

应用型本科院校“十二五”规划教材

# 大学物理基础教程

樊则宾 蔡群 主编

电磁学分册



科学出版社

应用型本科院校“十二五”规划教材

# 大学物理基础教程 ——电磁学分册

主 编 樊则宾 蔡 群  
副主编 吕 玲 陈 丽 张 茜  
        顾春霞 熊艳娇  
主 审 伏云昌

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书以教育部物理学与天文学教学指导委员会 2010 年颁布的“理工科大学物理课程教学基本要求”为指导,以应用型本科学生“理论适度够用,突出实际应用”的培养特点为编写依据.本书内容围绕“框架、概念、思路、方法、应用”展开,共分为 8 章,在介绍传统内容,如电场强度、高斯定理,电势能、电势,静电场中的导体、电介质等的基础上,新增加了直流电路和交流电路基础两章内容,以便于机电类专业选讲.

本书适合作为普通高等学校大学物理课程的教材,也可作为相关人员的参考用书.

### 图书在版编目(CIP)数据

大学物理基础教程:电磁学分册/樊则宾,蔡群主编. —北京:科学出版社, 2014

应用型本科院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-041302-4

I. ①大… II. ①樊… ②蔡… III. ①物理学-高等学校-教材 ②电磁学-高等学校-教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 140403 号

责任编辑:李淑丽 / 责任校对:张凤琴

责任印制:肖 兴 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2014 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2014 年 8 月第一次印刷 印张:10 1/4

字数:206 000

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 教材编写委员会

顾 问	袁希平	钟嘉玉	陈君若	李 华
	干晓蓉	李任波	李庶民	
主 任	段鹏飞			
副主任	樊则宾	段志刚	蔡 群	李茂材
	杨留方			
委 员	(按姓氏笔画排序)			
	王玉林	王晓艳	木 繁	田家金
	司民真	毕雄伟	吕 玲	朱乔忠
	刘涵哲	李 佳	李茂泉	杨春艳
	何永进	张 茜	张远弟	陈 丽
	邵 平	周 菁	郑文礼	茶国智
	顾春霞	董 刚	曾凌云	熊艳娇
主 审	马文淦	伏云昌	樊则宾	李永铸
秘 书	吴锐涛			

## 丛 书 序

随着经济转型和经济增长方式的转变，国家亟需大量的高素质技术应用型和职业技能型高级专门人才。在此背景下，应用型本科教育迅速发展，招生规模逐年扩大。为切实培养出符合国家需求的人才，结合应用型本科教育的培养目标和办学特点，制定出有效的培养方案，是十分重要的。在培养方案的制定过程中，有针对性的、高质量的教材建设是最基础的工作。

以力学、电磁学、热学、光学及近代物理知识为主要内容的大学物理课程，是理学类、工程类、信息类、机电类、农林类、医学类等专业的重要基础课程。它不仅是学生进行后续专业课程学习的桥梁，也是提高学生逻辑思维能力、理论和实践结合能力以及实际动手能力的一门和实验紧密结合的课程。对应用型本科人才培养而言，上述课程的相关教材中理论知识的深度和广度适中即可，但需要特别突出理论知识和实际应用的结合，让学生学习到“理实结合”的方法和特点，即教材需要具备“理论适度够用、突出实际应用”的特征。为此，昆明理工大学、西南林业大学、云南民族大学、大理学院、玉溪师范学院、红河学院等多所高校联合编写了本套应用型本科院校“十二五”规划教材——大学物理系列。

这套教材的编写目的是开展不同层次、不同类别、不同模式、不同侧重的应用型本科人才培养的教学改革。编者在编写过程中以教育部物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科大学物理课程教学基本要求（2010年版）》为指导，考虑了应用型本科的培养特点和地方院校学生的实际情况，并结合了历年来参编高校在应用型本科教育的培养经验和参编人员的实际教学经验。在保证理论体系完整的前提下，教材中略去了部分理论难度过大而应用型本科学生又不是迫切需要的章节；适度简化了对部分内容的理论推导；增加了相关知识在实际中应用的内容；并选编了对部分专业的学生后续学习有帮助的章节，可供有需要的专业选讲。本教材配置了难度适中的例题与典型习题，并适当增加了具有实际工程应用背景的习题，便于学生巩固基础知识和提高运用知识解决问题的能力。整体上具备了“理论适度够用、突出实际应用”的特点。

我期待这套教材在经过试用并修订完善之后，能够为应用型本科大学物理课程的教学质量和教学效果的提高、为学生的科学素养和理实结合能力的提高做出积极的贡献。

中国科学技术大学

蒋 一

2014年6月26日

# 前 言

为满足应用型本科高校的人才培养方案要求，考虑到地方高校学生的实际情况，在昆明理工大学等多所应用型高校共同努力下，编写了本套大学物理系列教材。本套教材是为应用型本科学子量身打造的，教材以应用型本科学子“理论适度够用，突出实际应用”的培养特点为编写依据。

教材内容围绕“框架、概念、思路、方法、应用”展开，在讲述物理现象、物理概念的同时，注意引导学生对物理过程进行分析，并培养学生将实际问题抽象为物理图像的能力。让学生在对整个物理框架有所认识的同时，学会处理一般物理问题的方法和技巧。全书注意培养学生独立获取知识的能力、分析问题和解决问题的能力、科学观察和理实结合的能力。在保证理论体系完整的前提下，编者对部分内容的理论推导进行了适当简化，略去了部分理论难度过大而应用型本科学子又不是迫切需要的内容，同时选编了一些工程应用的实例和对部分专业的学生后续学习有帮助的章节，可供需要的专业选讲，彰显了应用型本科大学物理教材的特色。每章的开篇都有根据生活中的实例图片提出的问题，作为该章的引例，以引导学生进行思考和学习。部分章节选编了工程应用实例，帮助学生掌握本章知识的实际应用。每章的最后单独有一节本章提要，方便学生学完一章后对所学内容进行梳理。每一章都配置了难度适中的例题与典型习题，并适当增加了具有实际工程应用背景的习题。习题形式多样，包括思考题、填空题、选择题、计算题。题目从对有关的基本概念和规律的分析讨论，到处理问题的一般思路、方法，再到具体问题的求解和应用，按层次依次展开，形成了一个完整的引导学习的框架结构。

本套教材共有力学、电磁学、热学、光学和量子物理四个分册。本书为电磁学分册，本分册在传统内容的基础上，新增加了直流电路和交流电路基础两章内容，以便于机电类专业选讲。

电磁学分册由樊则宾、蔡群主编，昆明理工大学的樊则宾编写第一章、第二章和第八章，昆明理工大学津桥学院的顾春霞编写第三章，大理学院的张茜编写第四

章，西南林业大学的熊艳娇编写第五章，昆明理工大学的吕玲编写第六章，大理学院的陈丽编写第七章，红河学院的蔡群编写部分章节的习题，全书由樊则宾、蔡群统稿。

昆明理工大学的伏云昌教授、中国科学技术大学的蒋一教授分别仔细阅读了本分册，并提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢！

编者

2014年7月

# 目 录

绪论	1
第一章 电场强度 高斯定理	3
§ 1.1 电荷 库仑定律	3
§ 1.2 电场 电场强度	5
§ 1.3 电场线 电场强度通量 高斯定理	9
本章提要	15
习题	16
第二章 电势能 电势	20
§ 2.1 静电场力的保守性质 场强环流定理	20
§ 2.2 电势 电势差	22
§ 2.3 等势面 电势梯度	25
本章提要	26
习题	27
第三章 静电场中的导体	30
§ 3.1 导体的静电平衡条件	30
§ 3.2 处于静电平衡下导体电荷的分布	32
§ 3.3 静电屏蔽	36
*§ 3.4 静电的应用	38
本章提要	40
习题	41
第四章 静电场中的电介质 电容器	45
§ 4.1 静电场中的电介质	45
§ 4.2 电介质的极化	47
§ 4.3 有电介质时的高斯定理 电位移矢量 $D$	49
§ 4.4 电容器和电容器的串、并联	52
§ 4.5 静电场的能量	55
工程应用	57
本章提要	60
习题	60
第五章 直流电路	63
§ 5.1 欧姆定律	63



§ 5.2 焦耳定律	66
§ 5.3 电源及电动势	66
§ 5.4 基尔霍夫定律	70
工程运用	75
本章提要	78
习题	78
<b>第六章 稳恒电流的磁场</b>	<b>82</b>
§ 6.1 磁场 磁感强度	82
§ 6.2 磁通量 磁场的高斯定理	85
§ 6.3 毕奥-萨伐尔定律	88
§ 6.4 安培环路定理	90
§ 6.5 洛伦兹力 安培力	94
§ 6.6 磁介质 有磁介质时的安培环路定理	98
*§ 6.7 磁介质分界面的边界条件	101
*§ 6.8 磁路定律及其应用	103
*§ 6.9 霍尔传感器及其应用	106
本章提要	107
习题	109
<b>第七章 电磁感应 电磁场理论基础</b>	<b>115</b>
§ 7.1 电磁感应现象 法拉第电磁感应定律	115
§ 7.2 动生电动势 感生电动势	120
§ 7.3 自感和互感 磁场的能量	125
§ 7.4 麦克斯韦方程组	131
工程应用	134
本章提要	138
习题	139
<b>第八章 交流电路基础</b>	<b>143</b>
§ 8.1 正弦交流信号	143
§ 8.2 正弦量的相量表示	144
§ 8.3 电阻 电容 电感元件的电压与电流的相量关系	146
§ 8.4 基尔霍夫定律的相量形式	148
§ 8.5 RLC 电路的串联谐振和并联谐振	150
本章提要	150
习题	151
<b>参考文献</b>	<b>154</b>

## 绪 论

生活中有许多电子设备，例如手机、电视机、计算机、电动机等，这些设备的工作原理均涉及电磁学的理论。更广义而言，组成世界万物的原子和分子的构成的基本作用力是电磁力。

中国的古代文献早在两千多年前就有关于磁的记载，古希腊人大约在公元前700年观测到电和磁的现象，古希腊人发现了磁石( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )对铁有磁力作用。但一直到了1785年库仑发现了库仑定律后，人类才开始对电学和磁学开展系统、定量的研究，但认为电学和磁学是两个相互独立的学科领域。直到1819年，丹麦物理学家汉斯奥斯特发现了在通电导线附近的小磁针会发生偏转，人们才认识到电和磁之间有紧密的联系。到1931年，英国物理学家法拉第和美国物理学家约瑟夫·亨利几乎同时发现了当通过一个闭合回路的磁通量变化时，在这个回路中就会产生电流，从此电磁学理论得到蓬勃发展。在1873年，麦克斯韦在前人取得的许多理论和实验的基础上，通过归纳和推理，提出了变化的磁场产生涡旋电场，变化的电场又可以激发磁场这两条基本假设，最终建立起了著名的电磁场理论，这个理论也称为经典电磁场理论，是电磁学的重要理论基础。本书将从真空中的静电场开始，系统介绍和学习电磁学的基本理论。



# 第一章 电场强度 高斯定理



图片中母女二人的头发为什么会呈放射状？她们究竟触摸到什么物体？通过本章的学习你便可以找到答案。

在这一章我们将主要讨论真空中相对观察者静止的电荷产生的电场的性质。为了描述电场的性质，我们引入一个重要物理量——电场强度。我们将首先学习决定两个点电荷之间电场作用力的库仑定律；接下来将介绍如何利用库仑定律来计算给定电荷分布的电场强度；然后我们引入电场线和电场强度通量，根据电场线的性质得到静电场的高斯定理，最后通过实例介绍如何利用高斯定理计算特殊对称电荷分布的电场。

## § 1.1 电荷 库仑定律

### 1.1.1 电荷 电荷的性质

早在公元前 600 年，古希腊人发现琥珀经过与猫毛摩擦后就可以吸引轻小的物体，假若摩擦时间够久，甚至会有火花出现，用现在的话说就是琥珀带电了，或者它带有电荷，电子 electron 这个术语就来自于古希腊文的“琥珀 (elektron)”一词。现在通常使用硬橡胶棒与毛皮摩擦或者玻璃棒与丝绸摩擦来演示摩擦带电现象。

通过一系列简单的实验，人们发现有两种电荷，本杰明·富兰克林（1706—1790）将它们分别命名为正电荷和负电荷。实验表明，在一个孤立系统中，电荷量是守恒的，即当一个物体与另一个物体相互摩擦，电荷总是从一个物体转移到另一个物体，总量保持不变，即电荷不会凭空产生也不会凭空消失，例如用一根玻璃棒与丝绸摩擦，电子从玻璃棒转移到丝绸，结果是玻璃棒失去电子带正电，丝绸获得电子而带负电。进一步的实验表明：①同号电荷相互排斥；②异号电荷相互吸引。

在 1909 年美国物理学家 Robert A. Millikan (1868—1953) 通过著名的“油滴实验”发现并证实物体的带电量总是基本电荷（一个电子的电荷量） $e$  的整数倍，

用现在的术语说就是电荷量  $q$  是量子化的, 即电荷量可以写作  $q = \pm ne$ , 其中,  $n$  是任意整数,  $e = 1.60219 \times 10^{-19} \text{C} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ .

### 1.1.2 库仑定律

当一个带电物体的几何尺寸比起问题所涉及的距离远远小得多的时候, 这个带电体就叫做“点电荷”. 真正的点电荷并不存在, 只有当带电粒子之间的距离超大于粒子的尺寸, 或是带电粒子的形状与大小对于彼此相互施加的作用力的影响能够被忽略时, 可称此带电体为“点电荷”.

法国物理学家夏尔·奥古斯汀·库仑 (Charles Augustin de Coulomb) 于 1784 年至 1785 年间进行了著名的扭秤实验, 这种扭秤如图 1-1 所示. 扭秤的基本构造: 一根水平悬于细金属丝的轻导线两端分别置有一个带电小球 A 和一个与之平衡的物体 P, 而在实验中在小球 A 的附近放置同样大小的带电小球 B, 两者的静电力会在轻导线上产生扭矩, 从而使轻杆转动. 通过校正悬丝上的旋钮可以将小球调回原先位置, 则此时悬丝上的扭矩等于静电力产生的力矩. 如此, 两者之间的静电力可以通过测量这个扭矩、偏转角度和导线长度来求得. 该实验定量研究了点电荷之间的电场力大小与电荷量及距离的规律. 库仑的结论为: 两个点电荷之间的作用力与两个电荷量的乘积成正比, 与点电荷间的距离的平方成反比.

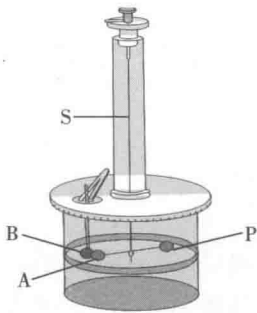


图 1-1 库仑扭秤

如果力的大小用  $F$  表示, 两个点电荷电荷量分别是  $q_1$  和  $q_2$ , 点电荷间的距离为  $r$ , 则库仑定律可用数学公式表示为

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1-1)$$

其中,  $k$  是一个比例常数. 公式 (1-1) 称为库仑定律, 库仑定律只适合于点电荷. 因为  $q_1$  和  $q_2$  的乘积可能是负数, 因此公式 (1-1) 取了绝对值, 保证力  $F$  的大小总是正值.

两个点电荷之间相互作用力总是沿着它们之间的连线. 当两个点电荷为同号电荷时, 它们之间的相互作用力是斥力, 如图 1-2 (a) 所示; 而当两个点电荷为异号时, 其相互作用力为引力, 如图 1-2 (b) 所示. 作用力和反作用力遵循牛顿第三定律, 即便两个电荷电量不相等, 相互作用力也是等大、反向的.

电量的国际单位是库仑 (C), 当载流为 1 安培 (A) 的导线在 1s 内通过导线横截面积的电荷量就是等于 1C 的电量. 在国际制单位条件下, 从实验得出常数  $k$  取值为  $k = 8.98755 \times 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ , 为了方便计算,  $k$  的值通常取  $k \approx 9.00 \times 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ . 在国际单位下又将常数  $k$  写为

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1-2)$$

其中,  $\epsilon_0$  叫做真空的电容率, 其值为

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

这似乎使问题复杂化了, 但在后面我们将看到, 它会使其其它公式变得简洁. 在国际单位制下电流的量纲是 I, 时间的量纲是 T, 所以电荷  $q$  和常数  $\epsilon_0$  的量纲分别是 IT 和  $\text{I}^2\text{L}^{-3}\text{M}^{-1}\text{T}^4$ . 同时考虑到力  $F$  的大小和方向, 库仑定律可以写成如下矢量形式:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (1-3)$$

其中,  $\mathbf{F}_{12}$  是电荷  $q_1$  实施于电荷  $q_2$  的力;  $\mathbf{F}_{21}$  是电荷  $q_2$  实施于电荷  $q_1$  的力, 它们的大小相等方向相反.  $\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$  是单位矢量, 其方向从  $q_1$  指向  $q_2$ . 公式 (1-3) 表明, 如果  $q_1$  和  $q_2$  是同号电荷, 则它们之间的电场力是斥力, 而乘积  $q_1 q_2$  是正数,  $\mathbf{F}_{12}$  与  $\mathbf{r}_{12}$  同方向, 如图 1-2 (a) 所示. 如果  $q_1$  和  $q_2$  带电相反, 乘积  $q_1 q_2$  是负数,  $\mathbf{F}_{12}$  就与  $\mathbf{r}_{12}$  反方向如图 1-2 (b) 所示.

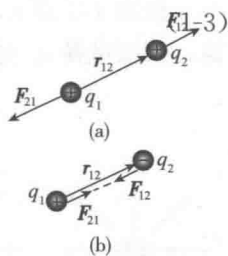


图 1-2 两个点电荷之间的电场力

## § 1.2 电场 电场强度

### 1.2.1 电场 电场强度

两个有一定距离的带电体 A 和 B 之间存在引力或者斥力, 这与万有引力类似, 这种力也是通过空间来相互作用的. 实际上是带电体在其周围建立起了一个场, 我们把它叫做电场. 当另一个带电体 B 放在距离带电体 A 附近某一点 P 时, B 就受到 A 产生的电场施加的作用力. 当然我们也可以认为带电体 B 也在其周围空间产生了一个电场, 带电体 A 受到的力就是来自于带电体 B 的电场, 如图 1-3 所示.

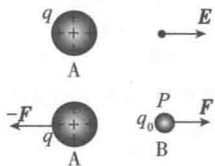


图 1-3 试探电荷  $q_0$  受到的力是带电体通过电场而作用的

为了研究给定带电体的电场性质, 通常我们要用另一个点电荷来做实验研究, 这个电荷叫做试探电荷, 通常试探电荷用正电荷. 实验表明, 试探电荷在不同位置受到的电场力是不同的, 但在某一给定位置, 试探电荷受到的力  $F$  与试探电荷的电荷量  $q_0$  成正比, 即如果电荷量分别为  $q_0, 2q_0, 3q_0, \dots$ , 电场力则为  $F_0, 2F_0, 3F_0, \dots$ , 这表明电场力  $F$  与电荷量  $q_0$  的比值是一个不变的恒矢量, 这一

比值就定义为该点的电场强度, 用  $E$  表示, 即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1-4)$$

试探电荷的尺寸要求尽可能小 (近似为点电荷), 同时带电量也要足够小以免影响

探测对象的电场分布, 公式 (1-4) 的物理意义也可看做某一点的电场强度  $\mathbf{E}$  等于该点处的单位正电荷受到的电场力 (包括大小和方向)。

在通常多数情况下, 电场的大小和方向是随不同空间点而变化的. 但如果在某个空间区域内电场的大小和方向都是不变的, 这种电场就称为均匀电场。

### 1.2.2 点电荷的电场

如图 1-3 所示, 为了确定电荷量为  $q$  的点电荷的电场分布情况. 根据库仑定律, 试探电荷  $q_0$  受到的电场力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} \mathbf{r}$$

这里  $\mathbf{r}$  是从  $q$  指向  $P$  点的位置矢量, 根据电场强度的定义, 点电荷  $q$  在  $P$  点产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (1-5)$$

如果点电荷  $q$  为正电荷,  $P$  点的电场强度方向是从  $q$  指向  $P$  点, 如图 1-4 (a) 所示, 如果点电荷  $q$  为负电荷, 则  $P$  点的电场强度方向是从  $P$  点指向

电荷  $q$ , 如图 1-4 (b) 所示。

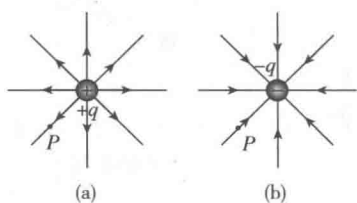


图 1-4 正电荷和负电荷的电场

### 1.2.3 一定数量点电荷产生的电场

如果有一组点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , 距离  $P$  点的距离分别为  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . 如图 1-5 所示, 每一个点电荷均对放在  $P$  点的试探电荷  $q_0$  施加一个电场力, 试探电荷受到总的电场力是这些电场力的矢量和

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1-6)$$

根据电场强度的定义式和公式 (1-5),  $P$  点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}{q_0} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (1-7)$$

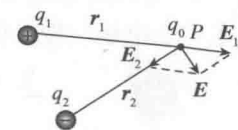


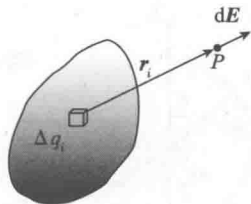
图 1-5 电场的叠加原理

其中,  $\mathbf{E}_i$  是第  $i$  个点电荷单独产生的电场, 点电荷系产生的电场是全部点电荷单独产生电场的矢量和, 公式 (1-7) 叫做电场的叠加原理。

### 1.2.4 连续带电体产生的电场

在实际情况下, 电场是由分布在直线、某个曲面或者一定体积内点电荷产生的, 要分析计算这类连续带电体附近周围的电场分布, 此时带电体不能看做点电荷, 我们将如何解决这类问题呢?

为了计算连续带电体周围的电场强度, 我们可以利用微积分的方法. 第一步, 将带电体划分为数量极大, 尺寸均足够小的微小单元, 每个微小单元电荷量分别为  $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_i$ , 称为电荷元, 如图 1-6 所示, 这些电荷元均可视为点电荷.



第二步, 我们可以利用点电荷的公式 (1-5) 计算第  $i$  个电荷元  $\Delta q_i$  在  $P$  点产生的电场

$$\Delta E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right)$$

其中,  $r_i$  是第  $i$  个电荷元  $\Delta q_i$  指向  $P$  点的矢径,  $\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$  是单位矢量, 方向从  $\Delta q_i$  到指向  $P$  点.

第三步, 对所有电荷元单独产生电场求和, 就可得到  $P$  点的电场

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right)$$

其中, 下标  $i$  表示第  $i$  个电荷元的对应的电荷量和矢径.

最后, 由于电荷是连续分布的, 数学上来说, 在  $\Delta q_i \rightarrow 0$  的极限情况下, 上式变为积分, 即遍及整个带电体的积分, 即

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1-8)$$

下面, 我们通过几个实际例子来学习如何用积分的方法来计算简单带电体的电场强度.

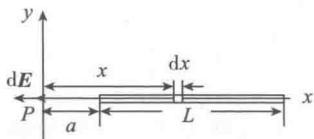


图 1-7 例 1-1 示意图

**例 1-1** 如图 1-7 所示, 一长度为  $L$  的细棒均匀带有电荷, 电荷总量为  $Q$ . 求在棒延长线距离棒一端为  $a$  的  $P$  点的电场强度大小和方向.

**解** 由于电荷是沿棒均匀分布, 单位长度的电荷量即电荷线密度为  $\lambda = Q/L$ . 我们将细棒细分为长度很小的许多微元, 则长度为  $dx$  的微元所带电荷为  $dq = \lambda dx$ .

该微电荷元  $dq$  在  $P$  点产生的强度大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2}$$

因为每一个电荷元产生的电场方向都一致, 例如, 当  $Q$  为正电荷时沿  $-x$  方向, 因此叠加求和时只需要电场强度的代数叠加即可.

$P$  点总的电场强度可以通过从  $x=a$  到  $x=a+L$  的积分得到, 即

$$E = \int_a^{L+a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a(L+a)}$$

如果  $Q > 0$ ,  $E$  指向负  $x$  轴方向,  $Q < 0$ ,  $E$  指向正  $x$  轴方向.



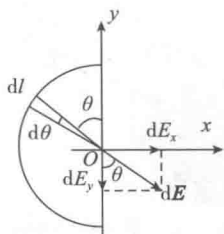


图 1-8 例 1-2 示意图

**例 1-2** 正电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的半圆环上, 如图 1-8 所示, 求半圆环圆心处的电场强度.

**解** 如图 1-8 建立二维坐标, 电荷线密度为

$$\lambda = \frac{Q}{\pi R}$$

圆环上长度为  $dl$  的微元所带电荷为

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

电荷元  $dq$  在圆心处产生的电场大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q d\theta}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

如图, 可将电场  $dE$  沿  $x, y$  轴分解为  $dE_x$  及  $dE_y$ . 考虑到半圆环的对称性, 沿  $y$  轴的电场的叠加时相互抵消, 因此,  $O$  点的场强沿正  $x$  轴方向, 显然有

$$dE_x = \frac{Q d\theta}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin\theta$$

圆心  $O$  点的电场强度可以通过对上式积分得到, 积分范围从  $\theta=0$  到  $\theta=\pi$ , 即

$$E = E_x = \int_0^\pi dE_x = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cos\theta \Big|_0^\pi = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

**例 1-3** 如图 1-9 所示, 一个细圆环半径为  $R$ , 带有总电量为  $Q$  的电荷, 电荷沿圆环均匀分布. 求在圆环的轴线上距离圆心为  $x$  的  $P$  点的电场强度.

**解** 我们在圆环上取一长度为  $dl$  的微元, 为了图示的方便, 这一微元取在圆环的顶点, 该微元所带电荷在  $P$  点产生的电场  $dE$  可以分解为两个分量, 一个分量  $dE_x$  平行于  $x$  轴, 另一个与  $x$  轴垂直, 用  $dE_\perp$  表示. 由于电荷分布的对称性, 所有电荷元产生的电场的垂直分量两两彼此抵消, 例如圆环顶部的电荷元和底部的电荷元产生的电场的垂直分量抵消. 电荷元  $dq$  产生的电场强度大小为

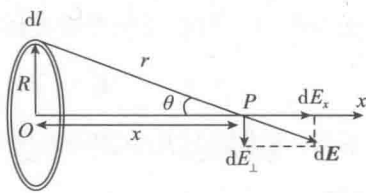


图 1-9 例 1-3 示意图

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

沿  $x$  轴分解的分量为  $dE_x = dE \cos\theta$ . 注意到对于所有电荷元变量  $r$  和  $\theta$  数值都是一样的, 因此积分时  $r$  和  $\theta$  都是常数, 对  $dE_x$  积分就可以算出  $P$  点总的电场强度, 所以

$$E = E_x = \int dE_x = \int \frac{\cos\theta dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dq = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q$$

利用几何关系  $r^2 = R^2 + x^2$  及  $\cos\theta = x/r$ , 我们进一步可以得到

$$E = \frac{x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} Q \tag{1-9}$$