

河南省“十二五”普通高等教育规划教材配套辅导

线性代数学习指导

李亦芳 主编



科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材配套辅导

线性代数学习指导

李亦芳 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是王天泽教授主编的《线性代数》教材的配套辅导用书. 全书共 5 章, 每章内容包括知识结构图、基本要求、概念点拨、典型例题解析、历年考研试题选解、课后习题全解、同步自测题及答案, 另有附录为十套模拟题及参考答案.

本书例题丰实, 对不易理解、容易混淆的概念进行点拨, 相对于教材又有一定独立性, 可作为学生学习线性代数课程以及考研的复习指导书, 也可作为教师讲授线性代数课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/李亦芳主编. —北京: 科学出版社, 2014.8
河南省“十二五”普通高等教育规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-041593-6

I. ①线… II. ①李… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 182158 号

责任编辑: 胡海霞 昌盛/责任校对: 钟 洋
责任印制: 阎 磊/封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
<http://www.sciencep.com>

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2014 年 8 月第一次印刷 印张: 14 1/4

字数: 287 000

定价: 27.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



《线性代数学习指导》编写委员会

主 编：李亦芳

主 审：刘法贵 魏志强

编 委：黄 坤 王田丽 张广强

前 言

本书是王天泽教授主编的《线性代数》教材的配套用书. 本书内容按照主教材的章节顺序编排, 共分 5 章: 行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、二次型、模拟试题十套及参考答案. 每章内容包括知识结构图、基本要求、重要结论及公式、概念点拨、典型例题解析、历年考研试题选解、课后习题全解、同步自测题及答案.

在内容结构上, 基本要求部分完全是按照最新全国硕士研究生入学考试的要求编写; 概念点拨对部分抽象不易理解或容易混淆的概念进行点拨; 例题选择面广并且丰富, 既适合少学时又适合多学时的线性代数课程, 例题讲解注重解前思路分析, 一些题后加了评注, 且解题思路用不同字体区分, 版块设计突出了重点, 便于学生理解、掌握与拓展; 历年考研试题选解收录了大量的考研真题及解答; 自测题分填空题、选择题、计算题和证明题 4 类, 部分有判断题, 并有参考答案, 以便学生及时检验知识掌握的程度; 最后附录给出十套模拟试题供学生全部学完复习之用.

本书可供使用王天泽教授主编的《线性代数》教材 (以下简称“主教材”) 的学生作同步辅导之用, 也可供讲授线性代数课程的教师作参考, 还可以作为学生考研的复习指导用书.

本书的第 1, 3, 4, 5 章分别由李亦芳、张广强、王田丽、黄坤执笔, 第 2 章由王田丽、张广强共同执笔, 模拟题由黄坤执笔, 全书的自测题、考研题由黄坤初步取材, 李亦芳、刘法贵、魏志强对全书统稿并审定. 本书在编写过程中, 得到了王天泽教授的关心和支持, 王教授还给本书提出了许多宝贵意见, 在此表示感谢. 限于作者水平, 难免有疏漏之处, 恳请读者批评指正.

编 者

2014 年 2 月

目 录

前言

第 1 章 行列式	1
1.1 重要结论及公式	1
1.1.1 特殊行列式	1
1.1.2 展开定理	2
1.1.3 Cramer 法则	3
1.2 概念点拨	3
1.2.1 关于行列式的定义	3
1.2.2 行列式与行列式的值有区别吗	4
1.2.3 余子式、代数余子式与元素有关吗	4
1.3 典型例题解析	5
1.3.1 题型一：行列式的计算	5
1.3.2 题型二：与行列式概念有关的问题	13
1.3.3 题型三：关于余子式和代数余子式	13
1.3.4 题型四：Cramer 法则及其应用	14
1.3.5 题型五：杂题	16
1.4 历年考研试题选解	17
1.5 课后习题全解	20
1.6 同步自测题 (一)	27
第 2 章 矩阵	30
2.1 重要结论及公式	31
2.1.1 对称矩阵与反对称矩阵	31
2.1.2 矩阵的基本运算	31
2.1.3 可逆矩阵	32
2.1.4 关于伴随矩阵的基本公式	34
2.1.5 矩阵方程的求解	34
2.1.6 初等变换、初等矩阵及其关系	35
2.1.7 矩阵的秩	35
2.1.8 矩阵等价的充分必要条件	36
2.1.9 分块矩阵的初等变换	36

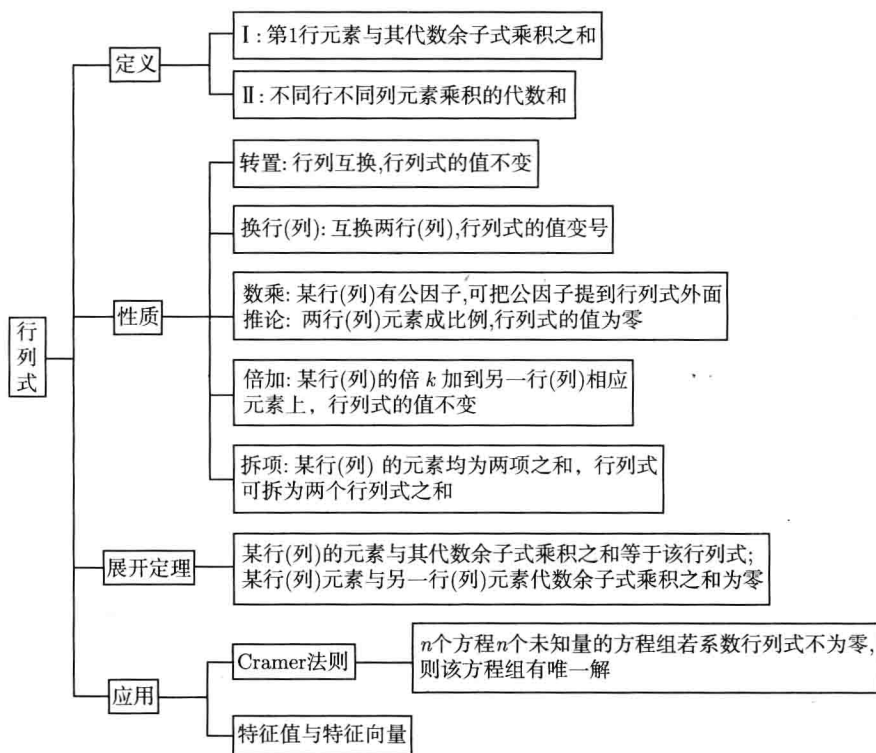
2.2 概念点拨	37
2.2.1 关于行列式与矩阵概念的区别及联系	37
2.2.2 矩阵运算与行列式运算的比较	37
2.2.3 两个非零矩阵相乘, 结果一定不是零矩阵吗	37
2.2.4 用初等变换法求逆阵, 行列变换能同时进行吗	37
2.2.5 关于分块矩阵的转置	38
2.2.6 关于矩阵方程的求解	38
2.3 典型例题解析	38
2.3.1 题型一: 求方阵的幂	38
2.3.2 题型二: 关于方阵、伴随矩阵等的行列式及相关命题	39
2.3.3 题型三: 矩阵可逆的计算与证明	41
2.3.4 题型四: 求解矩阵方程	43
2.3.5 题型五: 关于初等变换与初等矩阵的问题	44
2.3.6 题型六: 矩阵的秩	44
2.4 历年考研试题选解	45
2.5 课后习题全解	48
2.6 同步自测题 (二)	57
第 3 章 线性方程组	60
3.1 重要结论及公式	61
3.1.1 向量组线性相关、线性无关、线性表示和线性组合	61
3.1.2 向量组的极大线性无关组、秩及等价	62
3.1.3 线性方程组解的性质及判定	63
3.1.4 线性方程组解的结构	63
3.2 概念点拨	64
3.2.1 向量组线性相关性的判别方法	64
3.2.2 向量组等价与矩阵等价之间的关系	64
3.2.3 向量组的极大线性无关组	65
3.3 典型例题解析	65
3.3.1 题型一: 向量组线性相关性的判定	65
3.3.2 题型二: 向量组的极大无关组与秩的求法及相关证明	67
3.3.3 题型三: 线性空间初步 (维数、基、向量的坐标、过渡矩阵)	69
3.3.4 题型四: 齐次和非齐次线性方程组的求解、基础解系问题	70
3.3.5 题型五: 两个方程组的同解及有公共解问题	73
3.4 历年考研试题选解	75
3.5 课后习题全解	88

3.6	同步自测题 (三)	99
第 4 章	矩阵的特征值与对角化	101
4.1	重要结论及公式	102
4.1.1	矩阵的特征值与特征向量的性质	102
4.1.2	相似矩阵的性质	102
4.1.3	矩阵相似于对角矩阵的条件	103
4.1.4	实对称矩阵的特性	103
4.1.5	正交矩阵的性质	103
4.1.6	Gram-Schmidt 标准正交化方法	104
4.2	概念点拨	104
4.2.1	关于矩阵的特征值与特征向量	104
4.2.2	关于相似矩阵的性质	104
4.2.3	正交矩阵与可逆矩阵之间的关系	105
4.2.4	用可逆阵与用正交阵化实对称阵为对角阵的不同	105
4.2.5	矩阵的特征值是否都为实数	105
4.2.6	属于矩阵的不同特征值的特征向量是否两两正交	105
4.3	典型例题解析	105
4.3.1	题型一: 求矩阵的特征值与特征向量	105
4.3.2	题型二: n 阶矩阵能否相似对角化的判定及求解	109
4.3.3	题型三: 用特征值和特征向量反求矩阵	111
4.3.4	题型四: 实对称矩阵的对角化问题	112
4.3.5	题型五: 相似对角化的应用	114
4.3.6	题型六: 杂题	115
4.4	历年考研试题选解	116
4.5	课后习题全解	122
4.6	同步自测题 (四)	135
第 5 章	二次型	138
5.1	重要结论及公式	139
5.1.1	二次型的矩阵及秩	139
5.1.2	矩阵的合同	139
5.1.3	化二次型为标准形	139
5.1.4	正定二次型及其判定	141
5.1.5	正定矩阵的性质	142
5.2	概念点拨	142
5.2.1	矩阵的等价、相似和合同三概念之间的区别及联系	142

5.2.2	二次型的标准形是否唯一, 规范形与标准形的区别与联系	142
5.3	典型例题解析	143
5.3.1	题型一: 求二次型的矩阵及秩	143
5.3.2	题型二: 判断矩阵的合同	143
5.3.3	题型三: 化二次型为标准形	144
5.3.4	题型四: 正定二次型的判定及证明	146
5.4	历年考研试题选解	149
5.5	课后习题全解	156
5.6	同步自测题 (五)	168
附录 1	模拟试题	171
附录 2	参考答案	190

第1章 行 列 式

【知识结构图】



【基本要求】

1. 了解行列式的概念, 掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行 (列) 展开定理计算行列式.
3. 会用克拉默 (Cramer) 法则.

1.1 重要结论及公式

1.1.1 特殊行列式

1. 上 (下) 三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 副对角行列式.

$$\begin{vmatrix} & & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \\ \lambda_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & \cdots & & \lambda_2 \\ \vdots & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

3. $n(n > 1)$ 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

4. 分块行列式.

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|,$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{km} \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{km} |A| |B|.$$

这里 $|A|$ 是 k 阶行列式, $|B|$ 是 m 阶行列式.

1.1.2 展开定理

1. 行列式可对某行 (列) 展开, 即行列式等于某行 (列) 的元素与其代数余子式乘积之和, 即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = D \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

2. 行列式某行 (列) 的元素与另外一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和为 0, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

1.1.3 Cramer 法则

$$1. \text{ 若非齐次线性方程组 } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \text{ 的系数行列式}$$

$D \neq 0$, 则方程组有唯一解 $x_j = \frac{D_j}{D} (j = 1, 2, \dots, n)$, 其中 D_j 为用常数项替代 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ 所构成的行列式.

等价说法: 若非齐次线性方程组无解或不止一个解, 则其系数行列式为 0.

$$2. \text{ 齐次线性方程组 } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \text{ 有非零解, 当且仅当}$$

其系数行列式为 0.

等价说法: 齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是系数行列式 $D \neq 0$.

1.2 概念点拨

1.2.1 关于行列式的定义

行列式的定义有多种, 本书的主教材是用递归的方法通过降阶给出行列式的定义, 其实就是将行列式按行 (或列) 展开. 这样定义较传统定义不那么抽象, 容易理解, 而且直接给出了行列式的一种计算方法.

1. 排列及其逆序数.

把 n 个不同的数排成一列, 称为这 n 个数的排列, 记作 $j_1j_2 \cdots j_n$. 在一个排列中, 如果两个数的先后顺序与规定的顺序 (如从小到大的顺序) 不同时, 称这两个数构成一个逆序. 排列 $j_1j_2 \cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数, 记作 $\tau(j_1j_2 \cdots j_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的传统定义.

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 ($n!$ 项) 求和, $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

1.2.2 行列式与行列式的值有区别吗

没有区别, 说“计算行列式”与“求行列式的值”意义相同. 行列式就是一个数, 以 2 阶行列式为例, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 等式左边的表达式称为 **2 阶行列式**, 它只是一种记法, 为了方便记忆而已, 如我们还可以记为 $\det(a_{ij})_{2 \times 2}$ 或 D_2 等, 其实质是通过某种运算得到的等式右边的实数 $ad - bc$, 此实数又称为这个 2 阶行列式的值. 说两个行列式相等是指它们的值相等. “行列式”与“行列式的值”是一回事.

1.2.3 余子式、代数余子式与元素有关吗

在 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中划去元素 a_{ij} 所在的行和列后形成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的 **余子式**, 记作 M_{ij} . 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的 **代数余子式**.

元素 a_{ij} 的余子式及代数余子式只与该元素的位置有关, 而与该元素是什么无

关. 如行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 与行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 的第一行元素的余子式、代数余子

式完全相同. 在有些问题的计算或证明中会用到这一点, 如要证对任意 n 阶行列式当 $i \neq j$ 时, $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$. 由于第 j 行元素代数余子式只与该行元素的位置有关, 与该行元素的数值无关, 所以可以将上式左边看成 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

(注意第 j 行元素和第 i 行元素相同) 按照第 j 行元素的展开式, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

1.3 典型例题解析

1.3.1 题型一：行列式的计算

解题思路：如果行列式的某行(列)有多个零元, 可以按定义展开降阶; 对于低阶的只含数字的行列式一般利用行列式性质化为上(下)三角行列式; 对于含有字母的行列式可以拆行(列)、提取公因子等; 有时可用已知的公式、结果、特殊行列式. 注意对含有字母的行列式在运算过程中不能出现字母的倒数. 对 n 阶行列式还常用递推法.

1. 利用 n 阶行列式的传统定义.

例 1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 注意到该行列式中只有 n 个非零元, 且位于不同行不同列, 根据行列式的传统定义: 行列式的每一项都是来自不同行不同列元素的乘积, 所以

$$D_n = (-1)^{\tau(n-1, n-2, \dots, 2, 1, n)} a_{1, n-1} a_{1, n-2} \cdots a_{n-1, 1} a_{nn} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

2. 降阶法 (即按某行或列展开).

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 列展开

$$\begin{aligned} D_n &= x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\ &= x^n + (-1)^{n+1} y^n. \end{aligned}$$

注 当行列式的某行 (列) 有较多零元时, 可以按行 (列) 展开降阶.

3. 利用行列式性质.

例 3 计算下面的行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 方法 1:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{vmatrix} = 57. \end{aligned}$$

注 对于只含数字的行列式, 总可以通过行 (列) 互换使左上角元素 $a_{11} \neq 0$, 然后将第 1 行的倍数加到下面各行, 使第 1 列的其他元素都化为 0. 以此类推把每行的第 1 个非零元所在列下面的元素都化为 0, 行列式就化成为上三角行列式. 此法普遍适用.

方法 2:

$$\text{原式} \xrightarrow[r_2+2r_3]{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & 5 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 11 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 57.$$

注 如果熟悉了行列式的性质, 可以不必调整 $a_{11} \neq 0$, 只要使某行 (列) 出现足够多的零元, 然后展开降阶即可.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 方法 1: 原式} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix} = 160. \end{aligned}$$

方法 2: 观察到每行元素之和都相等, 所以把第 2, 3, 4 列都加到第 1 列并提取公因子得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160. \end{aligned}$$

注 观察行列式特点, 巧妙利用行列式性质可有效地计算行列式.

例 4 证明下列恒等式:

$$(1) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (\text{假定 } a, b, c \neq 0).$$

证 (1) 根据行列式特点, 将第一列拆开并提取公因子得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\ &= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}; \\ (2) \quad &\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

注 类似上例的题目, 看似证明实际上还是计算行列式. 尤其对于含有字母的行列式更要先观察其特点再去计算. 将行列式拆成若干行列式之和也是一种计算行列式的常用方法, 这时要注意一个 n 阶行列式如果每行 (或列) 都拆开, 则该行列式应拆成 2^n 个行列式之和.

请读者思考: (2) 中如果没有假定 $a, b, c \neq 0$, 还能这样解吗? 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

的值又是多少呢?

例 5 计算 n 阶行列式

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

解 (1) 依次将第 i 行乘 (-1) 加到第 $i+1$ 行 ($i = n-1, n-2, \cdots, 1$), 再将第 $2, 3, \cdots, n$ 列全加到第 1 列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

将此 $n-1$ 阶行列式的第 1 行乘 (-1) 加到其余各行后, 再将第 $1, 2, \cdots, n-2$ 列全加到第 $n-1$ 列, 得 (其中未写出的元素是 0)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & n \\ -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & -1 \\ & & \ddots & \\ & -n & & \\ -n & & & \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-n)^{n-2} (-1) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$