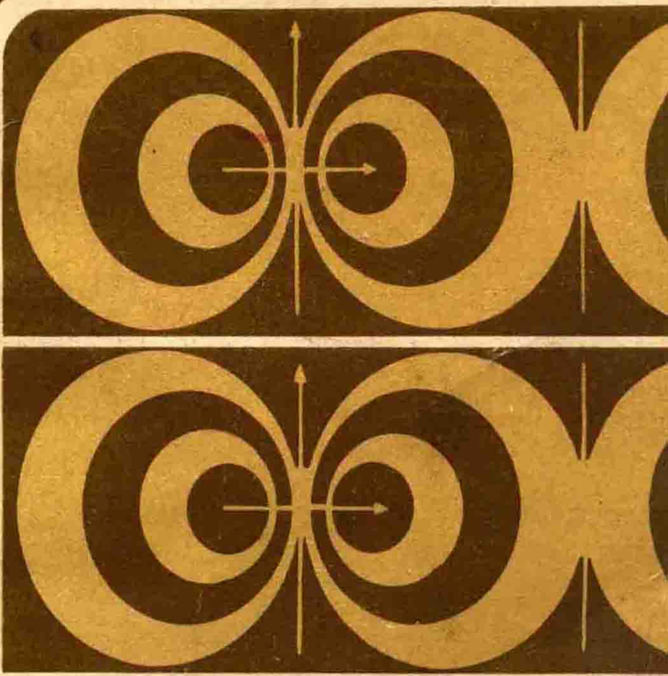
《中学课程课外读物》

北京市海淀区教师进修学校主编

初三代数

自学解难



重庆出版社　华夏出版社

中学课程课外读物

初三代数自学解难

附答案与提示

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社　华夏出版社

一九八七年·重庆

责任编辑：石琼生

初三代数自学解难

重庆出版社、华夏出版社出版
新华书店重庆发行所发行　　文字六〇三厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 6.25　字数 156 千
1987年 7 月第一版　1987年 7 月第一版第一次印刷
印数：1—200,000

*

ISBN 7-5366-0084-4

G・54

书号：7114・584　　定价：0.88元

前　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和初、高中学生更好地掌握中学课程内容并提高他们的文化科学知识水平，由部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员，编写了这套《中学课程课外读物》丛书。它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物等学科。

课外读物应该有利于课堂教学。编写时，我们注意依据教学大纲，紧密结合教材，体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开阔视野，启迪思维，开发智力，培养能力；力求使这套书成为中学生和知识青年的具有针对性、启发性、实用性的课外读物，成为家长指导和检查学生学习的助手，并可供教师备课时参考。

数学部分，每讲包括四节：系统与结构、理解与思考、方法与能力、回味与引申。

系统与结构是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重点、难点进行了较详细的讲述，同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另方面通过综合性较强的例题的剖析，以加强能力的培养。这一部分之后，配备了A、B两组练习题，供不同水平的读者选用。此外，还编拟了一份自测题及答案，以便于自学者自

我检查。

回味与引申想通过这部分对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思想方法上给以指点。

本书编写者

北京市八一中学　　　　　　　李鸿元

北京市海淀区教师进修学校　　张振威　王增民

北京市九十九中学　　　　　　方　菁

由于编者水平有限，书中如有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

目　录

第十三讲　常用对数

一、系统与结构

本讲的主要内容是对数的概念和运算法则，常用对数的性质以及利用对数进行计算．

关于对数概念的结构分析见表13-1：

二、理解与思考

本讲内容的重点是利用对数进行计算．透彻理解对数的概念和正确掌握好对数的运算法则是学好本讲内容的关键，也是学习中的一个难点．

就以下几个方面对本讲的重点、难点做一些分析，以帮助同学加深理解，进行思考．

1．对数的概念和定义

（1）对数概念的引入：

对数产生于十七世纪．由于生产的不断发展，对于数的计算的量越来越大，无论是航海中要定出船只的位置和航程，还是天文工作者要处理天文数据，都要进行大量的计算．因此人们希望简化这些运算，对数这一运算工具便应运而生．

表13—1：

- 对数
  - $\log_a N$
    - 性　质
      - $\log_a 1=0$
      - $\log_a a=1$
    - 恒等式
      - $a^{\log_a N}=N$
    - 运算法则
      - $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
      - $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
      - $\log_a M^n=n\log_a M$
      - $\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$
  - $\lg N$
    - 常用对数的性质
      - 对数表
      - 反对数表

→ 利用对数进行计算

首先人们在指数运算法则中：

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$； ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$；

③ $(a^m)^n = a^{mn}$； ④ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$。

看到在同底数幂的乘、除、乘方、开方运算中，指数运算比幂的运算低一级，使计算大为简化。而这里的关键是如何把一个数化成幂的形式，即如何在给定底的条件下找出指数。从而引出对数定义：如果$a(a>0，a\neq1)$的b次幂等于N，就是$a^b=N$，数b就叫做以a为底的N的对数，记作$\log_a N=b$，其中a叫做底数(简称底)，N叫做真数。

（2） 怎样理解对数概念？

对数是乘方运算的一种逆运算的运算结果。我们知道，在关系式$a^b=N$中：已知a、b求N的运算叫乘方运算，运算的结果叫做幂；已知N、b求a的运算叫做开方运算，运算的结果叫做方根，开方运算是乘方运算的一种逆运算；而已知a、N求b则是它的另一种逆运算，我们把这一种逆运算叫做对数运算，运算的结果叫做以a为底的N的对数.

指数式$a^b=N$与对数式$\log_a N=b$本质上是相同的。因为这两个等式都反映了相同的三个数量a、b、N之间的相互关系，它们只是外形不同；因而它们之间可以互相转化。我们曾学过了指数式，研究对数的一个重要方法是把对数式转化为指数式。

注意对数式$\log_a N=b$中字母的取值范围：底数$a>0$，$a\neq1$；真数$N>0$。

2. 关于对数恒等式

根据对数的定义，可得对数恒等式

$a^{\log_a N}=N(a>0,\ a\neq1,\ N>0)$。这个等式对$N$、$a$的一切可取值都是成立的，故称它为对数恒等式。利用这个恒等式，可以把一个正数写成幂的形式。在使用这个对数恒等式时，一是要注意字母取值范围：$a>0$，$a\neq1$，$N>0$。例如$3^{\log_3(-5)}\neq-5$因为$\log_3(-5)$没有意义；二是要注意同底问题，例如$2^{\log_4 3}$不能直接使用对数恒等式；三是要注意作为指数的对数式前面的系数必须是1，例如$4^{-2\log_4 6}$不能直接使用对数恒等式。如何正确、灵活地利用对数恒等式进行化简计算，将在后面例题中论述。

3. 关于积、商、幂、方根的对数

(1) 积的对数：$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；

(2) 商的对数：$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) 幂的对数：$\log_a M^n=n\log_a M$（n为实数）；

(4)方根的对数：$\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$（$n>1$的整数）。

上述四个公式中，均有$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$。显然对数的运算法则是把高一级的运算（乘、除、乘方、开方）转化为低一级的运算（加、减、乘、除），因此显示了利用对数进行计算的优越性。

在使用这四条法则时，一是要注意字母的取值范围，只有当所得结果的对数和所给数的对数都存在时，法则才能成立。例如：

$\log_2(-2)(-8)\neq\log_2(-2)+\log_2(-8)$，虽然$\log_2[(-2)(-8)]$是存在的，但$\log_2(-2)$，$\log_2(-8)$无意义；二是要注意防止把下列等式作为恒等式的错误：

(1) $\log_a(M \pm N)=\log_a M \pm \log_a N$;

(2) $\log_a(M \cdot N)=\log_a M \cdot \log_a N$;

(3) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{\log_a M}{\log_a N}$;

(4) $\log_a M^n=(\log_a M)^n$;

(5) $\log_a \sqrt[n]{M}=\sqrt[n]{\log_a M}$.

同学们可以自己证明一下上述等式不是恒等式，还可以思考一下有没有特殊的数值使上述等式成立。三是要注意运算法则的正用和逆用。

4. 常用对数

我们通常用的对数是以10为底的对数，这种对数叫做常用对数，简记作$\lg N$。10的整数次幂的对数是一个整数，并且真数较大的时候它的对数也较大。任何一个正数的常用对数都可以写成一个整数（首数）与一个正的纯小数或零（尾数）之和，即：

$$\lg N=\underset{(\text{整数})}{\text{首数}}+\underset{(\text{正的纯小数或零})}{\text{尾数}}.$$

常用对数的首数与尾数是本段知识的重点，也是一个难点，必须对概念透彻理解并牢固掌握。

首先常用对数的首数、尾数由什么确定？常用对数的首数可以从真数N的小数点与第一位有效数字之间的位数而确定，而尾数是根据真数N的有效数字确定。其次常用对数的首数、尾数如何确定？一般先根据真数位数定对数首数，再根据真数的有效数字查对数表定对数的尾数，其中关键是掌握确定对数首数的方法。课本上介绍的求一个正数N的对数的首数方法，是用科学记数法把N写成$a\times10^n$的形式，其中$1\leqslant a<10$，n是整数，那么n就是这个正数N的对数的首数。

我们还可以这样来求：

（1） 大于或等于 1 的数，它的对数的首数等于这个数整数部分的位数减1。例如：lg234.5 真数 234.5 的整数为 234，是一个三位数，所以lg234.5的首数就等于$3-1=2$；

（2） 小于 1 的正数，它的对数的首数是一个负数，其绝对值等于这个小数的第一个有效数字前面连续所有零的个数（包括整数部分的一个零），例如：lg0.002345 真数是 $0.002345<1$，它的对数的首数是个负数，其绝对值应当为第一个有效数字2前面连续所有的零的个数3，那么lg0.00235的首数应当是-3。

学习了常用对数的首数和尾数之后，还应会由对数的首数和尾数反过来确定真数。要注意：负首数的表示$\overline{2}.5325$与-2.5325是完全不同的两个数。因此同学们一定要会把 $\lg N=-2.5325$改变成首数为负数，而尾数为正的纯小数的形式，即$\lg N=\overline{3}.4675$。然后再确定N。

三、方法与能力

（一） 帮助理解、巩固概念的练习

例1. 指数式、对数式互化：

（1） $2^3=8$；　$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$；　$\sqrt{3}^{\,0}=1$；

（2） $\log_{25}5=\frac{1}{2}$；　$\log_{10}0.001=-3$；$\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}=1$。

解：(1)化成对数式为 $\log_2 8=3$；$\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，

$\log_{\sqrt{3}}1=0$。

（2） 化成指数式为$25^{\frac{1}{2}}=5$；$10^{-3}=0.001$；

$$\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{1}{5}.$$

例2. 求出下列各式中的x：

（1） $\log_2\frac{1}{4}=x$；（2） $\log_{125}x=\frac{2}{3}$；

（3） $\log_x 64=-3$；（4） $\log_{(x+4)}(x^2+4x)=1$.

解：(1) 化指数式$2^x=\frac{1}{4}$，化同底 $2^x=2^{-2}$，

$\therefore\ x=-2$.

（2） $\because \log_{125}x=\frac{2}{3}$，$\therefore x=125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^2=25$.

（3） $\because \log_x 64=-3$，$\therefore x^{-3}=64=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}$.

经检验：上述结果都正确.

（4） $\because \log_{(x+4)}(x^2+4x)=1$，

化指数式　$(x+4)^1=x^2+4x$，

即　$x^2+3x-4=0$.

解得　$x_1=-4$，$x_2=1$.

注意到底　$x+4>0$，$x+4\neq1$，真数

$x^2+4x>0$ 的要求，$\therefore x_1=-4$ 不适合.

$\therefore\ x=1$.

例3. 指出下列各式中字母 x 的取值范围：（其中 $a>0$ $a\neq1$）

（1） $\log_a(x+2)$；　　（2） $\log_5 x^2$；

（3） $\log_a(x^2+1)$；　　（4） $\dfrac{\log_a(3x+2)}{x}$；

（5） $\sqrt{\log_3 x}$；　　（6） $\log_{(2x-1)}(3x-2)$；

（7） $a^{\log_a(-x)}=-x$；　　（8） $\log_2\log_3\log_4 x$。

解：字母 x 的取值范围是：

（1） $x>-2$；　　（2） $x\neq 0$；

（3） x 取任意实数；　　（4） $x>-\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 0$。

（5） 由对数定义知：
由偶次方根知：$\begin{cases} x>0, \\ \log_3 x\geqslant 0。\end{cases}$

解得$\begin{cases} x>0, \\ x\geqslant 1。\end{cases}$

∴ $x\geqslant 1$。

（6） 由对数定义知：$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ 3x-2>0。\end{cases}$

解得 $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x>\dfrac{2}{3}。\end{cases}$

∴ $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$ 或$\left(\dfrac{2}{3}<x<1 \text{ 或 } x>1\right)$。

（7） 由对数恒等式成立的条件知 $-x>0$，

∴ $x<0$。

（8） 由对数定义知 $\log_3\log_4 x>0$，　$\log_3\log_4 x>\log_3 1$。

当底大于1时，真数较大的时候，它的对数也较大，

得　　$\log_4 x > 1$，

同理得　$x > 4$。

说明：(1)由于对数是用指数式来定义的，而指数是同学们在初二学习的内容，无疑把对数式转化为指数式是研究对数问题的主要方法；

(2) 在求对数式中的未知数时要注意底、真数的取值范围；

(3) 对形如 $\log_a \log_b \log_c x$ 的对数式要正确理解：$\log_a \log_b \log_c x$ 是以 a 为底 $\log_b \log_c x$ 的对数；$\log_b \log_c x$ 是以 b 为底 $\log_c x$ 的对数；以此类推。

例4. 填空：

(1) ①已知 x 的对数的首数与 $\lg y = 18.32$ 的首数相同，与0.3275的对数的尾数相同，则 $x=$____；

②已知 x 的对数的首数与 18.32 的对数的首数相同，与0.3275的对数的尾数相同，则 $x=$____；

(2) 已知$\lg 5 = 0.6990$，$\lg x = -3.3010$，则$x=$____；

(3) 已知 $\lg a = 2.5432$，$\lg b = -0.4568$，

则 $a:b=$____；

(4) $\lg 1000x$ 比$\lg \frac{x}{1000}$大____；

(5) 一个数的对数的首数是 2，尾数是 0.7096，这个数的倒数的对数的首数是____、尾数是____。

解：(1) ①$\because x$ 的对数的首数与$\lg y = 18.32$的首数相同，

$\therefore x$ 的对数的首数是18。

$\because x$ 的对数的尾数与0.3275的对数的尾数相同，

$\therefore x$ 的有效数字是3275。

$\therefore x=3.275\times10^{18}$。

② $x=32.75$。

（2） $\because \lg x=-3.3010=\bar{4}.6990$，而 $\lg5=0.6990$，

$\therefore\ x=0.0005$。

（3） $\because \lg b=-0.4568=\bar{1}.5432$ 而 $\lg a=2.5432$，

$\therefore\ b=t\cdot10^{-1}$、$a=t\cdot10^{2}\quad(1<t<10)$。

$\therefore\ a:b=t\cdot10^{2}/t\cdot10^{-1}=1000:1$。

（4） $\because\ \lg1000x-\lg\dfrac{x}{1000}$

$=\lg1000+\lg x-(\lg x-\lg1000)$

$=3-(-3)=6$，

$\therefore\ \lg1000x$ 比 $\lg\dfrac{x}{1000}$ 大6。

（5） 设这个数是 $a\cdot10^{2}\quad(1<a<10)$，

由题意 $\lg a=2.7096$，

则 $\lg\dfrac{1}{a}=-\lg a=-2.7096=\bar{3}.2904$，

∴这个数的倒数的对数的首数是<u>-3</u>，尾数是<u>0.2904</u>。

（二） 熟练计算，巩固对数性质、运算法则的练习

例5. 计算下列各题：

（1） ①$\log_{\sqrt{2}}8-\log_{\sqrt{3}}9$；

②$\log_{2}1-\lg0.01+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$。

（2） ①$2^{\log_{4}3}$；② $3^{-\log_{3}2}$；③ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{2}3}$；