首都师范大学
数学教学系列丛书

数学分析简明教程

王昆扬 著

高等教育出版社

首都师范大学
数学教学系列丛书

数学分析简明教程

shuxue fenxi jianming jiaocheng

王昆扬 著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书共八章。

第一章“实数的十进表示及运算”严格讲述初级中学数学课本叙述的有理数、无理数和实数的概念。严格讲述数列极限的概念。使用实数的十进表示，借助极限概念，用“算数的方式”处理正数的“幂运算”。讲清楚高级中学课本中所说的指数函数。

第二章“函数”是中学数学对于函数概念的讨论的深化。严格介绍和讨论函数的连续性等概念，顺带给出了指数函数的解析方式的定义。同时介绍 $\mathbb{R}^n$ 的基本拓扑概念。

第三章“微分学”从“$\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射”出发，严格讲述导数概念。

第四章“积分学”系统讲解 Lebesgue 积分理论。包括测度、可测函数、积分的定义和基本理论。其中包括 $\mathbb{R}^n$ 上积分的变量替换法，并介绍线段上几乎连续函数的积分的 Riemann 算法（经典的 Riemann 积分）、微积分基本定理及以其为基础的积分算法。

第五章、第六章、第七章，这三章讲述积分学的应用。

第五章讲两方面的问题。一方面是如何计算 $\mathbb{R}^n$ 中常见几何体的体积。另一方面的内容是一些常见的积分以及积分的极限的计算，兼论及可积函数用光滑函数近似的问题。

第六章讲述 $\mathbb{R}^n$ 中的 k $(1 \leqslant k < n)$ 维流形（C^1 类流形）上的测度和积分 —— 第一型积分。

第七章讲述 $\mathbb{R}^n$ 中的一维流形（曲线）上的第二型积分以及 $\mathbb{R}^3$ 中的二维流形（曲面）上的第二型积分。作为应用，给出了二维和三维情形的 Brouwer 不动点定理的证明。

第八章“函数的级数展开”一方面讨论光滑函数的 Taylor 级数，另一方面对于可积函数（当然是 Lebesgue 可积函数）的 Fourier 展开做一个基本的介绍。

可作为大学数学系一、二年级本科生教材。

图书在版编目（C I P）数据

数学分析简明教程 / 王昆扬著. -- 北京：高等教育出版社，2015. 4

ISBN 978-7-04-042144-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教材Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 031691 号

策划编辑 蒋　青　　责任编辑 蒋　青　　封面设计 李树龙　　版式设计 于　婕
插图绘制 黄建英　　责任校对 杨凤玲　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm × 960 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	32.75	版　　次	2015年4月第1版
字　　数	610 千字	印　　次	2015年4月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	51.00 元

物 料 号　42144-00

序

自 1978 年以来, 首都师范大学数学科学学院在提高科研与教学水平的同时, 一直很注重教材建设, 已经组织出版了多部有一定影响的大学数学教材。本系列丛书既有原来出版教材的修订本, 也有近年来新编的教材。

随着我国高等教育的快速发展, 师资水平不断提高, 大学教育也从精英教育发展到今天的普及教育。伴随着这些变化, 大学数学教学的内容与体系也在逐步调整。为提高本科与研究生的教学水平, 近 10 年, 我们注重聘请学术水平高、长期在教学一线耕耘, 有丰富教学经验的国内外知名教授讲授本科与研究生课程。他们在首都师范大学数学科学学院的教学中, 将原来在国内外知名学府的教学经验与现在的教学实践相结合, 有的对原来出版的教材进行了修订, 有的编写出了新的教学讲义。这些修订的教材和新编讲义不仅饱含了作者对数学研究的感悟, 也凝聚了他们长期、甚至一生对数学教育的理解与经验。为了将这些宝贵的资源保留下来, 作者们将修订的教材和新编讲义再一次进行了精心的梳理, 形成了现在的系列丛书。

希望这套丛书不仅对首都师范大学的人才培养起到推动作用, 也对中国的数学人才培养有所帮助。我们借此机会感谢支持和帮助过首都师范大学数学学科建设与发展的前辈、同行们。我们也希望继续得到您们的支持与帮助, 推动首都师范大学的数学研究与教学水平不断提高。

李庆忠

2013 年 10 月于首都师范大学

前言

本书是在多年教学实践的基础上写成的，现纳入首都师范大学数学教学系列丛书。

我们十分注意中学数学与大学一年级数学的紧密衔接。书中吸收了德国数学家、数学教育家 F.Klein (F. 克莱因) 在《高观点下的初等数学》(舒湘芹等译，复旦大学出版社 2011 年版) 中的一些重要观点。例如，克莱因在对于实数的论述中 (见第一卷 28 页)，提到"关于实数和直线点之间的一一对应的公理，通常称为 Cantor (康托尔) 公理"。本书第一章就是在这条公理的基础上，对于我们初级中学课本所讲的**无限循环小数叫做有理数** (rational number)，**无限不循环小数叫做无理数** (irrational number)。**有理数和无理数统称实数** (real number)，进行了严格的论述。本书把英文 rational number 译成**比例数**，把 irrational number 译成**非比例数**。在承认学生对于比例数已具有完整的认识 (这是小学毕业的水平) 的基础上，引入比例数列的极限的概念。通过定义 (即规定) 十进数之间的距离 (这借助于定义十进数之间的加、减运算来实现)，把极限概念推广到全体十进数的集合中。严格证明每个十进数都是一个特定的比例数列 (叫做与此十进数对等的标准列) 的极限。从而完成实数的十进表示的严格论述，并严格地证明在实数集中，每个基本列都收敛，即实数集 (作为距离空间) 的完备性。

人类用十进数表示实数的实践，已经具有千年的历史，已成常识。而它的严格理论，却迟至 19 世纪才由著名的德国数学家 Cantor 奠定。用 Cantor 的思想来严格讲述实数的十进表示，比传统的 (特别是苏俄的) 教科书中用 Dedekind (戴德金) 分割 (cut) 表示实数的办法要自然、明白、实用得多，而且完全与中学数学紧密衔接。Dedekind 分割与中学数学所讲的实数概念是完全脱节的，而且远不如十进数实用。

使用实数的十进表示，借助极限概念，就容易用"算数的方式"处理正数的"幂运算"。这就是第一章 §4 的内容。这样，高级中学课本中所说**形如 a^x 的函数叫做指数函数**才有了理性内容。这部分内容，按当前的中学课程水平，不可能在中学课本里讲述。在一般大学课本中，也少见有较系统的叙述。这一节对于幂函数和指数函数的初等定义，对于学生的"直观"认识的理性提升是有好处的。同

时也为后面用解析方式定义指数函数的办法，提供了一个对照。

第二章的内容是中学数学对于函数概念的讨论的深化，严格地讨论函数的连续性等概念，顺带给出指数函数的解析方式的定义。这一章还介绍 $\mathbb{R}^n$ 的基本拓扑概念。

第三章讲微分学的基本理论。此处强调，“微分”这个概念，实际指的是“$\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射在一点附近的局部**线性近似**”，其核心是“导数”($n\times m$ 矩阵)。过于形式化地解释 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 等，除了引起误解外，没有太多好处 (当然，在后面要讲的积分的计算中，特别是积分的变量替换中，这些符号照常使用)。把导数 (derivative) 叫做“微分之商 —— 微商”，完全是局限于一元函数的形式化的说法，未见得准确，而且根本不能适应多变量情形。所以本书不提“微商”。

第四章讲积分学的基本理论。我坚持认为，Lebesgue (勒贝格) 积分应该成为 21 世纪数学分析课程的内容，Riemann (黎曼) 积分仅为 Lebesgue 积分的简单特例。我认为“反常积分”的说法过时了，数学分析课程中的积分，都是正常的。本书把极限 $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 写成 $\displaystyle\int_0^{\to\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，明确表示了“极限”之意。传统教材去掉积分上限中的“$\to$”并称之为反常积分。“反常”之意，用于这个在 $\mathbb{R}$ 上不可积的函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，马马虎虎可以接受。可是对于定义 Gamma 函数那样的完全正常的积分 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\ (x>-1)$，到 21 世纪还叫做“反常积分”，似乎不合时宜了。

第五章、第六章、第七章，这三章讲述积分论的应用。

第五章讲两方面的问题。一方面是如何计算 $\mathbb{R}^n$ 中常见的几何体的体积。这里，常见的几何体依第四章的定义，必是可测集，说其体积，指的就是测度。注意，在经典 Riemann 积分理论中，$\mathbb{R}^n$ 中常见的几何体的体积并不是逻辑上先行定义，然后再用积分法进行“测量”(即计算) 的。而是以可积为前提，积分算出来就是“体积”。这就给测量 $\mathbb{R}^3$ 中的立体的体积以及 $\mathbb{R}^2$ 中平面图形的面积，先天地带来理论上的困窘和实践上的困难。这一章的另一方面的内容是计算一些常见的积分以及计算一些重要的积分的极限，并且论及可积函数用光滑函数近似的问题。

第六章严格讲述 $\mathbb{R}^n$ 中的 k $(1\leqslant k<n)$ 维流形 (C^1 类流形) 上的测度和积分 —— 第一型积分。编写这一章时，许多内容是新编的而不是其它常见教科书上现成的材料。这章中的计算实例重点涉及 $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$ 中的 2 维曲面上的测度和积分。

第七章讲述 $\mathbb{R}^n$ 中的一维流形 (曲线) 上的第二型积分以及 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维流形 (曲面) 上的第二型积分。其中，严格给出了 2 维和 3 维情形的 Brouwer (布劳

威尔) 不动点定理的证明 (参考了张筑生教授的《数学分析新讲》)。这里, 没有一般地讨论抽象的流形上的第二型积分。之所以不敢一般地讨论抽象的流形上的第二型积分, 是因为自己过去得到的教训。当初给 1996 级学生讲课时, 曾在讨论班上花了四个星期的课时, 详细讨论过外微分形式 (当时主要依据北京大学的课本和 Spivak (斯皮瓦克) 的《流形上的微积分》), 但事后学生反映“只念了一堆符号”。自我检讨, 是自己对于这部分内容的理解太肤浅, 毫无心得体会, 照别人的本子生搬硬套, 致使学生白白浪费了宝贵的时间。十多年过去了, 本人在这方面不但毫无提高, 而且以前苦念的东西也都忘却了。这是我不能讲授一般流形上的第二型积分的主要原因。

第八章, 函数的级数展开。一方面讨论光滑函数的 Taylor (泰勒) 级数, 这主要应用于高级中学学过的初等函数; 另一方面讨论可积函数 (当然是 Lebesgue 可积函数) 的 Fourier (傅里叶) 展开。Fourier 展开理论是现代分析数学理论中具有重要意义和实用价值的一大分支, 已经取得丰硕成果。对这一理论做一个基本的介绍是很有必要的。

特别希望, 随着科学技术的不断发展, 数学分析课程的学术水平也不断提高。

王昆扬

2014 年 10 月

关于符号的说明

我们使用常用的记号 “:=” 和 “=:”. 式子 $a := b$ 和 $b =: a$ 都表示 “a” 是用 “b” 定义的, 也就是说, 挨着冒号的符号是用挨着等号的表达式来定义的.

记号 $\{x: x$ 满足的条件$\}$ 表示一个集合, 该集合的元素用字母 x (当然可换用别的字母或符号) 表示, 冒号后面的语句确定 x 的属性. 也就是说, 这个集合就是具有所述属性的元素的全体.

本书使用以下符合国家标准的通用数学记号:

$\mathbb{N}_+$: 正整数集.

$\mathbb{Z}$: 整数集.

$\mathbb{Q}$: 比例数 (rational numbers) 集.

$\mathbb{R}$: 实数集, 1 维 Euclid(欧几里得) 空间 (拓扑及代数说法), 实直线 (几何说法).

$\mathbb{C}$: 复数集, 复平面 (几何说法).

另外的一些通用的数学记号是

对于实数 x, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (叫做 x 的整部).

card A: 集合 A 的基数.

$\mathbb{R}^n$: n 维 Euclid 空间.

若集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度.

若 E 是集合, 则 χ_{E} 代表 E 的特征函数, 即

$$\chi_{E}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

a.e. “表示几乎处处 (almost everywhere)” 或 “几乎每个 (almost every)”.

目录

第一章　实数的十进表示及运算

§1　比例数列的极限

人民教育出版社出版的《中学数学课本八年级上册》, 82 页中写道:

"无限不循环小数又叫做无理数 (irrational number). ⋯ 有理数和无理数统称实数 (real number)."

以前的中学课本中还提到: "无限循环小数叫做有理数 (rational number)."

同学们经过课本的学习, 对于这些概念能够达成很好的感性认识. 但是只能限于 "感性的" 程度. 因为课本中对于 "无限不循环小数", 甚至 "无限循环小数", 都只能通过实例做些描述, 根本不可能谈论它们的确切含义.

当前的中学课本无法严格讲述什么是 "无限小数", 其根本原因是缺少极限概念.

关于 "rational number" 是什么意思, Richard Courant 和 Fritz John 的著名教科书 *Introduction to Calculus and Analysis Volume I* (Springer-Verlag, 1999) 第 2 页有一个脚注, 好像是专门对企图把 "rational number" 翻译成非英语言的人说的, 他们说: The word "rational" here does not mean reasonable or logical but is derived from the word "ratio" meaning the relative proportion of two magnitudes. 人们习惯把 rational number 翻译成 "有理数", 把 "irrational number" 翻译成 "无理数", 而且还能找出许多强词夺理的理由. 这不是数学问题. 在本教程中我坚持把 rational number 翻译成 "比例数", 把 irrational number 翻译成 "非比例数".

§1.1　比例数的本原表示

承认同学们都已经很好地了解了比例数. 比例数是怎样表示的? 比例数就是 "分数", 即整数与非零整数的比 (ratio).

大家都习惯于使用阿拉伯数字的十进位计数制, 简称为十进制. 如果不做声明, 我们默认使用十进制.

复习一下熟知的符号. 用 $\mathbb{N}$ 代表自然数集, $\mathbb{N}$ 的元素叫做 "自然数", 即 natural number, 这就是使用 (粗体) 字母 N 表示这个集合的缘由. 全体正整数的集

合记做 $\mathbb{N}_+$. 用 $\mathbb{Z}$ 代表整数集, 并用 $\mathbb{N}_+$ 代表正整数集. 注意

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \bigcup \{0\}.$$

全体整数的集合记做 $\mathbb{Z}$ (德文 Zahlen 的首字母).

全体比例数的集合记做 $\mathbb{Q}$ (英文 quotient 的首字母). 由于任何 $a \in \mathbb{Z}$, 都可以看成是分数 $\dfrac{a}{1}$, 即 $a = \dfrac{a}{1}$, 所以, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

既然比例数就是分数, 那么中学课本中提到的 "无限循环小数叫做比例数 (原文为有理数)" 就是对于比例数规定了另一个 "表示方法", 目前我们对于这个表示方法还缺乏真确的了解. 为了与这个表示方法相区别, 我们称熟知的 "分数" 为比例数的**本原表示**.

如果一个分数 r (比例数的本原表示) 的分母是 10^m $(m \in \mathbb{N}_+)$, 那么, r 可以写成小数点后只有 m 位的 (十进制的) 有限小数的形式, 即

$$r = p + 0.a_1 \cdots a_m, \tag{1.1}$$

其中, $p \in \mathbb{Z}$, $a_1, \cdots, a_m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 所以, 我们把形如 (1.1) 的十进 "有限小数" 也叫做比例数 r 的本原表示.

§1.2 比例数列以及比例数列的极限

先叙述一个重要的数学概念 —— **映射**.

定义 1.1 设 A 和 B 都是不空的集合 (简称为 "集"). 若有一个法则, 使得对于 A 的任意一个元素 (简称为 "元") a, 按照这个法则, 有 B 中唯一一个元素 b 与之对应, 那么我们就说这个法则是从 A 到 B 的映射. 可以任意选定一个英文字母来代表映射. 例如用字母 f 表示. 我们把 "f 是从集 A 到集 B 的映射" 这个语句记做 "$f: A \longrightarrow B$." 设 a 是 A 的一个元 (即 $a \in A$). 那么, 映射 f, 使得在 B 中有唯一的一个元 b 与 a 相对应, 把 b 叫做 a 在映射 f 下的**像**, 记做 $f(a)$, 即 $b = f(a)$, 并说 f 把 a 映到 b, 称 a 为 b 在映射 f 下的**原像**. 用符号 $\{f(a): a \in A\}$ 表示 A 的一切元的像的全体所成的集合, 记为 $f(A)$, 叫做 A 在 f 下的**像** (或**值域**).

如果 f 把不同的元映到不同的元, 也就是说, 只要 $a, a' \in A, a \neq a'$, 就成立 $f(a) \neq f(a')$, 那么就称 f 为**单射**; 如果 B 的每个元都是 A 的某个 (可以是多个) 元的像, 那么就称 f 为**满射**. 如果 $f: A \longrightarrow B$ 既是满射又是单射, 那么就称 f 为**满单射**, 也叫做**一一映射**或**可逆映射**. 这时, 从 B 中的元 b 到它在映射 f 下的原像 a 的对应构成一个从 B 到 A 的满单射, 记做 f^{-1}, 叫做 f 的**逆映射**.

例 1.1 数 (shǔ) 数 (shù) 的数学本质是建立集合与正整数集合的一个 "前集" 的满单射.