胡盛斌 著

非线性多关节机器人系统滑模控制

Sliding Mode Control for Nonlinear Multi Joint Robot System

国防工业出版社
National Defense Industry Press

非线性多关节机器人系统滑模控制

胡盛斌　著

国防工業出版社

·北京·

内容简介

本书是关于非线性多关节机器人系统滑模控制的一部专著，主要是基于滑模控制理论对多关节机器人轨迹跟踪控制进行分析研究，是作者多年来从事控制系统教学和科研成果的总结。全书共分7章，内容包括：滑模控制理论、抖振问题以及在机器人控制中的应用和研究进展；多关节机器人系统动力学建模与分析；多关节机器人系统反馈线性化积分滑模控制方法、双模糊滑模控制方法、神经模糊滑模控制方法、终端模糊滑模控制方法以及四种控制方法的比较分析。本书重视理论分析与仿真实验相结合，所提控制方法注重工程实际应用。

本书可作为从事机器人控制、机械电子以及自动化等领域的科研工作者、工程技术人员、高校教师和研究生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性多关节机器人系统滑模控制 / 胡盛斌著. — 北京：国防工业出版社，2015.3

ISBN 978-7-118-09972-0

Ⅰ.①非... Ⅱ.①胡... Ⅲ.①多关节机器人-非线性控制系统 Ⅳ.①TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 034933 号

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 880×1230 1/32 **印张** 5½ **字数** 154 千字

2015年3月第1版第1次印刷 **印数** 1—2000册 **定价** 38.00元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

机器人是多学科交叉的产物，它综合了机械工程、控制工程、信息工程、人工智能、传感技术等多学科技术，其应用发展水平已成为衡量一个企业乃至国家技术水平的重要指标，是当代最真正意义上的自动化。当前，机器人已经被广泛应用到各行各业，从人们的日常生活、工农业生产到海洋探测、太空探测，机器人都发挥着越来越重要的作用。尤其是作为工业应用机器人主体的多关节机器人更是具有广阔的应用前景和应用价值。随着机器人应用领域的不断扩大，人们对机器人的要求也日益提高，特别是对处于机器人核心地位的控制系统的设计要求也越来越高。因此，研究高性能的机器人控制方法是一项重要课题，也是机器人研究的一个重要研究方向。

滑模控制作为非线性控制的一个有效设计方法，一直以来都是学者们的研究热点。特别是近 20 多年来，如何将模糊控制、神经网络等与滑模控制相结合形成综合控制，以及探索新型的滑模控制已成为控制界公认的一个非常有前途的研究领域。

多关节机器人是一个典型的机电一体化系统，从工程控制角度来看是一个典型的强耦合、不确定的非线性系统，要对其进行高性能控制是比较困难的。滑模控制由于对不确定性扰动具有不变性以及不需要对多输入多输出的被控系统内部解耦等突出优点而非常适合于多关节机器人的控制。为此研究多关节机器人的高性能滑模控制问题具有重要的理论意义和实用价值。

本书是作者多年来对多关节机器人滑模控制研究工作的总结。全书共分 7 章，以多关节机器人为被控对象，以滑模控制为基本控制方法，结合李雅普诺夫稳定性理论、反馈线性化理论、模糊控制理论、神经网络控制理论、非线性系统理论等，研究了多关节机器人这种典型的多

输入多输出非线性不确定性系统的轨迹跟踪控制问题。第1章为绪论,主要介绍了滑模控制的基本原理,并对滑模控制理论的研究进展、抖振问题以及在机器人控制中的应用进行了概述。第2章主要介绍了多关节机器人的位姿表示、齐次变换、动力学建模及其特性,为后续章节的控制方法研究提供了动力学模型基础。第3章在设计反馈线性化和常规滑模控制方法的基础上,把反馈线性化方法和积分滑模控制相结合,提出了一种反馈线性化积分滑模控制方法。第4章将模糊系统和滑模控制有效地结合起来,提出了一种双模糊滑模控制方法。第5章将径向基神经网络、模糊系统和滑模控制结合起来,提出了一种具有径向基神经网络逼近器的模糊滑模控制方法。第6章在设计常规终端滑模控制和非奇异终端滑模控制的基础上,将模糊系统和终端滑模控制结合起来,提出了一种快速终端模糊滑模控制方法。以上控制方法均采用李雅普诺夫定理证明了系统的稳定性,并针对典型空间三关节机器人进行了仿真验证研究。第7章对本书研究的几种控制方法进行了比较分析,讨论了各自的优缺点以及适用条件。

在本书出版之际,衷心感谢我的导师陆敏恂教授,从选题到课题的每一个进展都倾注着导师的心血。导师敏锐的洞察力、渊博的知识、创新的学术思想为我指引了研究方向;导师一丝不苟的治学态度、平易近人的工作作风和优秀的人格魅力使我受益匪浅,终生难忘。特别感谢徐宝富教授、李万莉教授、周奇才教授、米智楠副教授在课题研究过程中给予的指导和帮助。感谢黄克博士、来鑫博士、蒋佳博士、羊衍贵博士以及各位同事给予的无私帮助。同时,本书参考了大量的相关文献,在此对这些参考文献的作者深表感谢。

由于作者的水平和经验有限,书中难免有不妥与疏漏之处,恳请广大读者和专家批评指正。

作者

2015年1月于上海工程技术大学

目 录

第1章 绪 论

滑模控制(又称变结构控制)是苏联学者 Utkin 和 Emeleyanov 等在20世纪50年代提出的一种控制方法,与其他控制方法不同之处在于系统的“结构”并不固定,而是根据系统当前的状态有目的地不断变化,使系统按照预定的“滑动模态”的状态轨迹运动;其本质上是一类特殊的非线性控制,其非线性表现为控制的不连续性,即使控制系统结构随时间变化的开关特性[1-4]。由于滑动模态可以进行设计,且与系统的参数摄动和外界扰动无关,所以滑模控制具有较好的鲁棒性,因而受到了各国学者的广泛关注,许多有影响的学术刊物都相继出版了有关滑模控制的专题特刊[5-8]。自20世纪80年代以来,随着计算机、信息技术等的迅速发展,滑模控制理论和应用研究进入了一个崭新阶段。以微分几何为主要工具发展起来的非线性控制思想极大地推动了滑模控制理论的发展。所研究的控制对象涉及到线性与非线性系统、连续与离散系统、确定性与不确定性系统、分布系统、广义系统、滞后系统以及非完整动力学系统等众多复杂系统。近年来,滑模控制在机器人、电机伺服、飞行器等复杂的非线性系统中得到了广泛的应用和发展[9-13]。但是,滑模控制存在一个较为严重的缺点,就是当状态轨迹到达滑模面后,难于严格地沿着滑模面向平衡点滑动,而是在滑模面两侧来回穿越,从而产生抖振。抖振的存在很容易激发系统的未建模特性,恶化控制性能,甚至造成系统不稳定,导致难于应用到工程实际中[14-16]。近年来,不少研究者把滑模控制和其他诸如模糊控制、神经网络控制、自适应控制等方法结合起来,希望综合这些控制方法的优点,达到更好的控制性能。

机器人是由机械本体、控制器、伺服驱动系统和检测传感器装置构成的,一种能仿人操作、可自动控制、重复编程、并能在三维空间完成各

种作业的机电一体化设备[17]。它综合了机械工程、控制工程、信息工程、人工智能、传感技术等多学科技术,其应用发展水平已成为衡量一个企业乃至国家技术水平的一项重要指标。目前,机器人已经被广泛应用到各行各业。从人们的日常生活、工农业生产到海洋探测、太空探测,机器人都发挥着越来越重要的作用。随着机器人应用领域的不断扩大,人们对机器人的要求也日益提高,特别是对处于机器人核心地位的控制系统的设计要求也越来越高。但是,机器人实际上是一个非线性、时变、强耦合的非常复杂的多输入多输出系统,其运行环境、负载、工作过程中的摩擦力、库仑力、测量误差、外部扰动、未建模动态、驱动设备故障等不确定因素的存在,不仅很难建立其完整的、精确的数学模型,而且也极大地影响了机器人的控制品质,因此,对机器人控制系统的研究,特别是探索新型的控制方法是机器人研究的一项重要课题,也是机器人研究的一个重要研究方向[18,19]。

多关节机器人也称为机械臂、机械手,从运动几何学的角度看,是指一端与基础固定的一系列具有空间运动能力的刚体的连接组合[20]。在工业应用的机器人中,多关节机器人占有很大的比例,是工业机器人的主体。多关节机器人是一个十分复杂的多输入多输出非线性系统,具有时变性、耦合性和非线性等动力学特征。其控制问题主要是控制机器人的各关节或末端执行器位置能够以理想的动态品质跟踪给定的轨迹或稳定在指定的位置上,也即轨迹跟踪控制和位置控制。多关节机器人是典型的不确定性系统,其不确定性因素主要包括:负载质量、连杆质量、长度以及连杆质心等物理量未知或只有部分已知(参数不确定性);驱动器动力学、结构共振模式等高频未建模动态和动摩擦力、静摩擦力、关节柔性等低频未建模动态(非参数不确定性);作业环境干扰、驱动器饱和问题,测量误差、舍入误差及采样延时等因素[21]。这些不确定性因素的存在,很可能会引起控制系统质的变化,甚至造成系统不稳定。针对不确定性机器人的先进控制策略主要有三类,即滑模控制、自适应控制和鲁棒控制。其中,滑模控制具有较强的鲁棒性、无需精确建模和专门解耦以及响应速度快、无超调等突出优点而成为不确定性多关节机器人控制的首选方法。

1.1 滑模控制理论研究进展

滑模控制理论大致经历了三个发展阶段[2,8,22]。1957—1962 年为第一阶段,此阶段的研究工作主要由苏联学者完成,提出了滑模控制的概念。主要研究对象为两阶线性系统,以误差及其导数为状态变量在规范空间中研究单输入单输出线性系统的滑模控制问题。1962—1970 年为第二阶段,开展了单输入单输出的高阶线性系统的研究,主要研究了高阶线性系统在线性切换函数下控制受限与不受限和二次型切换函数的情况。1970 年以后为第三阶段,在线性空间上研究线性系统的滑模控制,主要成果为滑模控制对摄动及干扰具有不变性。研究对象也发展到多输入多输出系统和非线性系统,对滑模控制系统的研究也由规范空间扩展到更一般的状态空间。文献[23]从工程的角度,对滑模控制所产生的抖振进行了精确的分析评估,为滑模控制在工程上的应用提供了有益的指导。

20 世纪 90 年代后,将滑模控制与模糊控制、神经网络等相结合构成新型综合控制以及终端(Terminal)滑模控制、积分滑模控制等新型滑模控制已成为新的研究热点。

模糊控制具有不需要被控对象数学模型,且有较强鲁棒性的优点,能充分运用控制专家的经验知识,通过模糊系统逼近未知项或切换项,实现模糊自适应滑模控制。将模糊控制和传统滑模控制相结合,保留两者的优点,克服各自缺点,已经有较多的研究成果[24-37]。文献[24]将模糊控制和滑模控制相结合,通过模糊自适应学习,采用模糊系统替代滑模等效控制部分,使模糊系统的输出渐近逼近滑模等效控制。文献[25]先将耦合系统分解成多个子系统,采用分层的方法,针对每个子系统设计滑模面,通过自适应模糊算法调节耦合系数,实现最佳的解耦效果。文献[28]通过模糊规则构造了模糊滑模控制器,采用模糊控制器来自适应调整滑模切换项增益,并通过设计抖振指标,采用遗传算法来优化模糊控制器,从而实现了减弱抖振。文献[34]通过模糊规则设计了模糊滑模控制器,且在滑模面中引入了积分项,通过自适应算法实现了对切换项系数的自适应估计。文献[35]针对参数不确定和外

界干扰的 n 阶非线性系统，提出一种无需到达阶段的模糊滑模控制新方法，并针对机器人操作手进行了相关验证。文献[36]针对升压变压器，设计了一种结合模糊控制和滑模控制优点的模糊滑模控制方法，并和 PID(Proportion Integration Differentiation，比例 - 积分 - 微分)控制方法进行了比较分析。文献[37]针对一类不确定和外界干扰的多输入多输出非线性系统，提出了一种改进的模糊滑模控制方法，该方法采用模糊系统估计控制系统的结构不确定部分和外界干扰上界，并采用比例积分方法消除滑模控制的抖振。

神经网络是一种具有高度非线性的连续时间动力系统，对非线性系统有着很强的映射能力，并有较高的自学习功能。神经网络和滑模控制相结合，可实现自适应滑模控制，已经取得了不少研究成果[38-49]。文献[38]提出了一种基于 RBF(Radial Basis Function，径向基函数)神经网络的滑模控制方法，该方法结合了传统滑模控制与神经网络的特点，实现了无需对象精确模型的控制，该控制方法已在非线性单级倒立摆的自适应控制中得到验证。文献[39]采用 RBF 神经网络辨识系统不确定部分的上界，设计了一种新型神经网络滑模控制方法，并成功地在机械手的轨迹跟踪控制中获得了验证。文献[41]针对变频器的抗抖振自适应滑模控制，提出了一种基于 BP(Back Propagation，误差反向传播)神经网络的滑模控制方法。该方法采用 BP 神经网络代替滑模控制的切换部分，并通过 BP 神经网络权值的在线调整，成功实现了控制目标，达到了所需的控制性能。文献[42]针对一类非线性离散机器人力臂系统的控制问题，设计了带有双神经网络的自适应滑模控制器，两个神经网络用于对非线性系统中未知函数部分的逼近，从而实现了控制要求。文献[44]提出了一种基于模糊神经网络的滑模控制方法，该方法将控制器分为模糊神经网络滑模控制器和线性反馈控制器两部分，采用模糊神经网络自适应估计滑模控制的切换项部分，实现了控制律的连续性，从而减弱了抖振。文献[45]针对感应电机的控制问题，提出了一种基于 BP 神经网络的滑模控制方法，该方法将神经网络和滑模控制相结合，构成新的闭环控制系统，利用 BP 网络的在线学习功能，达到了控制要求。文献[46]设计了一种基于 RBF 神经网络的滑模控制器，将切换函数作为神经网络的输入，通过神经网络的逼近能力，

控制器完全由连续的 RBF 函数实现，取消了切换项，克服了抖振。文献[47]针对典型不确定性非线性系统，提出了一种基于李雅普诺夫(Lyapunov)理论的，结合神经网络和滑模控制优点的神经滑模控制方法，神经网络用于估计系统的结构模型。文献[48]针对参数和外界干扰未知的线性时变系统，提出一种自适应神经滑模控制方法，神经网络用于提供滑模切换部分的系数，并通过优化方法得出反馈增益。文献[49]针对单输入单输出非线性系统，把神经网络、模糊控制和滑模控制结合起来，提出了一种模糊神经滑模控制方法，采用模糊神经方法估计非线性系统的不确定部分，利用李雅普诺夫理论设计的滑模控制器用于提高系统的鲁棒性。

终端滑模控制是 Zak 于 1988 年提出的，随后引起了众多学者的广泛关注。终端滑模控制在滑动超平面的设计中引入非线性函数，构造终端滑模面，使在滑模面上的跟踪误差能够在有限时间内收敛到零。近年来，终端滑模控制取得了不少研究成果[50-57]。文献[50]在滑动超平面的设计中引入非线性函数，将滑模面设计为 $s = x_2 + \beta x_1^{q/p}$，较好地实现了控制目标，和普通滑模控制相比，跟踪误差能够在有限时间内收敛到零。但该控制方法的缺点也很明显，如果参数选取不当，很可能会出现奇异问题。另外，该控制器由于非线性函数的引入也使得控制器在实际工程中较难实现。文献[51]针对一般终端滑模控制器出现奇异的问题，提出了一种非奇异终端滑模控制方法，并探讨了非奇异终端滑模控制器的设计问题，该方法已成功应用于 n 自由度刚性机器人的轨迹跟踪控制。文献[52]提出了一种基于模糊系统的终端滑模控制方法，该方法采用模糊系统替代终端滑模控制器的切换项，通过自适应算法对切换项增益进行自适应模糊调节，实现了非匹配不确定性时变系统的终端滑模控制，同时降低了抖振。文献[53]针对二阶系统提出了一种终端滑模控制方法，并研究设计了具体的终端滑模面，但该滑模面的导数是不连续的，高阶系统中无法使用。文献[54]针对文献[53]中的滑模面导数不连续、高阶系统中无法使用的缺点，讨论并设计了一种适用于高阶非线性系统的终端滑模面，该设计方法消除了滑模控制的到达阶段，在保证系统稳定性的同时，具有较好的鲁棒性。文献[55]针对带有参数摄动和外界扰动等不确定性因素的上界未知的

多输入多输出不确定性系统,研究设计了一种自适应终端滑模控制器,实现了控制目标,并具有较好的控制性能。文献[56]针对非线性磁性轴承系统,设计了一种鲁棒非奇异终端滑模控制方法,并与传统 PID 控制、滑模控制、一般非奇异终端滑模控制进行了比较分析。文献[57]针对机器人操作手的控制,提出了一种终端滑模控制方法,该方法能够估计系统的不确定性上界,并在保持较好鲁棒性的同时消除滑模控制的抖振。

常规的滑模控制在跟踪任意轨迹时,若存在一定的外部扰动,则可能会带来稳态误差,不能达到要求的性能指标[8]。文献[58-61]为了解决这一问题,提出了一种积分滑模控制方案,并在机械臂、伺服电机等系统上进行了验证。文献[62]针对常规积分滑模控制要求控制对象的系统模型是可控标准型,不包括任何零点这一局限性,提出了一种改进的积分滑模控制方法,该方法有效地克服了该局限性,并且在满足匹配的条件下,对于最小相位系统及非最小相位系统均适用。文献[63]提出了一种新型的具有积分形式增益的滑模控制器,在增益项中包含切换函数的积分,并对积分取绝对值,使切换函数趋近于零时,切换项的增益也趋近于零,从而消弱了抖振。文献[64]将线性矩阵不等式和积分滑模控制相结合,设计了一种新型的积分滑模控制器,实现了针对带有时变延迟被控对象的积分滑模控制。此外,常规滑模控制系统的鲁棒性只存在于滑模面上,在到达滑模面之前的趋近阶段对不确定性不具有鲁棒性,积分滑模控制消除了趋近模态,使系统初始状态就处在滑模之上,从而保证了全程鲁棒性[114,115]。文献[114]针对不确定非线性系统,设计了积分滑模控制器,使系统达到了所要求的控制性能。文献[115]研究了积分滑模控制的鲁棒性,提出了一种确定滑模参数矩阵的方法,减小了非匹配项对理想滑模的影响。

滑模控制在具有参数摄动、外界扰动和未建模动态的高度非线性系统中有着广泛的应用,如机器人、电机、飞行器、导弹以及伺服系统等[65-71]。由于机器人系统是典型的非线性系统,存在着多种不可预见的外部干扰,所以机器人控制是近年来滑模变结构控制理论的主要应用环境之一[66]。文献[67]针对二自由度刚体机械手的轨迹跟踪控制问题,首次设计了滑模控制方法,实现了时变参考轨迹跟踪的控制。随

后,国内外出现了大量的关于机器人滑模控制的研究[97-101]。电机控制是滑模控制的一个主要应用领域,文献[68]详细探讨了滑模控制在直流电机、永磁同步电机、感应电机以及变频器中的设计方法。滑模控制的另一个应用环境是飞行器的运动控制,文献[4]分别针对航空航天飞行器、柔性空间飞行器设计了滑模控制器。滑模控制用于导弹控制领域也发展较快,文献[69]采用滑模控制方法,设计了某型导弹的鲁棒控制器。文献[70]采用四元最优积分滑模控制方法,设计了中程巡航导弹的矢量非线性滑模控制器,并进行了仿真验证。此外,伺服系统由于强非线性和不确定性的特点也非常适合于采用滑模控制方法,在伺服系统控制领域,滑模控制也获得了广泛应用[71]。

1.2 滑模控制基本原理和抖振问题

1. 滑模控制的基本问题

设有控制系统[2]

$$\dot{x}=f(x,u,t)\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad u\in\mathbf{R}^m,\quad t\in\mathbf{R}\tag{1.1}$$

需要确定切换函数

$$s(x),\quad d\in\mathbf{R}^m\tag{1.2}$$

求解控制函数

$$u=\begin{cases}u^+(x) & s(x)>0\\ u^-(x) & s(x)<0\end{cases}\tag{1.3}$$

其中,$u^+(x)\neq u^-(x)$,使得

(1) 滑动模态存在,即式(1.3)成立;

(2) 满足可达性条件,在切换面 $s(x)=0$ 以外的运动点都将于有限的时间内到达切换面;

(3) 保证滑模运动的稳定性;

(4) 达到控制系统的动态品质要求。

上面的前三条是滑模控制的三个基本问题,只有满足了这三个条件的控制才叫滑模控制[2,4]。

满足滑动模态存在条件是滑模控制应用的前提。在满足滑模存在

条件的同时，还必须满足可达性条件，即当系统的初始点 $x(0)$ 处在状态空间的任意位置时，必须要求系统的运动趋向于滑模切换面 $s=0$，否则系统无法启动滑模运动。由于滑模控制策略种类较多，系统可达性条件的实现形式也不尽相同，滑动模态存在的数学表达式为[2]

$$\lim_{s\to 0^+} \dot{s} < 0, \quad \lim_{s\to 0^-} \dot{s} > 0 \tag{1.4}$$

式(1.4)意味着在滑模切换面邻域内，运动轨线将于有限时间内到达切换面，所以也称为局部到达条件。其等价形式为

$$s\dot{s} < 0 \tag{1.5}$$

其中切换函数 $s(x)$ 应满足下面条件[2]：

(1) 可微；

(2) 过原点，即 $s(0)=0$。

由于状态 x 可以取任意值，即 x 离开切换面可以任意远，故到达条件(1.5)也称为全局到达条件。为了保证在有限时间到达，避免渐进趋近，一般对式(1.5)修正为

$$s\dot{s} < -\delta \tag{1.6}$$

其中，$\delta>0$，δ 可以取得任意小。

一般将式(1.5)表达成李雅普诺夫函数型的到达条件

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}s^2 < 0 \tag{1.7}$$

其中，$V(x)$ 为定义的李雅普诺夫函数。

2. 滑模控制的不变性

滑模控制系统的运动包括滑动模态运动和趋近运动两部分，到达滑模面后，系统处于滑动状态，此时，系统动力学行为由 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})=0$ 确定，与控制律无关，且对系统内部参数不确定和外部扰动完全不敏感，也即具有鲁棒性。

考虑如下不确定系统[14]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \tag{1.8}$$

其中，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*+\Delta\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^*+\Delta\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}^*+\Delta\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$，$\boldsymbol{d}^*$ 表示系统的标称值，$\Delta\boldsymbol{A}$，$\Delta\boldsymbol{B}$，$\Delta\boldsymbol{d}$ 表示系统的不确定性。

设计滑模面函数为 $s(x,t)$，则

$$\dot{s}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}((\boldsymbol{A}^{*}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{B}^{*}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{d}^{*}+\Delta\boldsymbol{d}))\tag{1.9}$$

假设存在参数矩阵$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$,使系统的不确定项满足

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1,\quad \Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_2,\quad \Delta\boldsymbol{d}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3\tag{1.10}$$

不妨设$\partial s/\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{B}^{*}+\Delta\boldsymbol{B})$可逆,令$\dot{s}=0$可求得滑模面上的等效控制为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}=-\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B}^{*}+\Delta\boldsymbol{B})\right]^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}((\boldsymbol{A}^{*}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\Delta\boldsymbol{d}))\right]\tag{1.11}$$

将式(1.10)和式(1.11)代入式(1.8)可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=(\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{B}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_2)\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B}^{*}+\right.\\&\left.\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_2)\right]^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}((\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3))\right]\\&=(\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3)-\boldsymbol{B}^{*}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}_2)^{-1}\\&\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}((\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3))\right]\\&=(\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{d}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3)-\boldsymbol{B}^{*}\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial t}-\\&\boldsymbol{B}^{*}\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{B}^{*}\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{x}-\\&\boldsymbol{B}^{*}\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{d}^{*}-\boldsymbol{B}^{*}\left[\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\right]^{-1}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}_3\end{aligned}$$

再经整理可得