高考数学

你真的掌握了吗？

数列

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社

高考数学

你真的掌握了吗？

数列

张杨文　主编　/　兰师勇　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本套书基于作者团队多年辅导经验总结，对高考内容进行了科学合理的筛选和调整，侧重体现知识点的系统性和逻辑性. 函数、数列、圆锥曲线这三部分重要内容独立成书；相对简单零散的平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同含于《数学五章》一书；集合与常用逻辑用语、复数、算法、三角函数等内容未收纳.

书中内容绝非简单拼凑，相当多的内容是作者团队实践积累的成果，比如函数恒成立部分的"端点效应"、数形结合中的"两图像法"和非常规函数图像的解决方法、数列放缩的系统归类及解法、圆锥曲线中的框架图，以及其他一些数学思想的应用等. 针对全国各地的高考题型及特点，作者力求探索简洁、高效、容易掌握的普适方法，让高难度的压轴题不再成为考生的绊脚石，希望能对广大考生提供帮助.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学你真的掌握了吗？数列/张杨文主编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-35545-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 034927 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：203mm×280mm　　**印　张**：9.25　　**字　　数**：223 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

产品编号：056538-01

序

数学在高考中的地位毋庸置疑.一方面,数学作为主干学科,既容易得分也容易失分的特点使得莘莘学子对其又爱又恨;另一方面,数学排在高考第一天的下午,当语文让考生们平稳进入高考状态后,数学就要学子们开始真正发挥威力了,并且数学考试的感觉将对第二天的考试起着至关重要的作用.因此,掌握好高考数学迫在眉睫!

本套《高考数学你真的掌握了吗?》以不落俗套的形式、创造性的思维、系统化的视角诠释高考数学的精髓,帮助广大学子消解长期以来的困惑,从而突破数学的瓶颈,收获自己满意的成绩!

本套书具有如下几个特点:

一、科学合理的编排结构

我们摒弃按照教科书的顺序编写本书,而是按照重难点的分布进行科学合理的筛选与整合.函数、数列、圆锥曲线三部分内容分别独立成书;平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同构成另外一本书.

二、内容具有创造性,独家研究成果遍布全书

书中很多解法、结论、方法总结都是我们经过长期实践后研究出来的成果,在此作简单的说明.

1.《函数》第四章:数形结合

对于复合方程的根的问题,我们采用“两个图像”法来解决,一方面避免了复杂函数的作图,另一方面也可以达到普遍适用的效果.

而对于动曲线的问题,我们重点考查了两条曲线在某个交点附近是否还有其他交点的情况,通过交点处的局部分析进行深刻的剖析,此处稍微引进了高等数学的一些基本思想,这将彻底消除学子们对此类疑难问题的困惑.

2.《函数》第五章:恒成立

对于大多数情况,函数恒正(恒负)等价于函数在区间端点处恒正(恒负)是错误的,但这并不意味着端点就没有任何作用.我们通过事先考虑函数在端点的情形,虽然不能得到最终结果,但却可以据此排除某些情形,从而避免了复杂的分类讨论.这种先通过端点来缩小参数取值范围的方法,我们将其称为“端点效应”.

这个方法简单易行,且经得起考验和推敲,可以很好地帮助广大考生轻松解决本身并不简单的函数恒成立一类问题.

3.《数列》第四章：放缩

数列放缩无疑是学子们心中的噩梦，除了“就题论题”以外，极少有人能对此有一个整体的、系统的认识和理解，我们在书中对这类较难的题型进行了清晰的归纳总结，并系统地给出了相应的思维方法和求解方式.

4.《圆锥曲线》第六、七、八、九章

一般认为圆锥曲线似乎就是计算，其实远不止于此. 即便是计算，也会有一些技巧，我们在书中都进行了说明. 而在第六、七、八、九章中，我们以框架图的形式给出了独家研究成果，利用这些结论和条件，部分考题可以轻松解决.

三、强调思维方式的引导

在本套辅导书中，我们并非单纯地给出解法和技巧，而是从原理入手，通过分析讨论，一步一步引导读者理解我们的思维，使读者真正领会其中的奥妙，从而做到举一反三，也逐渐养成科学的学习方法，培养自主探索学习的能力.

四、针对性极强

通过多年的教学实践，我们了解广大高考学子的迫切需求. 因此，针对全国各地的高考题型及特点，我们着力于探索更加简洁、高效且容易掌握的普适方法，力求做到清晰、系统，从而让高三学子事半功倍，也让高考数学不再令人望而生畏. 希望我们辛勤劳动的成果能助全国高三学子们扬帆远航！

本书的完成有赖于一支高度负责的团队，各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容. 然而，编者虽倾心倾力，但终究水平有限，书中若有不妥之处，恳请广大读者批评指正！

编　者

2014 年 6 月

前言

在历年高考数学的压轴题中，有关数列的题型一直占据着不可或缺的地位，往往让广大学子无所适从. 最典型的便是数列放缩题型，其内在的估计思想更是数学思想中的精髓.

对于高中数学而言，数列这一部分内容主要包括数列通项与数列求和. 又由于数列可视为一类特殊的函数，则其函数性质也会偶尔一展风采.

鉴于知识学习的科学性与合理性，我们将高中阶段数列知识编排为四章. 第一章通过对等差数列和等比数列的系统梳理，为后面讨论数列的各种相关性质奠定了必要的基础；第二章着重归纳总结了通项公式与数列求和的一般类型及解法；第三章对数列的性质进行了详尽的剖析，这一部分难度相对较高，且与函数的性质联系紧密；第四章的数列放缩，我们将其概括为拆项放缩和代数变形两大类型，并根据具体形式进行了细分.

数列一直以来都是广大学子的一块心病，所以我们致力于通过深入浅出的表达，让读者真正体会到数学思维的方向和本质. 在数列通项部分，我们给出的解答并不完全基于题目本身，而是通过一步一步的分析，引导读者窥探其内在的本质，从而尽可能做到真正的深入理解. 对于数列的性质和放缩，我们依然重点关注思维的引导，通过逐步深入的方式，最终归纳总结出结论体系和解题技巧. 纵观全书，我们关注的核心始终不是结论和技巧本身，而是分析和思考的过程. 希望读者能真正做到举一反三，从而事半功倍！

编　者

2014 年 6 月

目 录

第一章

基本数列

【导读】

- 基本数列
  - 等差数列与等比数列的性质
    - 通项与性质
    - 前 n 项和的重要结论
    - 综合性质
  - 基本数列的证明

数列是高中数学的重要内容，综观全国各地历年高考题，其所占地位之高不言而喻. 等差数列和等比数列是最简单的两类数列，也正是它们奠定了整个数列的基础，需加以深刻理解并熟练应用.

第一节　等差数列与等比数列的性质

一、等差数列与等比数列的通项公式与性质

【知识点 1.1】 若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$ 且 $m+n=p+q$，则在等差数列 $\{a_n\}$ 中，有 $a_m+a_n=a_p+a_q$；在等比数列 $\{a_n\}$ 中，有 $a_ma_n=a_pa_q$.

【知识点 1.2】 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是等差数列，则 $\{\lambda a_n+b_n\}(\lambda\in\mathbf{R})$ 也是等差数列；设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是等比数列，则 $\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$，$\{|a_n|\}$，$\{a_n^m\}$ 仍为等比数列，$\{a_nb_n\}$ 亦为等比数列.

【例 1.1】 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，则 $|m-n|=($　　$)$.

A. 1　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{8}$

【解析】 设四个根依次为 a_1,a_2,a_3,a_4，因为方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0\Rightarrow x^2-2x+m=0$ 或 $x^2-2x+n=0$，由韦达定理可知二次方程的两根之和均为 2. 而在等差数列中有 $a_m+a_n=a_p+a_q\Leftrightarrow m+n=p+q$，所以 a_1,a_4 为一个方程的两个根，a_2,a_3 为另外一个方程的两个根，不妨设 a_1,a_4 为 $x^2-2x+m=0$ 的两个根，a_2,a_3 为 $x^2-2x+n=0$ 的两个根，所以 $a_1+a_4=a_2+a_3=2$. $a_1a_4=m$，$a_2a_3=n$，又 $a_1=\frac{1}{4}$，则 $a_4=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{5}{4}$，则 $m=\frac{7}{16}$，$n=\frac{15}{16}$，所以 $|m-n|=\frac{1}{2}$. 故选 C.

【变式 1】(2006・江西理，10)　已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$，且 A,B,C 三点共线(直线不过原点 O)，则 $S_{200}=($　　$)$.

A. 100　　B. 101　　C. 200　　D. 201

【变式 2】(2006・全国Ⅰ理，10)　设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=($　　$)$.

A. 120　　B. 105　　C. 90　　D. 75

【变式 3】(2010·全国Ⅱ理,4)　如果等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_4+a_5=12$,那么$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=$(　　).

A. 14　　　B. 21　　　C. 28　　　D. 35

【变式 4】(2009·全国Ⅰ理,14)　设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,若$S_9=72$,则$a_2+a_4+a_9=$________.

【变式 5】(2012·江西理,12)　设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,若$a_1+b_1=7$,$a_3+b_3=21$,则$a_5+b_5=$________.

【例 1.2】(2012·新课标理,5)　已知$\{a_n\}$为等比数列,$a_4+a_7=2$,$a_5a_6=-8$,则$a_1+a_{10}=$(　　).

A. 7　　　B. 5　　　C. -5　　　D. -7

【解析】　因为$a_5a_6=-8$,所以$a_5a_6=a_4a_7=-8$,又因为$a_4+a_7=2$,所以$\begin{cases}a_4+a_7=2,\\a_4a_7=-8,\end{cases}$则$a_4=-2,a_7=4$或$a_7=-2,a_4=4$.

(1) 当$a_4=-2,a_7=4$时,$q^3=-2$,则$a_4=a_1q^3\Rightarrow a_1=1$,$a_{10}=a_7q^3=-8$所以$a_1+a_{10}=-7$;

(2) 当$a_7=-2,a_4=4$时,$q^3=-\frac{1}{2}$,则$a_4=a_1q^3\Rightarrow a_1=-8$,$a_{10}=a_7q^3=1$,所以$a_1+a_{10}=-7$.故选 D.

【变式 1】(2010・全国理,4) 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$,$a_1a_2a_3=5$,$a_7a_8a_9=10$,则$a_4a_5a_6=$(　　).

A. $5\sqrt{2}$　　B. 7　　C. 6　　D. $4\sqrt{2}$

【变式 2】 设$\{a_n\}$是正项等比数列,且$a_5a_6=81$,那么$\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=$(　　).

A. 30　　B. 20　　C. 10　　D. 5

【变式 3】 在等比数列$\{a_n\}$中,若a_3,a_9是方程$3x^2-11x+9=0$的两根,则a_6的值为________.

【例 1.3】(2008・北京理,6) 已知数列$\{a_n\}$对任意的$p,q\in\mathbf{N}^*$满足$a_{p+q}=a_p+a_q$,且$a_2=-6$,那么$a_{10}=$(　　).

A. -165　　B. -33　　C. -30　　D. -21

【解析】 因为$a_{p+q}=a_p+a_q$,所以$a_{10}=a_2+a_8=2a_2+a_6=3a_2+a_4=5a_2=-30$.故选 C.

【变式 1】(2012・江西文,13) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,公比不为 1.若$a_1=1$,且对任意的$n\in\mathbf{N}$都有$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$,则$S_5=$________.

【变式 2】(2006·天津理,7)　已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是公差为 1 的等差数列,其首项分别为a_1,b_1且$a_1+b_1=5$,$a_1,b_1\in\mathbf{N}^*$. 设$c_n=a_{b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{c_n\}$的前 10 项和等于(　　).

A. 55　　B. 70　　C. 85　　D. 100

【变式 3】　等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$,已知$a_2=1$,$a_{n+2}+a_{n+1}=6a_n$,则$\{a_n\}$的前四项和$S_4=$________.

【例 1.4】(2008·全国Ⅰ文,7)　已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=3$,$a_2+a_3=6$,则$a_7=$(　　).

A. 64　　B. 81　　C. 128　　D. 243

【解析】　因为$a_1+a_2=3$,$a_2+a_3=6$,所以$q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_2+a_3}{a_1+a_2}=2$,故$a_1+2a_1=3$,可得$a_1=1$,因此$a_7=2^6=64$. 故选 A.

【注】　若$\{a_n\}$为等比数列,那么$\{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}\}$和$\{a_n\cdot a_{n+1}\cdot\cdots\cdot a_{n+k}\}$仍然是等比数列,其中$n,k\in\mathbf{N}^*$.

【变式 1】　已知等比数列$\{a_n\}$,若$a_9+a_{10}=a$,$a_{19}+a_{20}=b$,$a,b\neq0$,则$a_{99}+a_{100}$的值为________.

【变式 2】 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，公比$q=2$，且$a_1a_2a_3\cdots a_{30}=2^{30}$，则$a_3a_6a_9\cdots a_{30}=$________.

【变式 3】 已知等比数列$\{a_n\}$，若$a_2=2, a_5=\frac{1}{4}$，则$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_{n+1}=$________.

二、前 n 项和的重要结论

【结论 1.1】 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为等差数列，且前n项和分别为S_n和T_n，则$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

【结论 1.2】 在等差数列$\{a_n\}$中，设公差为d，若前n项和为S_n，则$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$仍成等差数列，公差为$md$.

【结论 1.3】 在等比数列$\{a_n\}$中，设公比为q，若前n项和为S_n，则$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$仍成等比数列，公比为$q^m$.

【例 1.5】(2007·湖北理，8) 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n和B_n，且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$，则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$的个数是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析 1】 因为等差数列的前n项和是一个不含常数项的二次函数，所以$\frac{A_n}{B_n}=\frac{(7n+45)n}{(n+3)n}=\frac{7n^2+45n}{n^2+3n}$，不妨令$A_n=7n^2+45n, B_n=n^2+3n$，则$a_n=A_n-A_{n-1}=14n+38, b_n=B_n-B_{n-1}=2n+2$，经验证$a_1=A_1, b_1=B_1$，所以$\frac{a_n}{b_n}=\frac{14n+38}{2n+2}=7+\frac{12}{n+1}$，$n$可有 5 个取值，分别使得$n+1=$

$2,n+1=3,n+1=4,n+1=6,n+1=12$. 故选 D.

【解析 2】 因为 $A_{2n-1}=\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=\frac{(2n-1)2a_n}{2}=(2n-1)a_n$，同理可得 $B_{2n-1}=(2n-1)b_n$，因此 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{14n+38}{2n+2}=7+\frac{12}{n+1}$，$n$ 可有 5 个取值，分别使得 $n+1=2,n+1=3,n+1=4,n+1=6,n+1=12$. 故选 D.

【注】 解析 1 充分利用了等差数列的前 n 项和是一个关于 n 的二次函数的结论，进而假设出 A_n,B_n，再求出 a_n,b_n 进行求解. 解析 2 利用了等差数列前 n 项和来构造 $\frac{a_n}{b_n}$ 求解.

【变式 1】(2009 · 全国Ⅱ理，14)　设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_5=5a_3$，则 $\frac{S_9}{S_5}=$________.

【变式 2】 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且 $\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7n+4}{2n+3}$，则 $\frac{a_5}{b_5}=$________.

【例 1.6】(2009 · 辽宁理，6)　设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\frac{S_6}{S_3}=3$，则 $\frac{S_9}{S_6}=$(　　).

A. 2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 3

【解析】 由于 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k}$ 成等比数列，所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等比数列，不妨令 $S_3=1,S_6=3$，则 $S_9=7$，于是 $\frac{S_9}{S_6}=\frac{7}{3}$. 故选 B.

【变式 1】(2010 · 安徽理,10)　设$\{a_n\}$是任意等比数列,它的前 n 项和,前 $2n$ 项和与前 $3n$ 项和分别为 X,Y,Z,则下列等式中恒成立的是(　　).

A. $X+Z=2Y$　　B. $Y(Y-X)=Z(Z-X)$

C. $Y^2=XZ$　　D. $Y(Y-X)=X(Z-X)$

【变式 2】(2006 · 全国Ⅱ理,11)　设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$,则$\frac{S_6}{S_{12}}=$(　　).

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{9}$

【变式 3】(2007 · 陕西理,5)　各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_n=2$,$S_{3n}=14$,则 $S_{4n}=$(　　).

A. 16　　B. 26　　C. 30　　D. 80

【变式 4】(2014 · 大纲文,8)　设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_2=3$,$S_4=15$,则 $S_6=$(　　).

A. 31　　B. 32　　C. 63　　D. 64