數學辭典

數學辭典

辭書之部

I. 辭典

一畫

一

【一】One 或 Unity.〔算〕數之單位也．凡其他諸數皆可由此數用加法而得之．亞拉伯以 1 記之，羅馬以 I 記之，希臘以 α' 記之．

【一位】Units' place.〔算〕亦稱個位，即記數時自右第一位也．

【一次式】Expression of the first degree 或 Linear expression.〔代〕代數式之最高次項爲一次者，例如 $x+3$，$a+x+y$ 是也．

【一次項】Term of the first degree.〔代〕項之祇含一文字因數者．例如 $2x$ 及 $35y$ 是也．

【一位數】Units.〔算〕十以下諸數之謂也．

【一乘冪】First power.〔算〕〔代〕一乘冪爲對於二乘冪，三乘冪等而言．某數或式之一乘冪，即本數或式之謂．例如 3 之一乘冪爲 3^1 即 3 之本身，$ax+b$ 之一乘冪即爲 $ax+b$．

【一項式】Monomial 或 Monomial expression.〔代〕亦稱獨項式或單項式，即代數式之祇有一項者．例如 a 及 $5x^2y$ 是也．

【一次函數】Function of the first degree 或 Linear function.〔數〕函數內自變數之最高乘冪爲一次者．例如 $y=ax+b$，y 爲 x 之一次函數；又如 $z=ax+by+c$，z 爲 x,y 之一次函數．

【一價函數】One-valued function 或 Single-valued function.〔數〕於 $y=f(x)$，對於自變數 x 之一值，函數 y 若祇有一值與之相應，則 y 爲一價函數；若有二值與之相應，則爲二價函數；若有數值與之相應，則爲多價函數．例如於 $y=3x^2+4$，與 x 以一值，y 亦祇有一值與之相應，故 y 爲一價函數；而於 $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$，對於 $a,-a$ 間 x 之各值，y 爲二價函數．

【一之三乘根】Cube roots of unity.〔代〕即一之立方根，見該條．

【一之立方根】Cube roots of unity.〔代〕二項三次方程式 $x^3-1=0$ 之三根，謂之一之立方根或三乘根．因 $x^3-1=$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x-1=0$或$x^2+x+1=0$.故$x=1$, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, 或$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, 而 i 表$\sqrt{-1}$. 是卽一之立方根，後二者爲複虛根。此三根有種種性質：(1)一複虛根之平方等於他複虛根。此實行平方卽可知之。又可證之如次：——若ω爲 $x^3-1=0$ 之根，則$\omega^3=1$，平方之則得$\omega^6=1$ 或 $(\omega^2)^3=1$，故ω^2 適合 $x^3-1=0$ 而爲其一根。故一之立方根常以 $1, \omega, \omega^2$ 表之。 (2)因 ω 爲$x^2+x+1=0$ 之根，故$\omega^2+\omega+1=0$。卽一之立方根之和爲零。此又可證之如次：——因方程式之根之和，等於其次項之係數而變其號者。今 x^2 之係數爲零，故$1,\omega,\omega^2$之和爲零。 (3) 因$1\cdot\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$，故一之立方根之積爲 1。此又可證之如次：——因方程式之根之積，等於其末項而變其號者。今末項爲-1，故$1,\omega,\omega^2$ 之積爲1。 (4)ω之任何整乘冪，可以 $1,\omega$或ω^2 代之。因若 n 爲 3 之倍數，命爲 3m，則$\omega^n=\omega^{3m}=1$。若 n 不爲 3 之倍數，則必爲 $3m+1$ 或 $3m+2$ 之形式。若$n=3m+1$，則 $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}\cdot\omega=\omega$。若 $n=3m+2$，則 $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}\cdot\omega^2=\omega^2$。例如 $\omega^6=(\omega^3)^2=1$, $\omega^7=\omega^6\cdot\omega=\omega$, $\omega^8=\omega^6\cdot\omega^2=\omega^2$。(5)任何數 a 之三個立方根，可以 $1,\omega,\omega^2$ 乘其實根而得之。卽 $\sqrt[3]{a}, \omega\sqrt[3]{a}, \omega^2\sqrt[3]{a}$ 是也。例如 27之實根 3 外，其他二複虛根爲$\frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}$與$\frac{-3-i3\sqrt{3}}{2}$。

【一之 n 乘根】 N^{th} roots of unity.

〔代〕二項方程式 $x^n-1=0$ 之n個根謂之一之 n 乘根。其性質如次：(1)若 n 爲奇數，則有一實根，卽 1 是也，其他諸根皆爲複虛數。因以大於 1 之數代 x，則方程式 $x^n-1=0$ 之左邊爲正數；又以小於 1 之數代 x，則左邊爲負數。故除 1 以外任何正數任何負數皆不適合$x^n-1=0$。 同樣，若 n 爲偶數，則$+1$與 -1 爲 $x^n-1=0$ 之實根，其他諸根皆爲複虛數。 (2)若 n 爲奇數則諸複虛根之代數和爲-1。因普通方程式諸根之總和，爲第二項之係數而反其號者。今 $x^n-1=0$ 之第二項之係數爲 0，且祇有一實根1，故其諸複虛根之代數和爲-1。

同理，若n爲偶數，則諸複虛根之和爲零。 (3)若 n 爲奇數，則諸複虛根之連乘積等於 $+1$。 因普通方程式諸根之乘積，等於其不含 x 之項而反其號者，此時卽 $+1$ 是也；而實根爲 $+1$，故諸複虛根之連乘積亦爲 $+1$。 同樣，若 n 爲偶數，諸複虛根之連乘積亦爲$+1$。同理可證明由諸根取相異二根之和，相異三根之和，…，相異 r (但 $r<n$) 根之和亦各爲零。 (4)方程式$x^n-1=0$ 無等根。因 $f(x)=x^n-1$, $f'(x)=nx^{n-1}$；而 $f(x)$, $f'(x)$ 無含 x 之公因數，故無等根。 (5)若α爲$x^n-1=0$ 之複虛根，則 α^m 亦爲一根，m 爲任意整數。因$\alpha^n=1$，故$(\alpha^n)^m=1$，或 $(\alpha^m)^n=1$，卽 α^m 爲 $x^n-1=0$ 之根。 (6)若 m 與 n 互爲素數，則

方程式 $x^m-1=0$ 與 $x^n-1=0$ 不能有除 1 以外之公根。若設 α 爲 $x^m-1=0$ 與 $x^n-1=0$ 之公根，則 $\alpha^m=1$，$\alpha^n=1$，而 $\alpha^{mb}=1$，$\alpha^{na}=1$，其中 a,b 爲適合 $mb-na=\pm1$ 之關係之數（可化 $\frac{m}{n}$ 爲連分數而求之）.故 $\alpha^{mb-na}=1$，即 $\alpha^{\pm1}=1$ 或 $\alpha=1$. 即 1 爲二方程式惟一之公根. (7)若 h 爲 m 與n之最高公因數，則 $x^h-1=0$ 之根爲 $x^m-1=0$ 與 $x^n-1=0$ 之公根. 命 $m=hm'$，$n=hn'$ 則 m' 與 n' 互爲素數. 故可求得整數 a,b，使 $m'b-n'a=\pm1$. 故 $mb-na=\pm h$. 故若 α 爲公根，則 $\alpha^m=1$，$\alpha^n=1$ $\alpha^{mb-na}=1$ 或 $\alpha^{\pm h}=1$. 此即表 α 爲 $x^h-1=0$ 之根. (8)若 α 爲 $x^n-1=0$ 之複虛根，n 爲素數，則諸根爲 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}$. 由 (5) 知 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}$ 皆爲此方程式之根。且此諸根皆不相同；因若設 $\alpha^p=\alpha^q$，則 $\alpha^{p-q}=1$. 然由 (6)，因 n 與 $p-q$ 互爲素數，故 $x^n-1=0$ 與 $x^{p-q}-1=0$ 不能有公根. 故方程式 $\alpha^{p-q}=1$ 不能成立，而諸根皆含於級數 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots\alpha^{n-1}$ 內。(9)若 n 爲由因數 p,q,r,⋯ 而成之非素數，則方程式 $x^p-1=0$，$x^q-1=0$，$x^r-1=0$，⋯ 之根皆爲 $x^n-1=0$ 之根. 若 α 爲 $x^p-1=0$ 之根，則 $\alpha^p=1$，而 $(\alpha^p)^{qr\cdots}=1$，或 $\alpha^n=1$，即 α 爲 $x^n-1=0$ 之根. (10)若 n 爲由因數 p,q,r,⋯⋯而成之非素數，則方程式 $x^n-1=0$ 之根爲乘積 $(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{p-1})(1+\beta+\cdots+\beta^{q-1})(1+\gamma+\cdots\gamma^{r-1})\cdots$ 之 n 項，但 α 爲 $x^p-1=0$ 之根，β 爲 $x^q--=0$ 之根，γ 爲 $x^r-1=0$ 之根，⋯積之任意項，例如 $\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$，爲 $x^n-1=0$ 之根，因 $\alpha^{an}=1$，$\beta^{bn}=1$，$\gamma^{rn}=1$，⋯，故得 $(\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots)^n=1$ 也。又積中無二項相等者；若命 $\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$ 等於他項 $\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}\cdots\cdots$，則 $\alpha^{a'-a}=\beta^{b'-b}\gamma^{c'-c}\cdots$ 此方程式之第一邊爲 $x^p-1=0$ 之根，第二邊爲 $x^{qr\cdots}-1=0$ 之根.因 p 與 $qr\cdots$ 互爲素數.故由(6)，此二方程式不能有公根；而 $\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$ 不能等於 $\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}\cdots$. (11)若 $n=p^aq^br^c\cdots$，而 p,q,r,⋯ 爲n之素因數，則 $x^n-1=0$ 之根爲形如 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 之n 乘積，而 α 爲 $x^{p^a}-1=0$ 之根，β 爲 $x^{q^b}-1=0$ 之根，γ 爲 $x^{r^c}-1=0$ 之根，⋯ 此不過爲(10)之擴張者，其理全同. 由上所述，知一之 n 乘根之決定可化爲 n 爲素數或素數之乘冪而決定之.

【一之固有根】Primitive roots of unity.〔代〕方程式 $x^n-1=0$ 之根，不爲相似低次方程式之根者，謂之該方程式之固有根，或一之固有 n 乘根. 例如於 $x^6-1=0$，知 $x^2-1=0$ 與 $x^3-1=0$ 之根爲 $x^6-1=0$ 之根，即 ±1 與 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ 是也. 解 $x^2-x+1=0$，求得其他二根爲 $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$，是即 $x^6-1=0$ 之固有根也. 一之固有根有次

述之性質：(1) n 之各次數常有一之固有根．(2)若 α 爲一之固有 n 乘根，則 α^r 亦爲一之固有 n 乘根，但 r 須與 n 互爲素數．由是，若知一之固有 n 乘根之一，則可求得其他諸一之固有 n 乘根．

【一元方程式】 Equation with one unknown number.〔代〕方程式之祇含一未知數者．如 $x-5=7$ 爲一元一次方程式，$ax^2+bx+c=0$ 爲一元二次方程式，$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 爲一元 n 次方程式。

【一次方程式】 Equation of the first degree，或 Simple equation，或 Linear equation.〔代〕方程式內未知數之最高乘羃爲一者之謂也．例如 $ax+b=0$ 爲一元一次方程式，其解法爲 $x=-\frac{b}{a}$。又如 $ax+by+c=0$ 爲二元一次方程式，其解法不定。 一次方程式又稱直線方程式，因其圖爲一直線故也。

【一自變數函數】 Function of one independent variable.〔數〕函數之祇含一自變數者．例如 $y=ax^2+bx+c$，y 爲一自變數 x 之函數．

【一直角三面角】 Rectangular trihedral angle.〔幾〕三面角之有一直角二面角者謂之一直角三面角。

【一次不定方程式】 Indeterminate equation of the first degree.〔代〕不定方程式之爲一次者之謂也． 一次不定方程式之未知數限於正整數時，其解答之數爲有限． 凡含二未知數之一次不定方程式皆可化爲 $ax\pm by=\pm c$ 之形式，然 $ax+by=-c$ 無正整數之解答，而 $ax-by=-c$ 與 $by-ax=c$ 同，故僅研究方程式 $ax\pm by=c$ 即可．且可假定 a,b,c 無公因數，a 與 b 互爲素數．因若 a,b 有公因數 m，而 c 不能以 m 整除之，即 $ax\pm by$ 可以 m 整除之，而 c 不能以 m 整除之，故方程式 $ax\pm by=c$ 不能有正整數之根；若 a,b,c 有公因數，則可用除法以去之． I.求方程式 $ax-by=c$ 之普通解法。 將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數，而命 $\frac{p}{q}$ 爲適在 $\frac{a}{b}$ 前之近數，則 $aq-bp=\pm1$。所與之方程式可書之爲 $ax-by=\pm c(aq-bp)$，$\therefore a(x\mp cq)=b(y\mp cp)$。因 a 與 b 無公因數，故 $x\mp cq$ 必可以 b 整除之；命其商爲整數 t，則 $\frac{x\mp cq}{b}=\frac{y\mp cp}{a}=t$，即 $x=bt\pm cq$，$y=at\pm cp$。 (i)當 $aq-bp=1$，則 $x=bt+cq$，$y=at+cp$；由是與 t 以任何正整數，或數值小於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中之小者之負整數，可得正整數之解法，故其解法無限。 (ii)若 $ap-bq=-1$，則 $x=bt-cq$，$y=at-cp$；由是與 t 以大於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中之大者之正整數，可得正整數之解法，故其解法無限。 (iii)若 a 或 b 爲 1，則分數 $\frac{a}{b}$ 不能化成分子爲 1 之連分數，而

上法不能用.然此時解法可由視察得之.如$b=1$，則方程式變為$y=ax-c$，其解法可與 x 以大於$\frac{c}{a}$之正整數而得之，故其解法無限。 II.求 $ax+by=c$ 之普通解法。 其解法與 I 相似。 (i)若 $aq-bp=1$，則 $x=cq-bt$，$y=at-cp$；由是其正整數之解法可與 x 以大於$\frac{cp}{a}$而小於$\frac{cq}{b}$之正整數而得之，故其解法有限。 (ii)若 $aq-bp=-1$，則 $x=bt-cq$，$y=cp-at$；由是其正整數之解法可與 x 以大於$\frac{cq}{b}$而小於$\frac{cp}{a}$之正整數而得之，故其解法有限。 (iii)若 a 或 b 為 1，則與 I 之(i)同。

〔例〕求 $29x-42y=5$ 之正整數之解法。

化$\frac{42}{29}$為連分數，$\frac{42}{29}$ 之前之近數為$\frac{13}{9}$；故得 $29\times13-42\times9=-1$. $\therefore$ $29\times65-42\times45=-5$，與所與方程式相合，則得 $29(x+65)=42(y+45)$； $\therefore$ $\frac{x+65}{42}=\frac{y+45}{29}=$整數 t.故普通解法為$x=42t-65$，$y=29t-45$。

【一次有向量函數】 Linear vector function.〔數〕二有向量和之函數等於此二有向量之函數之和時，則此有向量之連續有向函數謂之一次有向量函數。即命 ρ_1，ρ_2 為二有向量，若 $f(\rho_1+\rho_2)=f(\rho_1)+f(\rho_2)$，則函數$f$謂之一次有向量函數。

【一次聯立方程式】 Simultaneous equations of the first degree.〔代〕即聯立方程式之為一次方程式者。見聯立方程式條。

二畫

二

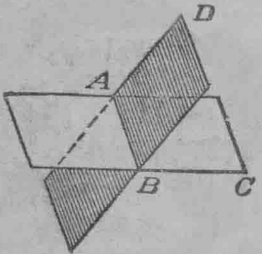
【二】Two〔算〕數名。爲一加一之結果。亞拉伯以 2 記之，羅馬以 II 記之，希臘以 β′ 記之。

【二次式】Quadratic expression.〔代〕代數式之含某文字之二乘羃或二以上文字之二次元者。例如 $5x^2-2x+3$，$xy+y+4$，$xy-xz-z+1$ 皆是也。

【二次根】Second root.〔算〕〔代〕與平方根同。

【二次項】Term of the second degree.〔代〕項之含某文字之二乘羃或二文字之二次元者。如 $3x^2$，$7xy$ 是也。

【二面角】Dihedral angle.〔幾〕二相交平面間之角謂之二面角。二平面 AC，BD 爲二面角之面，其交線 AB 爲二面角之稜。二面角常以其稜或二面與稜表之，即以 AB 或 C－AB－D表之。二面角又可視爲其一面由他面之位置，以稜爲軸迴轉之所生者，而二面角之大小，不關於面之大，而依此迴轉之量之多少。二平面相交，生二組相等之二面角，謂之對稜二面角。於二面角之稜之任意一點，作各面之垂線，此二垂線間之角爲一定，而謂之二面角之平面角，二面角即用此角以測度之。



【二重根】Double roots.〔代〕若方程式有二根相等，則此根謂之二重根。例如方程式 $x^3-3x^2+4=0$ 可寫爲 $(x+1)(x-2)^2=0$。故此方程式有二根爲2，而 2 爲二重根。

【二乘比】Duplicate ratio.〔算〕〔代〕比 $2^2:5^2$ 謂之比 $2:5$ 之二乘比，而比 $a^2:b^2$ 謂之比 $a:b$ 之二乘比。

【二乘根】Second root.〔算〕〔代〕與平方根同。

【二乘羃】Second power.〔算〕〔代〕與平方同。

【二項式】Binomial 或 Binomial expression.〔代〕即由二項而成之式。例如 $x+a$，$2x^3+5y$ 是也。

【二進法】Binary scale.〔算〕〔代〕於記數時滿 2 即進位之法，謂之二進法，即以二爲記數底之記數法也。二進法用 0 及 1 二數字即足。例如於二進法所寫之 1101，即 $1\times2^3+1\times2^2+1$ 之意也。

【二十面體】Icosahedron.〔幾〕即二十平面所包圍之立體也。

二次曲面 Quadric 或 Quadric surface.〔幾〕x,y,z 之二次方程式之軌跡謂之二次曲面。任何二次曲面之方程式經適當之坐標之變換，可化成下列諸種如下：

球 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

扁橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a=b>c)$。

長橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b=c)$。

虛橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$。

單翼雙曲線體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

雙翼雙曲線體 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

橢圓的拋物線體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nz$。

雙曲線的拋物線體 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz$。

實二次錐面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$。

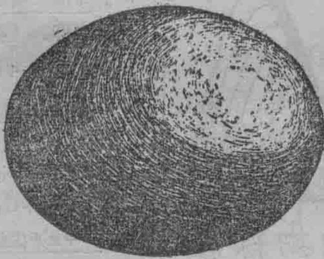
虛二次錐面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$。

橢圓的柱面 $\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

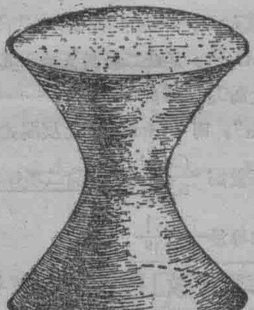
雙曲線的柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。

拋物線的柱面 $y^2=2px$。

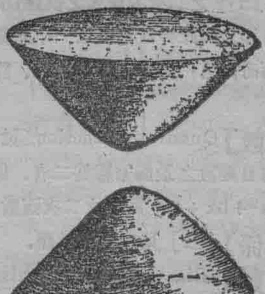
虛柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$。



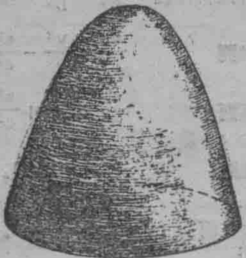
橢 圓 體



單翼雙曲線體



雙翼雙曲線體



橢圓的拋物線體

雙曲線的拋物線體

【二次曲線】Curve of the second degree.〔幾〕x, y 之二次方程式之軌跡，謂之二次曲線。因此等曲線可以一平面截一圓錐面而得之，故亦稱圓錐曲線。詳該條。

【二次函數】Quadratic function.〔數〕即函數內自變數之最高乘羃爲二者。例如 $y=ax^2+bx+c$，y 爲 x 之二次函數。

【二重關係】〔三〕見三角函數條。

【二項係數】Binomial coefficients.〔代〕二項係數者，依二項式之定理將 $(x+1)^n$ 展開時，x 之各乘羃之係數之謂，即 $1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \cdots\cdots, \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \cdots$ 是也。當 n 爲正整數時，此等係數等於 ${}_nC_1, {}_nC_2, {}_nC_3, \cdots, {}_nC_r, \cdots$，但 ${}_nC_r$ 爲由 n 物每次取 r 物之組合之數。二項係數之性質如次：(1)因 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_rx^r+\cdots+C_nx^n\cdots(\mathrm{I})$。$\therefore C_0=C_n=1, C_1=C_{n-1}=n, C_2=C_{n-2}=\frac{r(n-1)}{2!}, \cdots, C_r=C_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \cdots$。即由二項展開式兩端等距離之項之係數相等。(2)於(I)內命 $x=1$，則得 $2^n=C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n$。即 $(1+x)^n$ 之展開式諸係數之和爲 2^n。(3)於(I)內命 $x=-1$，則得

$$(1-1)^n=C_0-C_1+C_2-C_3+\cdots\cdots$$

$$\therefore C_0+C_2+C_4+\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots$$

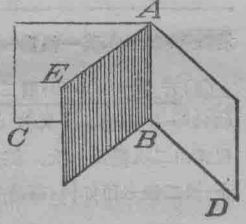
故 $(1+x)^n$ 之展開式內諸奇數項之係數之和等於諸偶數項之係數之和。(4)因 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$ 及 $(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots+C_0x^n$。於此二級數之積，其 x^n 之係數爲 $C_0{}^2+C_1{}^2++C_2{}^2+\cdots\cdots C_n{}^2$，而 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中 x^n 之係數爲 $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$。即諸二項係數之平方和等於 $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$。

【二項級數】Binomial series.〔代〕依二項式定理將 $(x+a)^n$ 展開之，其所得之級數謂之二項級數，即

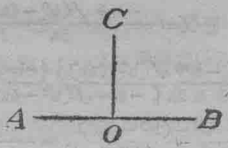
$$x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^rx^{n-r}+\cdots\cdots$$

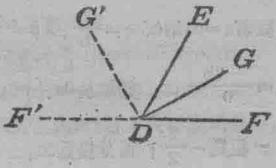
若 n 爲分數或負數,則此級數爲無窮級數。

【二等分面】Bisector.〔幾〕分一幾何量爲二等分之平面,謂之此量之二等分面,或平分面.普通多指二面角之二等分面.如圖,若二面角C-AB-E 及二面角 D-AB-E 相等,則 BE 爲二面角 C-AB-D 之二等分面·而二等分面內各點由二面角之二面之距離均等.



【二等分線】Bisector.〔幾〕分一幾何量爲二等分之直線,謂之此量之二等分線或平分線。如圖,若直線 AO, BO 相等,則 CO 爲 AB 之二等分線,





而 O 謂之二等分點。又如角 EDG, FDG相等,則DG爲角EDF之二等分線。普通所謂二等分線多指角之二等分線。而角之二等分線又稱爲內二等分線,其外角之二等分線稱爲外二等分線。內二等分線與外二等分線互相垂直。如圖 DG 爲內二等分線,DG′爲外二等分線,因 $\angle EDG=\frac{1}{2}\angle EDF$, $\angle EDG'=\frac{1}{2}\angle EDF'$, $\therefore \angle EDG+\angle EDG'=\frac{1}{2}(\angle EDF+\angle EDF')$, 即 $\angle GDG'=\frac{1}{2}\angle FDF'=\frac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s)=\text{rt.}\angle.\therefore DG\perp DG'$. 二等分線上各點與角之二邊之距離均等,故二等分線爲與角之二邊等距離點之軌跡。

【二等分點】Point of bisection.〔幾〕見二等分線條。

【二價函數】Two-valued function.〔數〕函數之對於自變數之一值,有二值與之相應者。見一價函數條。

【二十四面體】Tetrahexahedron.〔幾〕二十四個平面所包圍之立體也。

【二元方程式】Equation with two unknown numbers.〔代〕卽方程式之含二未知數者。如 $2x+5y+1=0$ 爲二元一次方程式, $x^2+3xy-2y+4=0$ 爲二元二次方程式。

【二次不盡根】Quadratic surd或Surd of the second order.〔代〕根指數爲2之不盡根謂之二次不盡根.例如$\sqrt{2}$,$\sqrt{8}$

是也。二次不盡根又稱平方不盡根。

【二次方程式】Quadratic或Quadratic equation 或 Equation of the second degree.〔代〕方程式之含未知數之二乘冪或二次元之項者，謂之二次方程式。例如 $3x^2-5x+6=0$，$x^2-xy+y^2=0$，$xy+x-2y-7=0$ 皆爲二次方程式。

I. 普通一元二次方程式爲 $ax^2+bx+c=0$。用配方法可求得其二根。命以α，β 表之，

則 $$\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$

$$\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

由是 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，及$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。故二根之和等於$-\frac{b}{a}$，而二根之積等於$\frac{c}{a}$。例如於方程式 $5x^2-2x+3=0$，其二根之和爲$\frac{2}{5}$，其積爲$\frac{3}{5}$。〔根之討論〕$\frac{b^2-4ac}{a^2}$謂之方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式，其根之性質，可以此式判別之。

(1)若 $b^2-4ac>0$，則二根爲不等之實數。例如於 $x^2-5x-10=0$，$b^2-4ac=65$，故二根爲不等之實數。(2)若$b^2-4ac=0$，則二根爲相等實數。例如於 $x^2-12x+36=0$，$b^2-4ac=0$，故知其二根爲相等實數。(3)若$b^2-4ac<0$，則二根爲共軛複虛數。例如於 $x^2-3x+5=0$，$b^2-4ac=-11$，故知其二根爲共軛複虛數。(4)若 b^2-4ac 爲正有理數之平方，則二根爲有理實數。例如於 $x^2-3x+4=0$，$b^2-4ac=25=5^2$，故知其二根爲有理實數。(5)若 b^2-4ac 不爲正有理數之平方，則二根爲共軛無理實數。例如於 $x^2+7x+9=0$，$b^2-4ac=13$，故知其二根爲共軛無理實數。(6)若 $a=c$，則二根互爲倒數。例如於 $3x^2-5x+3=0$，其二根互爲倒數。(7)若 $b=0$，則二根之絕對值相等，而號相反。例如於 $2x^2+7=0$，其二根之絕對值相等而號相反。(8)若 $c=0$，則一根爲零，他根爲$-\frac{b}{a}$。例如於$3x^2+5x=0$，其一根爲0，他根爲$-\frac{5}{3}$。

(9)若 $b=0$，$c=0$，則二根皆爲零。例如$5x^2=0$ 是也。又若 a 爲零，則方程式由二次變爲一次。然若 a 逐漸減小，則二根之値如何，茲進考之。(10)若 $a=0$，則一根爲$-\frac{c}{b}$，而他根爲無窮大。即此時$\alpha=-\frac{b}{0}+\frac{\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b+b}{0}$ $=\frac{0}{0}$，而爲不定形。

$$然\alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$=\frac{\{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}\}\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}{2a\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}.$$

故若$a=0$，則$\alpha=-\frac{c}{b}$。又$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}$ $=\frac{-2b}{0}=\infty$。例如於$0x^2+3x+2=0$，一根爲$-\frac{2}{3}$，而他根爲∞。(11)若

$a=0$, $b=0$, 則二根俱爲無窮大. 因 α

$$=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

及 $\beta=\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

$=\frac{2c}{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}$. 故若 $a=0$, $b=0$, 則 $\alpha=\infty$, $\beta=\infty$. 例如於 $0\cdot x^2+0\cdot x+3=0$, 二根俱爲無窮大.

II. 普通二元二次方程式爲

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \text{(i)}$$

茲求其左邊可分解爲二個一次因數之條件. 視 (i) 爲 x 之二次方程式,即

$$ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c=0.$$

解之,得 $x=$

$$\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}.$$

或 $ax+hy+g$

$$=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2-2(hg-af)y+(g^2-ac)}.$$

故欲 (i) 之左邊可分解爲二個形如 $px+qy+r$ 之二個一次因數, 則根號內之式必須爲一完全平方; 故 $(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$. 移項,且展開之, 以 a 除之, 則得

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \cdots\text{(ii)}$$

是爲所求之條件. (ii)之左邊謂之(i)之判別式,此式於解析幾何學中甚爲重要. 若(ii)成立時, 則(i)之左邊可分解爲二一次因數, 而表二直線; 若(ii)不成立, 則(i)表一二次曲線.

【二項方程式】 Binomial equation.

〔代〕方程式 $x^n-a=0$ 謂之二項方程式, 其中 a 或實數或虛數, n 爲任意正整數. 二項方程式可化成簡單之形式. 何則, 命 a' 爲 a 之 n 乘根, 且命 $a'y=x$, 則 $ay^n=a$, 由是 $ay^n-a=0$, 即 $y^n-1=0$. 故二項方程式之硏究, 可以形如 $x^n-1=0$ 者始. 而此方程式之根之性質詳一之 n 乘根條. $x^n-1=0$ 之諸根可由公式 $x=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ 以求之,但 k 爲零或正整數. n 爲奇數, 則諸根可於公式次第命 $k=0,1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$ 而得之. 又若 n 爲偶數, 則命 $k=0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ 而得之. 如斯所得 x 之諸值互相異;且與 k 以他值,則 x 所得之值與前例同,因此 n 值依週期而循環故也. 〔例1〕求 $x^3-1=0$ 之根. 命 $n=3$, 而命 $k=1$, 則 $x=1$; 命 $k=2$, 則 $x=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$; 然 $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{-3}}{2}$, 故 $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. 故三根爲 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

〔例2〕求 $x^4-1=0$ 之根. 今 $n=4$, 命 $k=0$, 則 $x=+1$; 命 $k=1$, 則 $x=\pm\sqrt{-1}$; 命 $k=2$, 則 $x=-1$. 故此方程式之四根爲 $+1,-1,+\sqrt{-1},-\sqrt{-1}$.

若求 $x^n-a=0$ 之根, 則以 $x^n-1=0$ 之諸根乘 a 之 n 乘根即可.

【二項式定理】 Binomial theorem.

〔代〕二項式定理即

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}$$
$$+ \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^r x^{n-r}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之謂也．但 n 爲正數或負數；整數或分數．玆分別證明之．

I．n 爲正整數．因 $(x+a)^n$ 爲各等於 $x+a$ 之 n 個因數之積，其展開式中之各項爲 n 次元，而爲由 n 因數各取一文字之 n 文字相乘之積．故含 $a^r x^{n-r}$ 之各項爲由 n 因數中之任何 r 個取 a，由其餘 $n-r$ 個取 x 而得之者．故含 $a^r x^{n-r}$ 之項之數必等於由 n 物取 r 物之組合之數，即 $a^r x^{n-r}$ 之係數爲 ${}_nC_r$．依次與 r 以 $0,1,2,3,\cdots,n$ 諸值，則得諸項之係數．故得

$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1 ax^{n-1} + {}_nC_2 a^2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_r a^r x^{n-r} + \cdots + a^n$，因 ${}_nC_0$ 與 ${}_nC_n$ 各等於 1 故也．

n 爲正整數時，又可用歸納法證明之如次：假定其指數爲 n 時爲合理，以 $x+a$ 乘之，得

$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + (1+{}_nC_1)ax^n + ({}_nC_1+{}_nC_2)a^2x^{n-1} + \cdots + ({}_nC_{r-1} + {}_nC_r)a^r x^{n-r+1} + \cdots\cdots + a^{n+1}$．

而 $1+{}_nC_1 = 1+n = {}_{n+1}C_1$，${}_nC_1+{}_nC_2$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{(n+1)n}{2!} = {}_{n+1}C_2,$$

而普通 ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$．

故 $(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + {}_{n+1}C_1 ax^n + {}_{n+1}C_2 a^2x^{n-1} + \cdots + {}_{n+1}C_r a^r x^{n-r+1} + \cdots\cdots + a^{n+1}$．

由是若此定理對 n 之任意値時爲眞，則於 $n+1$ 亦眞．然 $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$，$(x+a)^3 = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$，即 $n=2$，3 時此定理爲眞，故 $n=4$ 時亦眞；$n=4$ 時此定理既眞，則 $n=5$ 時亦眞．逐次如是．故此定理普通皆眞．

〔最大係數〕因普通項之係數爲 ${}_nC_r$．而當 n 爲偶數，${}_nC_{\frac{n}{2}}$ 爲最大，即第 $\frac{n}{2}+1$ 項之係數爲最大．又當 n 爲奇數，則 ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ 與 ${}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ 相等而爲最大，即第 $\frac{n+1}{2}$ 與 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數爲最大（參看組合條）．

〔最大項〕因 $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$，故祇須求 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 內之最大項即可．而其展開式中之第 $r+1$ 項等於第 r 項以 $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$ 或 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 乘之．而 $\frac{n+1}{r}-1$ 因 r 之增大而減小，故必 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1$，第 $r+1$ 項始大於第 r 項．然欲 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1$，則必 $\frac{n+1}{r}>\frac{x}{a}+1$，或 $\dfrac{n+1}{\frac{x}{a}+1}>r$．若 $\dfrac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 爲整數 p，則 $p=r$，而第 $p+1$ 項等於第 p 項，而此二項大於其餘各項．若 $\dfrac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 不爲整數，而命其整數部

分爲 q，則第 $q+1$ 項爲最大。

II. 次證明當 n 爲正分指數時，二項式定理亦成立。下述爲尤拉 (Euler)之證法。命

$$f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots(1)$$

$$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots(2)$$

$$f(m+n)=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}+\cdots\cdots$$

將(1),(2)之右邊相乘，而依 x 之昇冪列之，則不論 m,n 爲何數，其積之形常爲

$$1+(m+n)x+\left\{\frac{m(m-1)}{2!}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{2!}\right\}x^2+\cdots\cdots$$

然若 m 與 n 爲正整數時，則 $f(m)=(1+x)^m$，$f(n)=(1+x)^n$，而 $f(m)\times f(n)=(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n}=f(m+n)\cdots\cdots$ (A)

而(A)不論 m,n 之值爲何，皆能合理。同樣 $f(m)f(n)f(p)\cdots$至k因數 $=f(m+n+p+\cdots$至 k 項)。命 $m=n=p=\cdots\cdots=\frac{h}{k}$，而 h,k 爲正整數，則得

$\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k=f(h)$；然 h 爲正整數，故得 $f(h)=(1+x)^h$；$\therefore(1+x)^h=\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k$；$\therefore(1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right)$；

$$\therefore(1+x)^{\frac{h}{k}}=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

於是已證明二項式定理於正分指數能成立。

III. 茲證當 n 爲負數時二項式定理亦成立。於(A)內以 $-n$(n爲正數) 代m，則得

$$f(n)\times f(-n)=f(-n+n)=f(0)=1.$$

$\therefore\frac{1}{f(n)}=f(-n)$，卽 $\frac{1}{(1+x)^n}=f(-n)$。

故 $$(1+x)^{-n}=f(-n)=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

於是巳證明 n 爲負數，二項式定理亦成立。由是，不論二項式之指數爲正數或負數，整數或分數(卽有理數)，無不合於二項式定理。而二項式定理

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

完全成立矣。若 n 不爲正整數，則此級數爲無窮級數，故 x 必取之使右邊之級數爲收斂級數始可。例如

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots$$

祇當 x 之值可使右邊之級數爲收斂時爲眞。卽須 x 小於 1 始可。若命 x 等於 1，則得 $0=1+2+3+4+\cdots\cdots$

而爲大誤矣。

二項定理，甚爲重要，高等數學中常用之。卽初等數學中亦可應用之。例如求126之立方根至小數五位。因

$$126=125\left(1+\frac{1}{125}\right)=5^3\left(1+\frac{1}{5^3}\right)$$

$$故\sqrt[3]{125}=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots\cdots$$

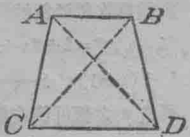
$$=5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.0000128}{81}-\cdots\cdots$$

$$=5+.013333\cdots-.000035\cdots+\cdots\cdots$$

$=5.01329$ 至五位小數。

【二項展開式】Binomial expansion.〔代〕卽用二項式定理將 $(x+a)^n$ 展開所得之式也。與二項級數同。

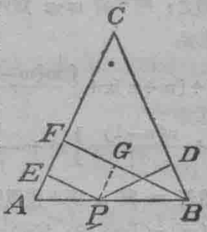
【二等邊梯形】Isosceles trapezoid.〔幾〕又稱等腰梯形或等脚梯形。卽梯形之二腰相等者。二等邊梯形各底之兩端之角相等，而對角互爲補角。

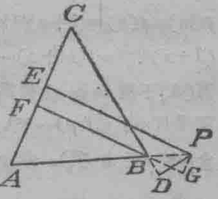


卽 $\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$。而 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$。又二等邊梯形之二對角線相等。卽 AD=BC。

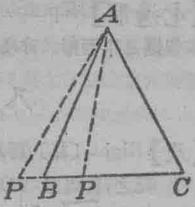
【二直角三面角】Bi-rectangular trihedral angle.〔幾〕卽三面角之有二直角二面角者。

【二等邊三角形】Isosceles triangle.〔幾〕三角形之二邊相等者，謂之二等邊三角形或等腰三角形或等脚三角形，而他邊謂之底，對底之角謂之頂角。若三角形之二邊相等，其對角亦等，而此之逆定理亦成立。　二等邊三角形之頂角之二等分線，爲底之垂直二等分線，而此之逆定理亦成立。　引二等邊三角形之中線爲底之垂直二等分線，又爲頂角之二等分線。　於二等邊三角形 ABC之底 AB (或其延線) 上取一點 P，由 P 至二腰 AC，BC所作二垂線 PD，PE 之和 (或差) 爲常數，而等於在腰上之高BF。〔證〕作 $PG\perp BF$，則EPGF 爲矩形。∴ GF=PE。又因直角三角形 PGB，BDP相等，∴GB=PD。∴PD+PE (或PD～PE)=BF。





又於二等邊三角形 ABC 之底 BC 或其延線上取一點P，則 $AP^2\sim AB^2=BP\cdot CP$。〔證〕作 $AE\perp BC$，



則$AP^2=AE^2+PE^2$, $AB^2=AE^2+BE^2$。
$\therefore AP^2\sim AB^2=PE^2\sim BE^2=(PE\sim BE)(PE+BE)=BP\cdot CP$。

【二次不定方程式】Indeterminate equation of the second degree.〔代〕不定方程式之爲二次者之謂也。 方程式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 之正整數之解法可化爲形如 $x^2\pm Ny^2=\pm a$ 之方程式之解法，而 N 與 a 爲正整數。然方程式 $x^2+Ny^2=-a$ 無實根，而 $x^2+Ny^2=a$ 有有限數之根，可用試驗得之；故僅須注意$x^2-Ny^2=\pm a$即可。 茲先求 $x^2-Ny^2=\pm1$ 之正整數之解答。 化 $\sqrt{N}$ 爲連分數，而命 $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ 爲相連之近數，假定 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 爲與$\frac{p''}{q''}$ 相當之完全商，則 $r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2$。然求 $\sqrt{N}$ 之連分數時，每次所得連分之各商中，可得$r_n=1$； $\therefore p'q-pq'=p'^2-Nq'^2$，$\frac{p'}{q'}$爲任何循環期之末第二近數。而 $p'q-pq'=\pm1$，又原方程爲 $x^2-Ny^2=\pm1$，故 $x=p'$，$y=q'$ 爲一組解答。 例如求$x^2-13y^2=\pm1$之正整數解答。 因$\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}$……第一循環期內末第二近數爲$\frac{18}{5}$；故 $x=18$，$y=5$ 爲 $x^2-13y^2=-1$之一解答。又第二循環期內末第二近數爲$\frac{649}{180}$；故 $x=649$，$y=180$ 爲$x^2-13y^2=+1$ 之一解答。

次求 $x^2-Ny^2=\pm a$ 之正整數之解答。因 $p'^2-Nq'^2=-r_n(pq'-p'q)=\pm r_n$。故若 a 爲當化$\sqrt{N}$ 爲連分數內任何完全商之分母，而$\frac{p'}{q'}$ 爲與此完全商相當之近數，則$x=p'$，$y=q'$ 爲方程式$x^2-Ny^2=\pm a$之一之解答。 例如求$x^2-7y^2=2$之正整數之解答。 因$\sqrt{7}=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}$……，而第二完全商之分母爲 2，其相當之近數爲$\frac{3}{1}$；故 $x=3$，$y=1$爲所求之解答。

若 N 爲完全平方，則可如次例以解之。〔例〕余有趙，錢，孫三友，皆新婚。一日各攜其妻見予。三夫人爲周氏，吳氏，陳氏。然余已忘各友之妻。惟彼等告我，彼等曾至市購豕，其每口之值之元數各與其所買之豕數同；又趙某較吳氏多購 23 口，錢某較周氏多購 11口，又每人較其妻多費 63元。試決定各人之妻。 令 x 爲任一人所買之豕數，則其所費爲x^2元，同樣其妻所費之洋爲 y^2元。 $\therefore x^2-y^2=63$。即 $(x+y)(x-y)=63\times1$，或 21×3，或 9×7。 $\therefore x+y=63$ 或 21 或 9，$x-y=1$ 或 3 或 7。 $\therefore x=32$, 12, 8；$y=31,9,1$。即三友所購之豕數爲 32,12,8；三婦人所購之豕數爲 31,

9,1。然因趙某較吳氏多賸 23口，故知趙某賸32口，吳氏賸9口；又錢某較周氏多賸 11口，故知錢某賸 12口，周氏賸1口。由是孫某賸 8口，陳氏賸31口。故知陳氏爲趙某之妻，吳氏爲錢某之妻，周氏爲孫某之妻。

【二次聯立方程式】Simultaneous equations of the second degree.〔代〕即聯立方程式之爲二次方程式者。

【二面角之平面角】Plane angle of dihedral angle.〔幾〕見二面角條。

【二線所包之矩形】Rectangle contained by two lines.〔幾〕即以二直線爲鄰邊所作之矩形之謂也。

【二直角球面三角形】Birectangular spherical triangle.〔幾〕球面三角形之有二直角者之謂也。

【二等邊球面三角形】Isosceles spherical triangle.〔幾〕即球面三角形之有二邊相等者。

七

【七】Seven.〔算〕數名。亞拉伯以 7 記之，羅馬以 VII 記之，希臘以 ζ′ 記之。

【七角形】Heptagon.〔幾〕即七邊形。

【七面體】Heptahedron.〔幾〕即七平面所包圍之立體也。

【七進法】Septenary scale.〔代〕即以七爲記數底之記數法也。此記數法用數字 1,2,3,4,5,6 及 0 即足，而於七進法中，2453 即表$2\times7^3+4\times7^2+5\times7+3$之意。

【七邊形】Heptagon.〔幾〕即七直線所包圍之平面形。亦稱七角形。

八

【八】Eight.〔算〕爲基數之一，亞拉伯以 8 記之，羅馬以 VIII 記之，希臘以 η′ 記之。

【八線】Trigonometrical functions.〔三〕即三角函數。

【八角形】Octagon.〔幾〕即八邊形。

【八面體】Octahedron.〔幾〕即八平面所包圍之立體也。

【八進法】Octenary scale.〔代〕即以八爲記數底之記數法也。此記數法用數字 1,2,3,4,5,6,7，及 0 即足，而於八進法中，4167 即表 $4\times8^3+1\times8^2+6\times8+7$ 之意。

【八線學】Trigonometry.〔數〕即三角法。

【八邊形】Octagon.〔幾〕即八直線所包圍之平面形。亦稱八角形。

【八分空間】Octant.〔幾〕互相垂直三平面，分空間爲八部分，其各部分謂之八分空間。

九

【九】Nine.〔算〕爲基數之一。亞拉伯以 9 記之，羅馬以 IX 記之，希臘以 θ′ 記之。

【九九】〔算〕自一至九每二數相乘謂之九九。

【九章】〔數〕算法之名，又算書之名。見九章算術條。