第一部分　线 性 规 划

第一章　线性规划的数学基础知识

第二章　线 性 规 划

总 目 录

第一章　线性规划的数学基础知识

本章概述与线性规划有关的数学基本概念及基本知识。这是为掌握线性规划方法及深入学习线性规划的理论所必需的。

§1．矩　阵

将m×n个数，排列成m行n列成长方形的表式，称为矩阵，用符号表示为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中a_{11}，a_{12}，…a_{mn}称为矩阵A的元。一般用符号表示为a_{ij}（$i=1$，…，m；$j=1$，…，n，）。在矩阵A中包含m行n列时，称矩阵A为m×n矩阵。当m＝n时，则称A为n阶方阵。m＝1时，$A=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$称为行矩阵；n＝1时

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$称为列矩阵。

当构成矩阵的所有元素均为零，这样的矩阵称为零矩阵，简写为0

$$0=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

如一个矩阵，m＝n，其主对角线上的元素为1，其它元素均为0，称作单位矩阵，记作I。

$$I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1－1　矩阵的运算规则：

（1）矩阵相等

若矩阵A和矩阵B行列数均相等，矩阵A的元a_{ij}与矩阵B中对应的元b_{ij}相等，

则称矩阵A与矩阵B相等，记作A = B。

（2）矩阵相加

若矩阵A与B的行列数均相等，则定义C = A + B为：

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\cdots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22}\cdots C_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{m1} & C_{m2}\cdots C_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$（$i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \cdots, n$）

（3）矩阵相乘

矩阵A、B分别为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

定义A · B为：

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = C$$

其中

$$\begin{aligned} C_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ C_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ C_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ C_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{aligned}$$

一般情况，当A为i行k列矩阵，B为k行j列矩阵时，C = A · B为i行j列矩阵。

$$C_{ij} = \sum_{\kappa} a_{i\kappa} b_{\kappa j}$$

只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵相乘才有意义。由此

$A \cdot B \neq B \cdot A$。

（4）矩阵与常数相乘

设A为矩阵，a为常数，则定义

$$aA = a\begin{pmatrix} a_{11}\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a_{11} & \cdots & a\,a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a\,a_{m1} & \cdots & a\,a_{mn} \end{pmatrix}$$

1—2　矩阵的运算性质：

（1）结合律

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

（2）交换律

$$A+B=B+A，但A\cdot B\neq B\cdot A$$

（3）分配律

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$
$$C(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$$
$$a\cdot(A+B)=a\cdot A+a\cdot B$$

（4）
$$A+O=A$$
$$A\cdot I=I\cdot A=A$$

1—3　逆矩阵　$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$　$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

假定A是n阶矩阵，I是n阶单位矩阵；如果有矩阵B存在，使AB＝BA＝I，则称B是A的逆矩阵。记作$B=A^{-1}$。由此，$A\cdot A^{-1}=1$。若已知矩阵A，欲求它的逆矩阵A^{-1}。可用A的扩张矩阵$(A\mid I)$，对扩张矩阵两边同时进行行的初等变换，当其左边变换为单位矩阵时，其右边即得到A的逆矩阵A^{-1}，即$(I\mid A^{-1})$。

【例1】　$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求A的逆矩阵$A^{-1}$。

第一步：先写出A的扩张矩阵

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第二步：第一行除4得

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第三步：从第二行减去第一行乘3得

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

第四步：将第二行加到第一行上得

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

第五步：第二行除以$-\frac{1}{2}$得

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{array}\right]$$

于是得A的逆矩阵

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

1—4　矩阵的转置

将矩阵A的行元素变为列元素，列元素变为行元素而不改变原来序号的一种重新排列，称为A矩阵的转置。重新排列后的矩阵称为A的转置矩阵，记作A^T，或记作A'

$$如有A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},则A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

§ 2. 向　量　空　间

2—1　n维空间的概念

任何三个有序的实数(a_1，a_2，a_3)可以在三维几何空间内用一个点A来表示，这个点的坐标分别为a_1，a_2，a_3。也可以将（a_1，a_2，a_3）三个有序实数看作三维空间的一个向量P，而a_1，a_2，a_3，是表示向量沿着坐标方向的三个分量。

在较为复杂的情况下，只用三个有序实数来描述一个对象的状态是不够的。例如空间中的一个刚体具有六个自由度（位移三个，转动三个），因此要描述这个刚体的空间位置状态，需要六个有序实数。而要描述一个地区的工业生产情况就更复杂了。如有以下生产情况统计表。

表1—1

产　品 地　区	煤（吨）	铁（吨）	…………	其它（吨）
No　1	a_{11}	a_{12}	…………	a_{1m}
No　2	a_{21}	a_{22}	…………	a_{2m}
⋮	⋮	⋮	…………	⋮
No　K	a_{K1}	a_{K2}	…………	a_{Km}

拿地区No1来讲，要全面描述它的工业生产情况需用（a_{11}，$a_{12}\cdots a_{1m}$）m个有序数列来表示。以上例子说明了在较复杂的情况下，仅用三维空间的点来描述是办不到的。因此，必须引入n维空间的概念。n维空间的点是由三维空间的点的概念推广得来的。n维空间的点是由n个有序实数（a_1，$a_2,\cdots,a_n$）来表示，其中a_1，$a_2\cdots,a_n$分别表示n维空间点的坐标。同样可以把（a_1，a_2，…，a_n）表示n维空间的一个向量，而a_1，a_2，…a_n分别表示向量的n个分量。

2—2　向量的运算规则

（1）两个向量相等

如向量$P=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和向量$Q=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$具有相等的分量数，且$a_i=b_i$（$i=1,\cdots,n$），则称向量P等于向量Q，记作。$P=Q$。

（2）向量相加

已知n维空间的两个向量

$$P=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$Q=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

定义$V=P+Q=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$。当$n=2$两个向量相加可在平面图上用平行四边形法则确定。

如有：

$$P=(1, 4)$$
$$Q=(6, 2)$$
$$P+Q=(7, 6)$$

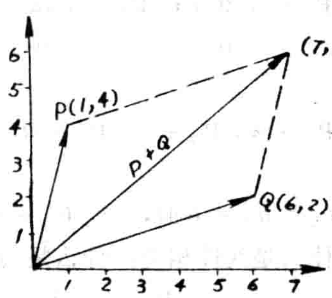


图　1—1

（3）向量与一常数相乘

设P为n维向量，$P=(a_1, \cdots, a_n)$，K为常数，定义$kP=k(a_1\cdots, a_n)=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$。

2—3　线性相关与线性无关

不全为零的

设有n维空间的一组向量P_0，P_1，P_2，…P_m，如果存在一组实数a_1，a_2，…，a_m，使有

$$P_0=a_1P_1+a_2P_2+\cdots+a_mP_m=\sum_{i=1}^{m}a_iP_i$$

存在，则称P_0是P_1，…，P_m的线性组合，或P_0可以用P_1，…，P_m线性表示。

若有n维空间的一组向量P_1，…，P_m，并有一组其中至少有一个不为零的实数a_1，a_2，…a_m存在，使$a_1P_1+a_2P_2+\cdots+a_mP_m=0$成立，则称向量组$P_1$，…，$P_m$线性相关。若只有所有$a_i=0$（$i=1$，…，m）时，上述关系式才成立，则称向量组$P_1$，…，$P_m$为线性无关（或线性独立）。

【例 2】 向量组

$$P_1=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix};\ P_3=\begin{pmatrix}9\\7\\5\end{pmatrix};\ P_4=\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}.$$

线性相关，因为存在一组实数 $a_1=4$，$a_2=-1$，$a_3=-3$，$a_4=2$，使 $a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3+a_4P_4$

$$=4\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}9\\7\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-27\\-21\\-15\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\16\\14\end{pmatrix}=0$$

【例 3】 向量组

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix};\ P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\72\end{pmatrix}$$ 线性无关。

因为 $aP_1+a_2P_2+a_3P_3=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\12a_2\\72a_3\end{pmatrix}$ 只有当 $a_1=a_2=a_3=0$ 时，$a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3=0$。

了解什么是线性相关，什么是线性无关后，再分析一组向量。若它们可表示为：

$$a_1P_1+a_2P_2+\cdots+a_mP_m=0$$

其中至少存在一个系数不为零，则这个向量组为线性相关。其中任一向量 P_K 都可以用其它向量的线性组合表示。

$$P_K=-\frac{a_1}{a_K}P_1-\frac{a_2}{a_K}P_2-\cdots-\frac{a_{K-1}}{a_K}P_{K-1}-\frac{a_{K+1}}{a_K}P_{K+1}$$

$$-\cdots-\frac{a_m}{a_K}P_m$$

令 $l_i=-\dfrac{a_i}{a_K}$，$i=1，2\cdots，k-1，k+1，\cdots，m$。

则有 $P_K=l_1P_1+l_2P_2+\cdots+l_{K-1}P_{K-1}+l_{K+1}P_{K+1}+\cdots+l_mP_m$。

2—4 矩阵的秩

定义矩阵中最大的线性无关的向量个数，称为矩阵的秩。

如 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\end{pmatrix}$ 中线性无关的向量个数为 1，所以矩阵 A 的秩为 1。又如 $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&8&0\\0&0&12\end{pmatrix}$ 中线性无关的向量个数为 3，所以矩阵 B 的秩为 3。

§3. n维向量空间的基

3—1 基的概念

在三维空间中，有三个不在同一平面内的向量P_1，P_2，P_3，由于其中任何一个向量不可能表示其为它两个向量的线性组合，因而P_1，P_2，P_3这组向量是线性无关的。又如果在三维空间内还有另一向量P_4，则P_4一定可以表达成P_1，P_2，P_3的线性组合。这样，我们就称P_1，P_2，P_3，构成了三维空间的一组基向量。例如三维空间中三个坐标轴上的向量

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

构成一组基向量。因为P_1，P_2，P_3线性无关，又任何向量P_0均可表为这三个向量的线性组合。

$$P_0=a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3$$

把三组空间基的概念推广到n维空间。n维空间的基是指n个线性无关的向量组所构成的坐标系。例如n个单位的n维向量

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是n维空间的基。在n维空间中，其它任何向量P_0都可以用向量唯一地线性表示。

$$P_0=a_1e_1+a_2e_2+_2+\cdots a_ne_n$$

因为在三维空间内，只要任意三个向量不在同一平面上，都可以构成一组基。因此基的数量可以是无限的。一个向量可用一组基向量线性表示，一旦构成基的向量改变后，它又可以用新的基向量组线性表示，这就是线性变换。这个概念可以推广到n维空间的情形。

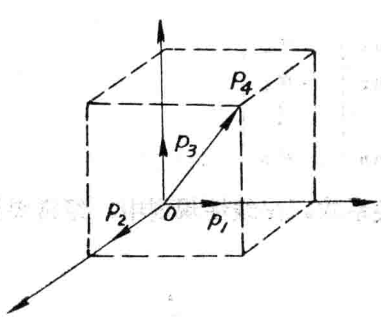


图 1—2

3—2 基的变换

设n维空间一组基e_1，e_2，…，，e_n，称为A基。

向量 $P=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 可以用A基表示为：

$$P = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

又在同一空间有另一组基e_1'，e_2'，…，e_n'，称为B基。这两组基之间存在相应关系为：

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}e_1' + a_{12}e_2' + \cdots + a_{1n}e_n' \\ e_2 &= a_{21}e_1' + a_{22}e_2' + \cdots + a_{2n}e_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= a_{n1}e_1' + a_{n2}e_2' + \cdots + a_{nn}e_n' \end{aligned}$$

若需要将向量P用B基表示，那末经线性变换后可以得到：

$$\begin{aligned} P &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n \\ &= a_1(a_{11}e_1' + a_{12}e_2' + \cdots + a_{1n}e_n' \\ &\quad + a_2(a_{21}e_1' + a_{22}e_2' + \cdots + a_{2n}e_n') \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + a_n(a_{n1}e_1' + a_{n2}e_2' + \cdots + a_{nn}e_n') \\ &= (a_1 a_{11} + a_2 a_{21} + \cdots + a_n a_{n1})e_1' \\ &\quad + (a_1 a_{12} + a_2 a_{22} + \cdots + a_n a_{n2})e_2' \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + (a_1 a_{1n} + a_2 a_{2n} + \cdots + a_n a_{nn})e_1' \\ &= a_1'e_1' + a_2'e_2' + \cdots + a_1'e_n' \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 a_{11} + a_2 a_{21} + \cdots + a_n a_{n1} \\ a_2' &= a_1 a_{12} + a_2 a_{22} + \cdots + a_n a_{n2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n' &= a_1 a_{1n} + a_2 a_{2n} + \cdots + a_n a_{nn} \end{aligned}$$

用矩阵形式可表示为：

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

这就是向量P由A基表示变换为用B基表示的关系式。在线性规划中，经常要计算向量由一组基表示变换到另一组基表示的运算。

§4. 凸集和极点

4—1 凸 集

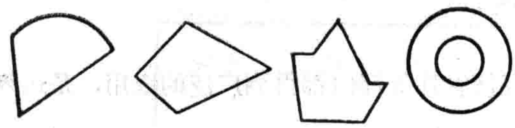
在日常生活中，我们是以直观感觉来判断某物体或图形的凸凹性。一方面，凭直观的判断不严格，容易产生错误；另一方面，对一个几何图形有时只给出解析表达式，直观判断就无法进行。因此，对凹凸性的判断需要给出严格的数学意义。

定义：如果集合C中的任意两点X_1，X_2的连线上的所有点都是集合C中的点，则

称C为凸集。

由于X_1，X_2的连线可表示为$aX_1+(1-a)X_2$，　（$0\leqslant a\leqslant 1$）。因此上述定义也可表达为：对任何$X_1\in C$，$X_2\in C$有$aX_1+(1-a)X_2\in C$（$0\leqslant a\leqslant 1$），则称C为凸集。

在图1—3中（a）（b）是凸的，（c），（d）不是凸的。



a)　　b)　　c)　　d)

图　1—3

4—2　极　点

凸集C中满足下列条件的点Z称极点：如果C中不存在任何两个不同的点X_1，X_2，使X可以表示为$X=aX_1+(1-a)X_2(0<a<1)$。

即极点是不处于凸集中任何两点连线上的点。例如三角形、正方形、长方形等图形的顶点都是极点。

4—3　凸线性组合

定义： n维空间向量P_0，P_1，…，P_m存在系数$a_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=1$，使$P_0=a_1P_1+a_2P_2+\cdots+a_mP_m$成立，称$P_0$为$P_1$，$P_2$……$P_m$的凸线性组合。

§5．等价方程组及初等变换

如果有一个n个变量m个方程的方程组：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

所谓方程组的解，是指能同时满足所有方程的变量组x_1，x_2，……x_n。所有解的集合叫作解集。上述方程组可能有解，也可能无解，无解时方程组叫作不相容（或矛盾）方程组，它的解集是个空集。

如果把方程组作下列变换：

1、任何一个方程E_i乘上一个$K\neq 0$常数。

2、E_i用E_i+kE_j代替，E_j是方程组中另一方程。

经过这样变换后，方程组的解仍和原方程组一样。

例如，原方程组为：

$$-x_1+x_2+x_3=1$$
$$x_1+x_2+x_4=2$$

把第一个方程乘上（－1）加上第二方程，得到新的第二方程，这时方程组变为：

$$-x_1+x_2+x_3=1$$
$$2x_1-x_3+x_4=1$$

这两个方程组中一组方程的解，必为另一组方程的解。我们称这两组方程是等价的。这样的变换叫作初等变换或初等行变换。

第二章　线性规划

§1．基本概念与应用举例

线性规划目前在军事，工农业生产和经济管理等部门都得到广泛的应用，是运筹学中最有用的方法之一。

线性规划是30年代末期，由生产组织和经济管理部门开始研究的，到第二次世界大战后，在军事和工业部门得到很多的应用，特别是1947年戴塞（George. B. Dantzig）提出了单纯形法，系统地总结了线性规划模型的计算方法。60年代以来，由于计算技术的发展，使规模较大、变量更多的线性规划数学模型也能很快求出最优解。线性规划所考虑的问题，就是如何用可能的最简单方法，在各种相互关联的多变量线性约束条件下，去解决或规划一个对象的线性目标函数最优的问题。所以，线性规划的数学模型，也就是在满足一组等式或不等式约束条件的情况下，使目标函数值最大（或最小）。这是一种条件极值问题，而这种条件极值问题，用以往的微积分方法（求导等）来解决，常常是无能为力的。

在实践中常需处理一些系统在静态下怎样保持最优工作状态的问题。这类问题的数学提法是已知系统的某一目标函数$f(X)$，现在要寻求某一X（也就是一组x_1，x_2，……x_n值），在满足等式约束：

称一决策变量，可控变量

$$g_i(X)=0 \qquad (i=1，2，\cdots\cdots P)$$

和不等式约束：

$$h_j(X)\leqslant 0 \text{ 或} \geqslant 0 \quad (j=1，2，\cdots\cdots P)$$

的条件下，使目标函数$f(X)$取极大（或极小）值。

这里$f(X)$是X的线性函数，$g_i(X)$或$h_j(X)$也是X的线性函数。

下面首先用一些实例说明什么是线性规划问题，它的数学模型和最优解是怎样的。至于最优解是如何得到的，这将在后面几节中论述。

例1，有一电视机制造厂，生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型电视机，根据市场的需要情况，每天最小需要量分别为200，250，100台，而该厂每天可以利用的工时为1000个时间单位，可利用的原材料每天有2000个单位，各型电视机生产一台所需工时和原材料单位数等见表2.1。问每天各型电视机应生产多少台，才能使该厂得到最大利润。

令：x_i为第i型电视机的生产数量

则根据表2.1的已知条件和要求，显然可写出约束方程式为

$$x_1+1.5x_2+4x_3\leqslant 2000 \qquad (\text{原材料}) \qquad (1-1)$$

$$2x_1+1.2x_2+x_3\leqslant 1000 \qquad (\text{工时}) \qquad (1-2)$$

$$x_1 \geqslant 200 \qquad (1-3)$$

$$x_2 \geqslant 250 \qquad (1-4)$$

$$x_3 \geqslant 100 \qquad (1-5)$$

表 2.1

型式	原材料	工时	最低需要量（台）	利润系数
Ⅰ	1.0	2.0	200	10
Ⅱ	1.5	1.2	250	14
Ⅲ	4.0	1.0	100	12
可利用量	2000	1000		

一般讲，生产出的产品数必需满足所有 x_i 均大于等于零，因为产品数不可能是负的。本例中由于约束条件中已给出最低产品需要量数，均大于零，故所有 $x_i \geqslant 0$。

在以上约束条件下，求目标函数利润最大值。即

$$\max f(X)=10x_1+14x_2+12x_3 \qquad (1-6)$$

我们用线性规划方法求出其解为：

Ⅰ型电视机应生产200台

Ⅱ型电视机应生产250台

Ⅲ型电视机应生产300台

最大利润额为9100单位值。

注意在本例中，数学模型的约束条件有两种型式，一种是（⩽）不等式，如前两个方程式可写成

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i=1,\ 2) \qquad (1-7)$$

另一种为（⩾）不等式，即后三个方程式

$$x_j \geqslant b_j \quad (j=1,\ 2,\ 3) \qquad (1-8)$$

此例的目标函数是求极大值问题，在许多情况下，求极大值问题的约束条件是（⩽）不等式，如（1－7）式。

（1－6）的一般表示式为

$$\max f(X)=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=\sum_{j=1}^{3} C_j x_j \qquad (1-9)$$

在求极大值问题中，C_j，为利润（或产值）系数。

例2，某车间有四台机床，每台机床均可加工三种独立的产品，加工这三种产品每小时的生产定额见表2.2。每小时所得的利润指标见表2.3。在下一个生产周期中，

计划规定各种产品的生产数量分别为７００，５００，４００，而四台机床能利用的工时最多为９０，７５，９０，８５小时。问应如何安排各台机床的生产，才能使工厂所得利润最大。

表２.２　四台机床加工三种产品的生产定额

机床 j 定额 / i 产品	1	2	3	4
1	8	2	4	9 5/hr
2	7	6	6	3
3	4	8	5	2

表２.３　每小时的利润值

机床 j 利润 / i 产品	1	2	3	4
1	5	6	4	3
2	5	4	5	4
3	6	7	2	8

令x_{ij}是第j台机床加工第i种产品的小时数，i＝１，２，３，j＝１，２，３，４。我们可写出线性划规的数学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}&8x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+9x_{14}=700 &&(1-10)\\&7x_{21}+6x_{22}+6x_{23}+3x_{24}=500 &&(1-11)\\&4x_{31}+8x_{32}+5x_{33}+2x_{34}=400 &&(1-12)\end{aligned}\right\}\text{需要量的等式约束条件}$$

$$\left.\begin{aligned}&x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 90 &&(1-13)\\&x_{12}+x_{22}+x_{32}\leqslant 75 &&(1-14)\\&x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 90 &&(1-15)\\&x_{14}+x_{24}+x_{34}\leqslant 85 &&(1-16)\end{aligned}\right\}\text{工时的不等式约束条件}$$

所有$x_{ij}\geqslant 0$，i＝１，２，３，j＝１，２，３，４，这是非负约束条件。

在以上约束条件下，要求工厂所得生产利润最大，满足目标函数

$$\begin{aligned}\max:\ f(X)=\ &5x_{11}+6x_{12}+4x_{13}+3x_{14} &&(1-17)\\&+5x_{21}+4x_{22}+5x_{23}+4x_{24} &&(1-18)\\&+6x_{31}+7x_{32}+2x_{33}+8x_{34} &&(1-19)\end{aligned}$$

用线性规划方法，我们可以解出最优的机床生产调度方案，如表２.４所示

表２.４　最优调度方案

机床 j 工时 / i 产品	1	2	3	4
1	70.12	56.19	6.67	0
2	0	0	83.33	0
3	19.88	18.81	0	85.00

根据表2.4这一最优调度方案，该厂在这一生产周期中可得利润2062元。此例中，约束条件有等式和（≤）不等式两种

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_{ij} = b_{i0} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1—20}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq b_{j0} \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1—21}$$

目标函数仍是求最大值问题，

例3，如图2—1所示，一个简单的电阻器网路。在设计这一电路时，要求在电阻器发热总功率最小的前提下，确定各个变阻器的阻值。

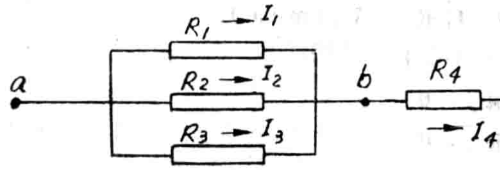


图 2—1

设 V_i 　　$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 　具有 R_i 的各支路的电压

　I_i 　　$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 　具有 R_i 的各支路的电流由欧姆定律知：

$$V_i = I_i R_i \tag{1—22}$$

由电路的克希荷夫定律我们知道：

$$V_1 = V_2 = V_3 \tag{1—23}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 \tag{1—24}$$

各电阻发热的总功率为：

$$P = \sum_{i=1}^{4} I_i^2 R_i \tag{1—25}$$

该电路设计问题可以分下述两种情况考虑：

（1）给定 I_i，$1 \leq i \leq 4$，且给出条件

$$V_i(\min) \leq V_i \leq V_i(\max) \qquad 1 \leq i \leq 4 \tag{1—26}$$

或（2），给定 V_i，$1 \leq i \leq 4$，且给出条件

$$I_i(\min) \leq I_i \leq I_i(\max) \qquad 1 \leq i \leq 4 \tag{1—27}$$

寻求一组 R_1，R_2，R_3，R_4 组合，以使（1—25）最小。

约束（1—26），对应于某一 V_i' 与 $\triangle i$，则为：

$$V_i(\min) = V_i' - \triangle_i \quad 伏$$

$$V_i(\max)=V_i'+\triangle_i \quad 伏$$
$$1\leqslant i\leqslant 4$$

约束(1—27)，对应于某一I_i'及$\triangle_i$，则为：

$$I_i(\min)=I_i'-\triangle_i \quad 安$$
$$I_i(\max)=I_i'+\triangle_i \quad 安$$
$$1\leqslant i\leqslant 4$$

对于情况(1)，线性规划有如下形式：

$$\text{minimize}\sum_{i=1}^{4} I_i^2 R_i \tag{1—29}$$

约束为：

$$V_i(\min)\leqslant I_i R_i\leqslant V_i(\max) \tag{1—30}$$
$$1\leqslant i\leqslant 4$$
$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \tag{1—31}$$
$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \tag{1—32}$$
$$R_i\geqslant 0 \qquad 1\leqslant i\leqslant 4 \tag{1—33}$$

对于情况（2），约束（1—24）及（1—27）不是R_i的线性函数，为此引进电导$G^i=1/R_i$　$1\leqslant i\leqslant 4$，我们得到：

$$I_i=V_i G_i \qquad 1\leqslant i\leqslant 4 \tag{1—34}$$

(1—25)式，我们可以改写成：

$$总功率\ P=\sum_{i=1}^{4} V_i^2 G_i \tag{1—35}$$

将式(1—34)代入(1—24)，这时情况（2）的线性规划问题为如下形式：

$$\text{minimize}\quad P=\sum_{i=1}^{4} V_i^2 G_i \tag{1—36}$$

约束为：

$$I_i(\min)\leqslant V_i G_i\leqslant I_j(\max) \tag{1—37}$$
$$1\leqslant i\leqslant 4$$
$$V_1G_1+V_2G_2+V_3G_3-V_4G_4=0 \tag{1—38}$$
$$G_i\geqslant 0 \tag{1—39}$$

§ 2　线性规划数学模型的几何图解法
——拐点法 (Corner-Point Method)

（一）两个变量的线性规划问题

虽然线性规划数学模型的几何图解法适用于分析两个结构变量的问题，但用这种方法，对确定满足约束条件的可行域和找出符合目标函数极值的最优解，都比较直观。由

此而引出的解线性规划问题的步骤和结论，以及由此而形成的单纯形法和计算程序，对解决多变量问题也是适用的。下面我们通过一个实例说明之。

有一自行车厂生产两种型式的自行车，生产一辆所需的原材料分别为2和3个单位数，所需工时分别为4和2个单位数，而生产的产值分别为6和4个单位数。如果每天工厂能提供的原材料为100个单位，能提供的工时为120个单位，问两种自行车各生产多少辆，才能使产值最高？

这个问题的数学模型如下：

约束条件为

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 & \text{原材料限制} \quad (2-1) \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 & \text{工时限制} \quad (2-2) \end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0 \quad x_2\geqslant 0 \qquad \text{非负限制} \quad (2-3)$$

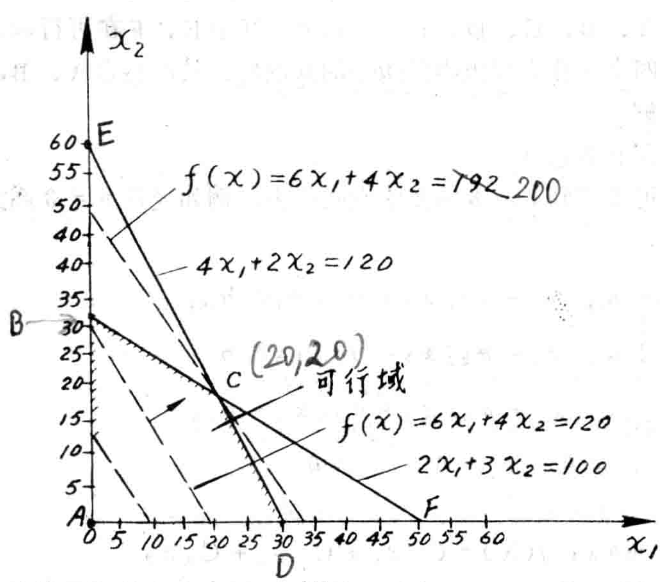
目标函数为：

$$\max: f(X)=6x_1+4x_2 \qquad (2-4)$$

对于两个变量 x_1，x_2的问题，我们可以在一平面上作图来求最优解。作图的步骤如下：

（1）找出满足第一个约束条件的区域。为此，需将约束条件写成等式，(此例的约束条件线性方程式有二个，故m＝2）先划出 $2x_1+3x_2=100$ 这一直线，确定 $2x_1+3x_2\leqslant 100$ 的区域，显然，所有在 $2x_1+3x_2=100$ 这一直线以下的区域均能满足此约束条件。只要（≤）不等式右端是非负的，原点也一定在此区域中。

（2）找出满足第二个约束条件 $4x_1+2x_2\leqslant 120$ 的区域，同样是在直线 $4x_1+2x_2=120$ 之下。



若$f(x)=4x_1+6x_2$

图 2—2

（3）在满足 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$ 和以上两条直线以下的区域，打上阴影线，这个区