gaodeng yuanxiao tongshi | 高等院校**通识教育**
"十二五"规划教材 | jiaoyu shierwu guihua jiaocai

线性代数

◎ 刘金旺 李冬梅 主编

Xianxing Daishu

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

gaodeng yuanxiao tongshi | 高等院校**通识教育** “十二五”规划教材 | jiaoyu shierwu guihua jiaocai

线性代数

◎ 刘金旺 李冬梅 主编

Xianxing Daishu

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 刘金旺，李冬梅主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2014.8
高等院校通识教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-35686-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… ②李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第178037号

内容提要

本书内容包括行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值与二次型、线性空间与线性变换等内容，每章后还配有练习题。

本书适用于高等院校各专业的线性代数教学用书，也可作为考研、自学人员的参考用书。

◆ 主　　编　刘金旺　李冬梅
责任编辑　王亚娜
执行编辑　喻智文
责任印制　张佳莹　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：11.75　　2014 年 8 月第 1 版
字数：278 千字　　2014 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：27.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育转移阶段中对高校人才培养的要求，依据教育部颁布的最新的“高等学校工科数学课程教学基本要求”，我们在教学成果的基础上编写了本书．在编写中，我们根据多年的教学改革实践，结合国内外“线性代数”课程改革和各学科建设的最新成果，使本书内容符合精品课程教材的需要，体现创新教学理念，有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力．

本书结构严谨，叙述清晰准确，论证简明易懂，例题选配典型多样，难度层次分明，注明解题方法且加以总结等优点。在编写过程中，对一些叙述和证明进行了反复推敲，简化了一些证明过程，力求叙述和论证更加通俗易懂，便于自学．

根据广大同行的意见和建议，在保持教材内容深广度不变的前提下，对习题的类型和数量进行调整和充实.本书中除特别说明外，所有矩阵均指实矩阵.二次型也是实二次型.由于线性变换、λ 矩阵的概念理科色彩较浓，我们加上星号，教师可根据需要选讲.为增强本书的可读性，方便教师教学，本书着重突出以下特点：

(1)通过大量例题来阐明线性代数的思想，增加学生建立数学模型的意识；

(2)通过一些实际例子的介绍，增强学生学习线性代数的兴趣；

(3)用通俗的语言阐述基本概念，强化知识的连贯性与实用性；

(4)淡化定量的推导，强调方法的训练.

本书由湖南科技大学数学与计算科学学院刘金旺、李冬梅编写.由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和各位同行批评指正.

编者

2014 年 4 月

目录

第1章

n 阶行列式

1.1 排列与逆序

在许多时候，常常需要排队，这就是数学中的排列．为此我们引入全排列与逆序数等概念．

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列)．

有序数组 12 和 21，由两个数构成，称为 2 级排列．有序数组 213 则称为 3 级排列，3 级排列的总数为 $3!=6$ 个．4231 为 4 级排列，4 级排列的总数为 $4!=24$ 个．n 级排列的总数是 $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$，读为"$n$ 的阶乘"，记为 $n!$；随着 n 的增大而迅速增大，例如，$10!=3\ 628\ 800$.

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排列起来的，其他的排列都或多或少地破坏自然顺序．

定义 1.2 在一个排列中，如果两个数(称为数对)的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么称这两个数构成一个逆序(反序)．一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数．

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

2 级排列 12 的逆序数为 0，排列 21 的逆序数为 1，排列 231 的数对 21、31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2. 同理排列 213 的逆序数是 1，即 $\tau(213)=1$. 进一步我们有如下定义．

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列．

2 级排列 12 为偶排列，21 为奇排列；3 级排列 231 为偶排列，213 为奇排列．

例 1.1 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性．

(1)42351；(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1)对于所给排列，4 排在首位，逆序个数为 0；2 的前面有 1 个比它大的数，逆序个数为 1；3 的前面有 1 个比它大的数，逆序个数为 1；5 的前面没有比它大的数，逆序个数为 0；1 的前面有 4 个比它大的数，逆序个数为 4. 把这些数加起来，即

$$0+1+1+0+4=6,$$

故排列 42351 的逆序总数为 6，即 $\tau(42531)=6$，因而是偶排列．

(2)同理可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列．

易见 231 是偶排列(逆序数为 2)，我们把排列 231 中的 3 与 1 对换，得到的排列 213 是奇排列(逆序数为 1)，这两个排列的奇偶性正好相反，事实上对一般的排列也是如此．

定义 1.4 在一个排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换叫做对换，将相邻两数对换，叫做相邻对换(邻换)．

定理 1.1 一个排列中的任意两数对换，排列改变奇偶性．

证 先证相邻对换的情形．

设排列为 $j_1\cdots j_{i-1}j_ij_{i+1}j_{i+2}\cdots j_n$，对换 j_i 与 j_{i+1} 排列就变为 $j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}j_ij_{i+2}\cdots j_n$，显然 $j_1,\cdots j_{i-1},j_{i+2},\cdots j_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 j_i 与 j_{i+1} 两数的逆序数改变：当 $j_i<j_{i+1}$ 时，经对换后，$j_{i+1}j_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1，当 $j_i>j_{i+1}$ 时，$j_{i+1}j_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1，所以排列 $j_1\cdots j_{i-1}j_ij_{i+1}j_{i+2}\cdots j_n$ 与排列 $j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}j_ij_{i+2}\cdots j_n$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变．

下证一般对换的情形．

设排列为 $j_1\cdots j_{i-1}j_ij_{i+1}\cdots j_{i+m}j_{i+m+1}j_{i+m+2}\cdots j_n$，对换 j_i 与 j_{i+m+1}，先把 j_i 往后连续作 m 次相邻对换，排列变为 $j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_{i+m}j_ij_{i+m+1}j_{i+m+2}\cdots j_n$，再把 j_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列就变为 $j_1\cdots j_{i-1}j_{j+m+1}j_{i+1}\cdots j_{i+m}j_ij_{i+m+2}\cdots j_n$，从而实现了 j_i 与 j_{i+m+1} 的对换，它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成，排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反．

1.2 行列式的定义

对于二元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 & ①\\ a_2x+b_2y=c_2, & ②\end{cases}$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时，我们有一个求解公式

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{1-1}$$

事实上，我们原方程组用加减法(消去法)就可得到公式(1-1)：

将①$\times b_2$，②$\times b_1$ 得：

$$\begin{cases}a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2, & ①'\\ a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1 & ②'\end{cases}$$

①'-②'得：

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1,$$

从而，当 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 时，有 $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

再将 $a_2\times$①，$a_1\times$②又得：

$$a_1a_2x+a_2b_1y=c_1a_2 \tag*{①″}$$
$$a_1a_2x+a_1b_2y=c_2a_1 \tag*{②″}$$

②″-①″得：$(a_1b_2-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2$，从而(1-1)式成立.

为了便于记忆公式(1-1)，定义

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

并把它叫做二阶行列式(其实，算出来就是一个数)，并把 $a\ b$ 叫它的第一行，$c\ d$ 叫它的第二行，$\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ 叫它的第一列，$\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}$ 叫它的第二列(即横的叫行，纵的叫列，这就是“行列式”名字的来历，这样，公式(1-1)就可以写成：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag*{(1-1)′}$$

其记法：两式的分母$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$就是把原方程组的系数按原顺序排成的二阶行列式；计算 x 的分子是把分母中 x 的系数$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$所在的列用常数项$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$代替；计算 y 的分子是把分母中 y 的系数$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$所在的列用常数项$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$代替.

例 解线性方程组

(1)$\begin{cases} 3x+4y=8, \\ 2x+7y=5; \end{cases}(2)\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 5x-4y=-2. \end{cases}$

解 (1)$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{56-20}{21-8}=\frac{36}{13}$，$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{15-16}{21-8}=-\frac{1}{3}$；

(2)$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-52+6}{-8-15}=\frac{-46}{-23}=2$，$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-69}{-23}=3.$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

也有同样的公式：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

其中，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1-2}$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数．

我们先观察到式(1-2)的右端，它是一些乘积项的代数和，其中，每一个乘积项是位于不同行不同列的 3 个数相乘，这 3 个数的第一个下标是按自然顺序排列的，第二个下标有的则不按自然顺序排列．我们不禁要问：这个代数和的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系？有什么关系？第二个下标由自然数 1、2 和 3 组成，构成的三级排列共有 3！=6 个：123、231、312、321、132、213，这正好等于式(1-2)右端的项数，排列为 123、231、312 的逆序数分别为 0、2、2，它们均为偶排列，对应项的符号为“+”，排列 321、132、213 的逆序数分别为 3、1、1，它们都是奇排列，对应项的符号为“－”．综上所述：式(1-2)右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1、2、3 的一个 3 级排列，这种排列共有 6 个，等于式(1-2)右端的项数．当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负，各项所带符号均可以表示为 $(-1)^J$，其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数．从而式(1-2)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体 3 级排列求和．

二阶行列式的情况完全类似．

现在，把上述规则推广到 n 阶行列式去，从而给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.5 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-3}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(1-3)都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(1-3)带有正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(1-3)带有负号．这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-4}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

例 1.2　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解　根据定义，D 是 $4!=24$ 项的代数和，但每一个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为 0，乘积项就等于 0，所以只需计算展开式中不明显为 0 的项．由于第 1 行元素除 a_{11} 外全为 0，故只需考虑 $j_1=1$，第 2 行元素中只有 a_{21}，a_{22} 不为 0，现已取 $j_1=1$，故必须取 $j_2=2$，同理必须取 $j_3=3$，$j_4=4$，这就是说行列式展开式中不为 0 的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而列标排列 1234 的逆序数为 0，即此项符号为正，因此行列式 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$．

行列式中，从左上角到右下角的直线称为主对角线．主对角线以上的元素全为零（即 $i<j$ 时元素 $a_{ij}=0$）的行列式称为下三角行列式，它等于主对角线上各元素的乘积．主对角线以下的元素全为零（即 $i>j$ 时元素 $a_{ij}=0$）的行列式称为上三角行列式，同理可证它等于主对角线上各元素的乘积．行列式中，除主对角线上的元素以外，其他元素全为零（即 $i\neq j$ 时元素 $a_{ij}=0$）的行列式称为对角行列式，由上面可知它等于对主角线上元素的乘只，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.3　证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

上面的行列式中，未写出的元素都是 0.

证　由于行列式的值为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，只需对可能不为 0 的乘积项 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和，考虑第 n 行元素 a_{nj_n}，知 $j_n=1$，再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$，知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$，由于 $j_n=1$，知 $j_{n-1}=2$，如此类推 $j_2=n-1$，$j_1=n$，可能不为 0 的乘积项对应的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$，它的逆序数为 $J=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由此可见

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

例 1.4 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证 记 $D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n,1} & \cdots & d_{k+n,k+n} \end{vmatrix}$,

其中

$$d_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,k);$$
$$d_{k+i,j}=c_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,k);$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n);$$
$$d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项, $(-1)^R d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$, R 是排列 $r_1r_2\cdots r_kr_{k+1}\cdots r_{k+n}$ 的逆序数,由于 $d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n)$,可见 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 均不可能大于 k 值,否则该项为 0,故 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取,从而 $r_{k+1},r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中选取,于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i=r_i, q_i=r_{k+i}-k, 1\leqslant r_i\leqslant k, k+1\leqslant r_{k+i}\leqslant k+n$, R 也就是排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数,以 P,Q 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 与 $q_1q_2\cdots q_k$ 的逆序数,则有 $R=P+Q$,于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{P+Q}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\Big(\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^Q b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\Big) \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}D_2 \\ &= D_1D_2. \end{aligned}$$

由于数的乘法是可交换的,所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换,例如四阶行列式中乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$,一般 n 阶行列式中乘积 $a_{1j1}a_{2j2}\cdots a_{njn}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 1.2 n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证 该项中任意两元素互换，行下标与列下标同时对换，由定理1.1知 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性不变，如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$（逆序数为0），排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$（逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由定理1.2可知，当取定一个列下标的排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 时（当然也可以取定一个行下标的排列 $p_1p_2\cdots p_n$），行列式的定义可写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \quad (1\text{-}5)$$

在4级行列式 D 中取定列下标的排列2413，我们有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)+\tau(2413)}a_{p_12}a_{p_24}a_{p_31}a_{p_43}.$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列（相当于取定 $q_1q_2\cdots q_n=12\cdots n$），而相应行下标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$，于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \quad (1\text{-}6)$$

线性代数讨论的问题，往往是在同一个数域里进行的，我们介绍一下数域的概念.

数域的定义 设 P 是一个含有0和1的数集，如果对任意的 $a,b\in P$（a,b 可相同，也可不同），我们有 $a+b\in P$，$a-b\in P$，$ab\in P$，而且，当 $b\neq 0$ 时，还有 $\frac{a}{b}\in P$，则称 P 为一个数域.

数域的定义很简单，就是一个含有0、1，对加、减、乘、除（除数不为0）四则运算都封闭的数集.

行列式的元素、线性方程组的系数以及后面矩阵的元素等都取之某一个固定数域.

例 有理数集 Q、实数集 R. 复数集 C 都是数域.

自然数集 $N=\{1,2,\cdots\}$，整数集 $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 不构成数域.

例 数集 $P=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b$ 为有理数$\}$ 构成一个数域.

事实上，首先我们有 $0=0+0\sqrt{2}\in P$，$1=1+0\sqrt{2}\in P$，其次，对任意的 $a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}\in P$，我们有

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in P.$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in P.$$

进而，当 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时，（这时，我们说，$a_2-b_2\sqrt{2}$ 也不为0，否则就会有 $a_2=b_2\sqrt{2}$，如果

$b_2 \neq 0$,则$\sqrt{2}=\frac{a_2}{b_2}$,与$\sqrt{2}$为无理数矛盾,如果 $b_2=0$. 则 $a_2=b_2\sqrt{2}=0$,从而 $a_2+b_2\sqrt{2}=0$,也是矛盾,所以,$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$),我们有 $\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=\frac{(a_1a_2-2b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{2}}{a_2^2-b_2^2}\in P$.

1.3 行列式的性质

直接从定义计算行列式的值有时是相当麻烦的,下面我们研究行列式的性质.

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行换成同序数的列得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式的值与它的转置行列式的值相等.

证 记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按行列式定义

$$D'=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

性质 1 说明行列式对行成立的性质对列也成立,即行列式的行与列具有同等地位.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式的值反号.

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按式(1-6)计算，对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 I 为排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数，在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p,q$ 时，第 j 列元素取 a_{ij}，第 p 列元素取 $a_{i_q q}$，经 q 列元素取 $q_{i_p p}$)，其中 I_1 为排列 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数，而

$$i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$$

与

$$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$$

只经过一次对换，由定理 1.1 知，$(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号，又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots q_{i_q q} \cdots q_{i_p p} \cdots q_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots q_{i_p p} \cdots q_{i_q q} \cdots q_{i_n n},$$

所以对于 D 中任一项，D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等，又 D 与 D_1 的项数相同，所以 $D=-D_1$.

交换行列式第 i 行和第 j 行两行，记作 $r(i,j)$，交换行列式第 i 列和第 j 列两列，记作 $c(i,j)$.

推论　若行列式有两行(列)元素对应相等，则行列式的值为零.

利用行列式的定义不难证明以下 4 条性质.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行(列)乘以数 k，记作 $r(i(k))[c(i(k))]$.

性质 4　行列式中若有两行(列)元素对应成比例，则此行列式的值为零.

性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和，例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行(列)的元素乘以数 k,加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 i 行(列)上的元素加到第 j 行(列)对应元素上,记作 $r(j+i(k))$[$c(j+i(k))$],放在等号的上面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r(j+i(k))} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

例 1.5 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c(1,3)} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r(4+1(5))]{r(2+1(-1)),} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 18 & -23 & -24 \end{vmatrix} \xlongequal{r(2,3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 18 & -23 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r(4+2(-18))]{r(3+2(4))} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r(4+3(5))} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -40.$$

例 1.6 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ a & 0 & a & b \\ 0 & a & b & a \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}0&b&0&-b\\b&0&-b&0\\a&0&a&b\\0&a&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b&0&0\\b&0&0&0\\a&0&2a&b\\0&a&b&2a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&b\\b&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2a&b\\b&2a\end{vmatrix}$$

$$=-b^2(4a^2-b^2).$$

1.4　行列式的计算

定义 1.6　在行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序排成一个 $n-1$ 级的行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 1.6 可知,A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关.

引理　在 n 阶行列式 D 中,如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零,那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证　先证 $i=1,j=1$ 的情形,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

对一般情形,只要适当交换 D 的行与列的位置,即可得到结论.

定理 1.3 行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由定理 1.3 知

$$D=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2\times2-4\times(-6-15)=88.$$

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$