普通高等教育"十二五"规划教材
武汉大学数学教学丛书

高等数学

蔡东汉　钟六一　黄正华　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

武汉大学数学教学丛书

高等数学

蔡东汉　钟六一　黄正华　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、无穷级数、多元函数微分学、多元函数积分学，以及微分方程. 本书配置了一定数量的习题，供学生课外练习，并在书末附有习题答案，便于教学. 全部习题按节配置，注重循序渐进，强调基本方法. 全书内容适当，文字流畅，例题丰富，容易理解，便于自学.

本书可作为文学、历史、哲学、法学、外语、社会学等专业的高等数学课程教材，也可供城市规划、建筑学等专业阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/蔡东汉，钟六一，黄正华主编. —北京：科学出版社，2014.8
(武汉大学数学教学丛书)
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-041755-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①蔡… ②钟… ③黄… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第193079号

责任编辑：吉正霞 李梦华／责任校对：彭 涛
责任印制：高 嵘／封面设计：蓝 正

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：B5（720×1000）
2014年8月第 一 版 印张：12 3/4
2014年8月第一次印刷 字数：242 000

定价：28.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

为了加强文科非经济学类高等数学课程的教材建设和教学改革, 我们编写了这本 72 学时的高等数学教材. 本书属于“武汉大学数学教学丛书”, 可作为文学、历史、哲学、法学、外语、社会学、政治学、行政学、外交学、行政管理、公共事业管理、思想政治教育、劳动与社会保障等专业的高等数学课程教材, 也可供城市规划、建筑学、编辑出版、图书馆学、档案学、公共卫生、医学、药学、护理学等专业阅读参考.

在编写过程中, 我们尽可能针对人文社会科学的学生对数学知识的需求, 即具有较强的形象思维和阅读能力, 需要培养逻辑思维和运算能力的特点, 在内容安排上通过直观、通俗的方式叙述和展现基本的数学概念, 增强文科学生的直觉和逻辑思维能力.

本书还配置了一定数量的习题, 供学生练习, 并在书末附有习题答案, 便于教学. 全部习题按节配置, 注重循序渐进, 强调基本方法.

本书主要内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、无穷级数、多元函数微分学、多元函数积分学, 以及微分方程. 其中第 1~4 章由蔡东汉编写, 第 5 章和第 7 章由钟六一编写, 第 6 章由黄正华编写, 全书由蔡东汉统稿.

限于编者的水平, 书中难免会出现不足与疏漏之处, 敬请广大读者指正.

编　者

2014 年 2 月

目　录

第1章　函　　数

微积分的基本对象是函数. 本章介绍微积分使用的函数的 4 种方式: 表达式、表格、图像和语言, 并讲述微积分中主要使用的函数.

1.1　函数的概念与表达方式

1.1.1　区间与邻域

1. 区间

通常把实数集 $\mathbf{R}$ 记为无穷区间 $(-\infty,+\infty)$. 有限的闭区间 $[a,b]$ 和开区间 (a,b) 分别为如下的数集:

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},\quad (a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

无限和有限的左开右闭的区间分别为

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},\quad (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

无限和有限的左闭右开区间分别为

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},\quad [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

2. 邻域

给定实数集 $\mathbf{R}$ 中的一点 x_0(记为 $x_0\in\mathbf{R}$(读作 x_0 属于 $\mathbf{R}$)) 及正数 δ, 点 x_0 的 δ 邻域是指以 x_0 为中心, 长度为 2δ 的开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

记为 $U_\delta(x_0)$.

而 x_0 的空心 δ 邻域是指如下的集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

即为开区间 $(x_0-\delta,x_0)$, $(x_0,x_0+\delta)$ 的并集. 记为 $\mathring{U}_\delta\,(x_0)$.

1.1.2　函数的定义

从数学上讲, 函数用来表示一个量依赖于另一个量. 考察下面 4 种情形.

(1) 正方形的面积 A 依赖它的边长 a. 其规则为 $A=a^2$, 对于每个正数 a, 有唯一一个对应的值 A. 我们称 A 为 a 的函数.

(2) 我国人口总量 P 依赖于时间 t. 表 1.1.1 是近 60 年我国人口的统计数据.

表 1.1.1　(单位: 亿)

年份	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
人口总量	5.5196	6.1465	6.6207	7.2538	8.2992	9.242	9.8750
年份	1985	1990	1995	2000	2005	2010	
人口总量	10.5851	11.4333	12.1121	12.6743	13.0756	13.4091	

对于每一个时间 t 的取值, 对应一个 P 的值, 我们称 P 是 t 的函数.

(3) 邮寄包裹的费用 C 依赖于它的重量 w. 邮局制定一个规则确定 C 为 w 的函数.

(4) 图 1.1.1 记录的是武汉某一天过去的 24h 整点气温 T 的变化.

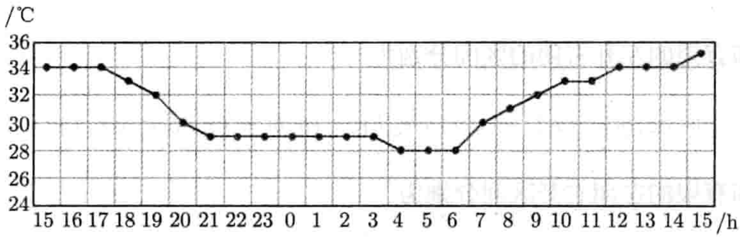

图 1.1.1

在上面每个例子都表明了这样一个规则, 给定一个数 $(a,t,w$ 或 $t)$, 另一个数 $(A,P,C$ 或 $T)$ 被确定. 我们称第二个数是第一个数的函数.

定义 1.1　*一个函数 f 是确定一个集合 D 中每个元素对应集合 R 中唯一一个元素的规则, 记为 $f(x)$.*

通常, D 与 R 为实数集. D 称为函数的定义域. $\{y=f(x)\mid x\in D\}\subset\mathbf{R}$ 称为函数的值域. x 称为自变量, y 称为因变量. 对于一个函数 f, 通常将它的定义域和值域记为 $D(f)$ 和 $R(f)$.

一个函数可用一个指示图示意 (图 1.1.2). 图中定义域 D 中的每一元素对应于值域 R 中一个唯一的元素. 图中的箭头表示定义域 D 中的元素 a 对应于值域 R 中的元素 $f(a)$, D 中元素 x 对应于 R 中的 $f(x)$ 等.

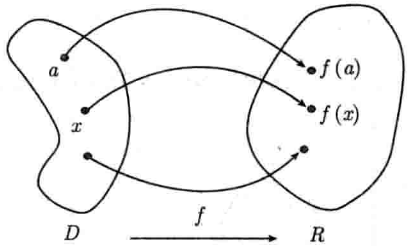

图 1.1.2

将函数可视化的通常方法是它的图像. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 则它的图像为 $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. 即函数 $f(x)$ 的图像由坐标平面上满足 $y = f(x), x \in D$ 的点 (x, y) 构成.

函数的图像可直观地为我们提供函数随自变量变化而变化的过程 (图 1.1.3). 若点 (x, y) 在函数的图上, 则 $y = f(x)$ 为图在点 x 处的高度 (可为正值, 也可为负值或零). 我们也可从图中观察函数的定义域和值域 (图 1.1.4).

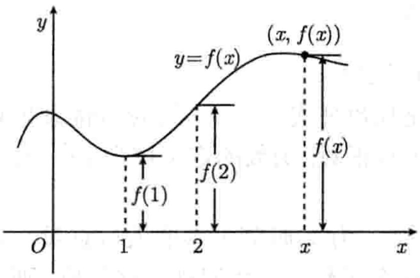

图 1.1.3

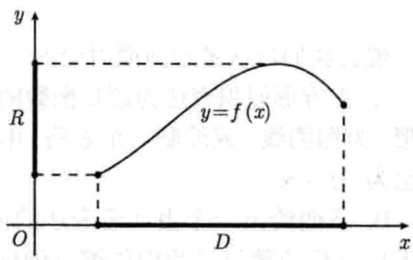

图 1.1.4

例 1.1 对图 1.1.5 中函数的图形: (1) 找出 $f(2)$ 与 $f(5)$ 的值. (2) 确定函数的定义域和值域.

解 (1) $f(2) = 5$, $f(5) \approx -1.8$;

(2) $D = [0, 7], R = [-3, 5]$.

注 1.1 图 1.1.5 中函数的代数表达式为 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + 9x - 3$.

1.1.3 函数的四种表示方式

(1) 语言的表示 (由文字给出);

(2) 数值的表示 (由表格给出);

(3) 可视的表示 (由图像给出);

(4) 代数的表示 (由表达式给出).

如果一个函数能由以上 4 种方式之一表述出来, 将函数的一种表述转化为另

一种表述通常可增加我们对函数的进一步了解. 例如, 将函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 9x - 3, 0 \leqslant x \leqslant 7$ 用图形表达 (其图形为图 1.1.5), 我们可观察它的变化过程.

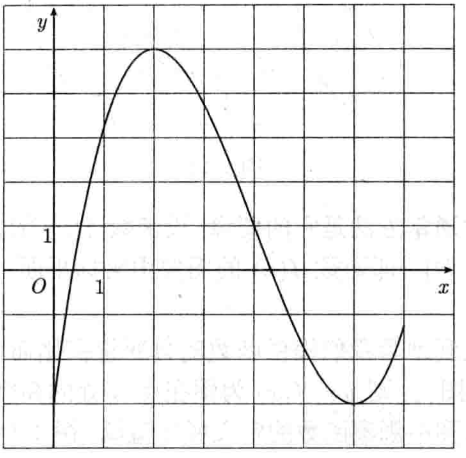

图 1.1.5

现在我们再次考察前面讨论的 4 种表示方式:

A. 正方形面积表达为边长函数的方式是代数公式 $A(a) = a^2$, 尽管能画出它的图形 (为抛物线) 或编制一个表格. 由于边长是正数, 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域也为 $(0, +\infty)$.

B. 下面给出一个由词语表达的函数: $P(t)$ 为 t 时刻中国的人口总量. 表格中人口总量的数值使我们能够方便地表示这个函数. 若我们描出这些值, 则得到图 1.1.6(称为散点图).

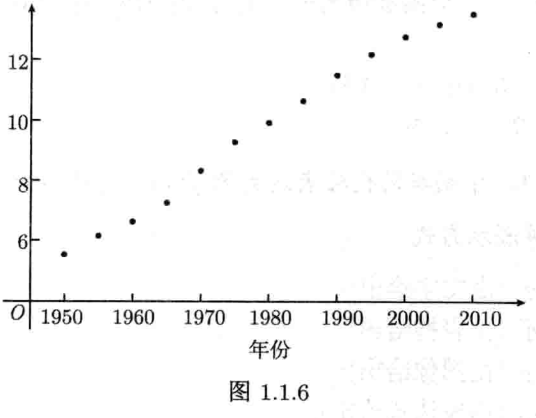

图 1.1.6

可以找出一个图接近这些数据. 那么这个图的表达公式为什么? 当然, 我们不

可能得到任何时刻 t 时人口数量的准确公式, 但在一定的时间区间内, 可以利用曲线拟合的方法找出接近 $P(t)$ 的函数.

$$P(t) \approx f(t) = \frac{16.3824}{1 + 2.0771\mathrm{e}^{-0.038624(t-1950)}} \tag{1.1}$$

图 1.1.7 表明曲线较好地拟合了人口数据. 函数 f 称为人口增长的一个数学模型. 换句话说, 这个确切的表达式较好地近似了我们给出的函数的行为. 表达式 (1.1) 称为 Logistic 函数, 是描述 S 型增长最常用的一种函数, 式中的常数 $\mathrm{e} \approx 2.718281828459045\cdots$ 为一个无理数.

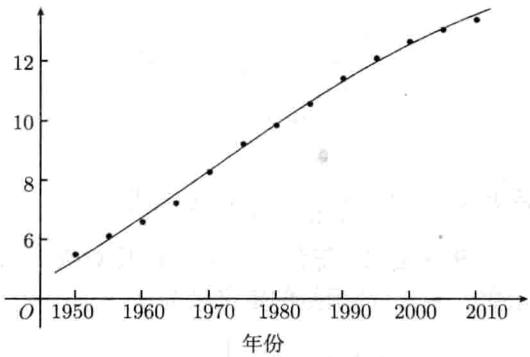

图 1.1.7

函数 $P(t)$ 是我们在探讨现实问题中遇到的一类典型的函数. 首先, 用文字给出函数的表达. 例如, “某商品的销售量随价格的下降而上升”“学生学习某门课程的成绩与投入该课程的学习时间成正比” 等. 通过观察和测试可得到函数的一个数值表格, 即得到函数的表格表示.

C. 我们再次考察由文字表述的函数: 由平信重量所确定的外埠邮费. 国家邮政局网站 2013 年公布的标准如下: 首重 100g 内, 每重 20g 1.2 元; 续重 101~2000g, 每重 100g(不足 100g 按 100g 计算)2 元. 表述该函数最为方便的形式为表格, 尽管也可用图形表述该函数.

D. 图 1.1.1 为表述气温的最自然的方式. 图中的数据也容易用表格给出, 甚至用公式给出, 但图形能更清晰地提供气温的变化幅度和变化趋势. 同样地, 心电图能使医生更好地判断患者的心脏功能是否正常.

例 1.2 一个顶部开口的长方体容器的体积为 $10\mathrm{m}^3$, 底部的长为宽的 2 倍. 制造该长方体容器底部材料每平方米 20 元, 侧面材料每平方米 8 元. 将制造费用 C 表达成底部宽度 a 的函数 (图 1.1.8).

解 设长方体底部的宽为 a, 高度为 h, 则底边的长为 $2a$, 底部的面积为 $2a^2$. 于是长方体的高度为 $h = \dfrac{10}{2a^2}$, 侧面积为 $2ah + 4ah = 6ah = \dfrac{30}{a}$. 故

$$C = 40a^2 + \frac{240}{a}, \quad a > 0$$

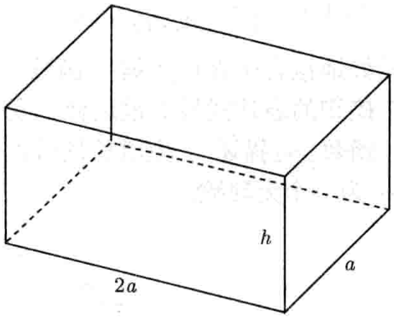

图 1.1.8

例 1.3　确定函数 $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\lg(3-x)}$ 的定义域.

解　由负数开平方根无意义, 需有 $x \geqslant -2$. 而使对数 $\lg(3-x)$ 有意义, 则有 $x < 3$. 又零不能作除数, $x \neq 2$. 故函数的定义域为 $D = [-2, 2) \cup (2, 3)$.

例 1.4　取绝对值所得的函数为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

有时一个函数也可以在其自变量的不同变化范围内用几个不同表达式来确定, 这种函数称为分段函数.

例 1.5　函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leqslant x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

的定义域为 $[-1, 1]$, 图形如图 1.1.9 所示.

例 1.6　国内埠外邮件重量小于 100g 的邮资的函数表达式为

$$y = \begin{cases} 1.2, & 0 < x \leqslant 20 \\ 2.4, & 20 < x \leqslant 40 \\ 3.6, & 40 < x \leqslant 60 \\ 4.8, & 60 < x \leqslant 80 \\ 6.0, & 80 < x \leqslant 100 \end{cases}$$

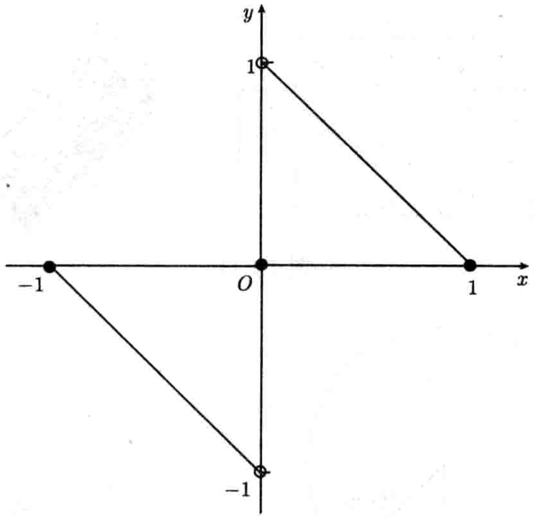

图 1.1.9

练　习　1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = 1 - \sqrt{x-2}$;　(2) $y = \dfrac{x+3}{1-\sqrt{x+1}}$;　(3) $y = \lg(4-x) + 4^{\frac{1}{x}}$.

2. 确定下列函数的定义域并作出函数的图形:

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ x-1, & 1 < |x| < 2; \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0; \end{cases}$

(3) $f(x) = 6 - |2x-1|$.

3. 给出图 1.1.10 中函数图形的函数表达式:

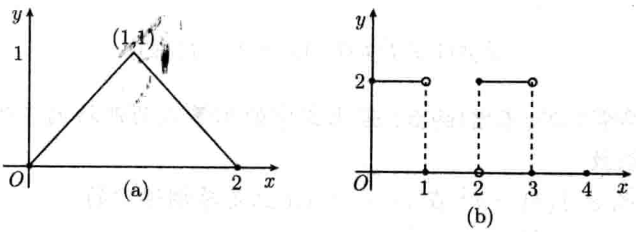

图 1.1.10

4. 用一块长 22cm, 宽 14cm 的矩形铁皮四角截去边长为 x 的正方形做一个无盖的铁盒 (图 1.1.11). 将盒的体积 V 表示为正方形边长 x 的函数.

5. 将半径为 20cm 的铁皮剪去一个弧长为 x 的扇形, 做成一个圆锥体 (图 1.1.12). 锥体的底半径为 r, 高为 h. (1) 解释为什么锥体底圆的周长为 $40\pi - x$; (2) 将锥体底的圆半径 r 表达成 x 的函数; (3) 将锥体的高 h 表达成 x 的函数; (4) 将锥体的体积 V 表达成 x 的函数.

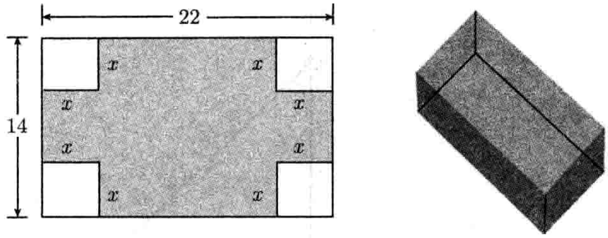

图 1.1.11

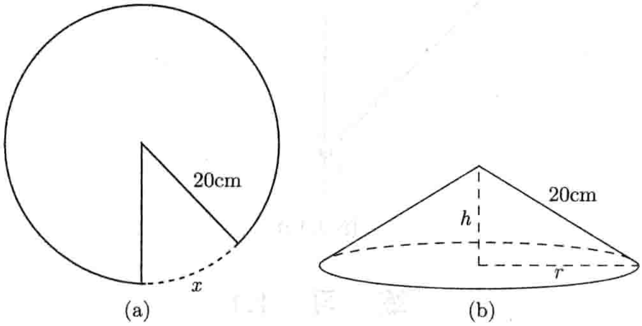

图 1.1.12

1.2　具有特定几何特征的函数

1.2.1　单调函数

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ 有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 为单调不减(不增)函数; 若上式中的不等式为严格的不等式, 则称 $f(x)$ 为单调增(减)函数.

例 1.7　函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递增的.

因为对 $x_2 > x_1$, 有

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \\ &= (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$