z=x^2-y^2$,定义域为整个 $Oxy$ 平面,图形是一个马鞍面(图 13-4).

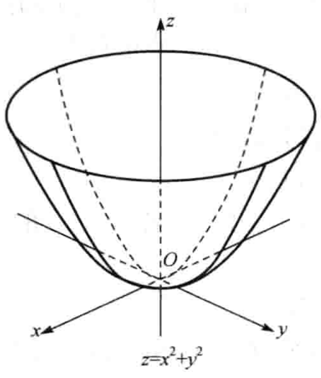


图 13-3

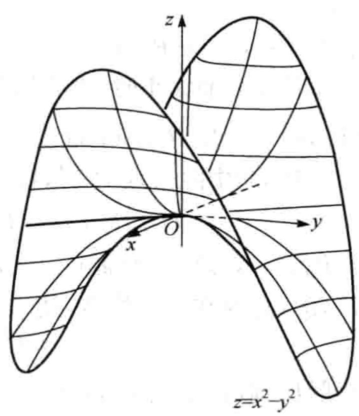


图 13-4

**注** 二元函数除用曲面表示外,也可用平面上一系列等位线来表示. 称平面点集

$$\{(x,y)\mid f(x,y)=C\}$$

为曲面 $z=f(x,y)$ 的**等位线**或**等高线**,它是垂直于 $z$ 轴的平面 $z=C$ 与曲面

$z=f(x,y)$的交线在 $Oxy$ 平面上的投影. 通常取一系列等距的 $C$ 值,在平面上画出这些等高线,根据等高线的疏密分布,可以想象出曲面的大致形状.

三元函数 $u=f(x,y,z)$是四维空间中的点集,用等位面的方法可以给出它在三维空间中的几何表示.

### 13.1.3　点集范例、基本性质

一元函数 $y=f(x)$的自变量是在一条直线上变化的,其定义域常为一直线段——区间,即使是在运用极限思想考察函数的局部性态时,自变量也只有向左或向右的活动. 然而多元函数则不同,它的多个自变量可独立地在不同方向上变动,因此,其极限过程就会有许多不同的途径,函数的定义域也将出现多种情景. 这些变化直接影响着多元函数的性态. 基于这一点,我们在展述多元函数理论之前,将其中定义点集的基本概念、事实和典型在这里作一介绍,并以二元函数与二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 为例,其余类推.

1. 邻域、点列极限

设 $P_1:(x_1,y_1)$,$P_2:(x_2,y_2)$是平面 $\mathbf{R}^2$ 内的两点,则该两点之间的距离记为

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2};$$

两点之和记为 $P_1+P_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$;设 $t$ 是实数,对点 $P:(x,y)$,记 $tP=(tx,ty)$.

设 $P_0:(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,则以 $P_0$ 为中心,$\delta>0$ 为半径的开圆称为点 $P_0$ 的一个 $\delta$ 邻域(在不计及 $\delta$ 的大小时,也简称为邻域),记作($P:(x,y)$为点的代表)

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^2:d(P,P_0)<\delta\}=\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

当邻域 $U(P_0,\delta)$中除去点 $P_0$时,称为点 $P_0$的空心邻域,记作

$$U_0(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^2:0<d(P,P_0)<\delta\}.$$

设$\{P_n:(x_n,y_n)\}$为平面上一点列,$P_0:(x_0,y_0)$为一定点. 若对 $P_0$点的任意邻域 $U(P_0,\delta)$,总存在正整数 $N$,使得

$$P_n\in U(P_0,\varepsilon),\quad n>N,$$

则称点列$\{P_n\}$收敛于点 $P_0$,或称 $n$ 趋于无穷时,点列$\{P_n\}$有极限点 $P_0$,记作

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0,\quad P_n\to P_0\quad(n\to\infty).$$

此外,由不等式

$$\left.\begin{array}{l}|x_n-x_0|\\|y_n-y_0|\end{array}\right\}\leqslant\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$$
$$\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|$$

可看出点列$\{P_n\}$收敛于点 $P_0$的充分必要条件是:实数序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于

$x_0$和 $y_0$.

容易证明,若点列$\{P_n\}$有极限点,则极限点 $P_0$必唯一,且$\{P_n\}$有界,即存在常数 $M$,使对所有的 $n$,有

$$d(P_n,0)\leqslant M;\quad |x_n|\leqslant M,|y_n|\leqslant M.$$

2. 开集、闭集、区域

与一元函数不同的是,平面点集中的基本类型在研究多元函数的性态中有着特定的作用,其状态也具多样性.

设 $E$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个点集,则 $\mathbf{R}^2$ 中的一个点 $P:(x,y)$与 $E$ 的关系可分为三种情形:

(Ⅰ) $P\in E$ 且存在$\delta>0$,使得$U(P,\delta)\subset E$,则称 $P$ 是集合 $E$ 的内点. $E$ 中所有内点的全体称为 $E$ 的内核,记作 $\mathring{E}$. 例如,闭圆盘 $E=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$的内核是开圆 $\mathring{E}=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$. $\mathbf{R}^2$ 中全体有理点形成的集合,其内核为$\varnothing$(空集).

(Ⅱ) $P\bar{\in}E$,即存在 $\delta>0$,使得 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$,此时称 $P$ 是 $E$ 的外点.

(Ⅲ) 若对任给 $\delta>0$,$U(P,\delta)$中既有 $E$ 中的点,也有不属于 $E$ 的点,则称点 $P$ 为 $E$ 的边界点,$E$ 的全体边界点记为$\partial E$,称为 $E$ 的边界. 显然,$E$ 的边界点有的可以属于 $E$,也有的不属于 $E$. 例如

$$E=\{(x,y):x^2+y^2<1\},\quad \partial E=\{(x,y):x^2+y^2=1\},$$

$$E=\{(x,y):x,y\text{ 均为有理数}\},\quad \partial E=\mathbf{R}^2.$$

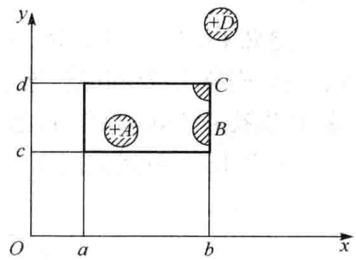


图 13-5
矩形区域的内点 $A$,外点 $D$
和边界点 $B$,$C$

若 $E=\mathring{E}$,即集合 $E$ 的点都是内点,则称 $E$ 为**开集**. 容易证明邻域 $U(P_0,\delta)$是一开集. 因为空集的内核是空集,$\mathring{\varnothing}=\varnothing$,所以空集是开集. 关于开集有下列性质:$\mathbf{R}^2$ 与$\varnothing$是开集;有限个开集的交集是开集;任意个开集的并集是开集.

设 $P_0\in\mathbf{R}^2$,若任给 $\delta>0$,总有$\mathring{U}(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$,即 $P_0$点的空心邻域内总有 $E$ 的点,则称 $P_0$是 $E$ 的**聚点**. $E$ 的聚点可以属于 $E$,也可以不属于 $E$. 在 $\mathbf{R}^2$ 中,$E$ 的内点一定是 $E$ 的聚点.

若 $P_0\in E$,存在 $\delta>0$,使 $U_0(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$,则称 $P_0$是 $E$ 的**孤立点**. 不是孤立点的边界点一定是 $E$ 的聚点.

**定理 13.1** 点 $P_0$是集合 $E$ 的聚点的充分必要条件是:在 $E$ 中存在收敛于 $P_0$的互异点列$\{P_n\}$:$P_n\to P_0(n\to\infty)$.

**证明** 充分性显然. 证必要性. 取 $\delta_1=1$,由 $\mathring{U}(P_0,1)\cap E\neq\varnothing$,存在 $P_1\in\mathring{U}(P_0,1)\cap E$. 令 $\delta_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},d(P_1,P_0)\right\}>0$,由 $\mathring{U}(P_0,\delta_2)\cap E\neq\varnothing$,存在 $P_2\in\mathring{U}(P_0,$