河南省“十二五”普通高等教育规划教材配套辅导

线性代数学习指导

李亦芳 主编

科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材配套辅导

线性代数学习指导

李亦芳　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是王天泽教授主编的《线性代数》教材的配套辅导用书. 全书共5章, 每章内容包括知识结构图、基本要求、概念点拨、典型例题解析、历年考研试题选解、课后习题全解、同步自测题及答案, 另有附录为十套模拟题及参考答案.

本书例题丰实, 对不易理解、容易混淆的概念进行点拨, 相对于教材又有一定独立性, 可作为学生学习线性代数课程以及考研的复习指导书, 也可作为教师讲授线性代数课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/李亦芳主编. —北京：科学出版社, 2014.8
河南省"十二五"普通高等教育规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-041593-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014) 第182158号

责任编辑: 胡海霞 昌 盛 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年8月第 一 版 开本: 720×1000 B5
2014年8月第一次印刷 印张: 14 1/4
字数: 287 000

定价: 27.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《线性代数学习指导》编写委员会

主　　编：李亦芳

主　　审：刘法贵　魏志强

编　　委：黄　坤　王田丽　张广强

前　言

本书是王天泽教授主编的《线性代数》教材的配套用书. 本书内容按照主教材的章节顺序编排, 共分 5 章: 行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、二次型、模拟试题十套及参考答案. 每章内容包括知识结构图、基本要求、重要结论及公式、概念点拨、典型例题解析、历年考研试题选解、课后习题全解、同步自测题及答案.

在内容结构上, 基本要求部分完全是按照最新全国硕士研究生入学考试的要求编写; 概念点拨对部分抽象不易理解或容易混淆的概念进行点拨; 例题选择面广并且丰富, 既适合少学时又适合多学时的线性代数课程, 例题讲解注重解前思路分析, 一些题后加了评注, 且解题思路用不同字体区分, 版块设计突出了重点, 便于学生理解、掌握与拓展; 历年考研试题选解收录了大量的考研真题及解答; 自测题分填空题、选择题、计算题和证明题 4 类, 部分有判断题, 并有参考答案, 以便学生及时检验知识掌握的程度; 最后附录给出十套模拟试题供学生全部学完复习之用.

本书可供使用王天泽教授主编的《线性代数》教材 (以下简称“主教材”) 的学生作同步辅导之用, 也可供讲授线性代数课程的教师作参考, 还可以作为学生考研的复习指导用书.

本书的第 1, 3, 4, 5 章分别由李亦芳、张广强、王田丽、黄坤执笔, 第 2 章由王田丽、张广强共同执笔, 模拟题由黄坤执笔, 全书的自测题、考研题由黄坤初步取材, 李亦芳、刘法贵、魏志强对全书统稿并审定. 本书在编写过程中, 得到了王天泽教授的关心和支持, 王教授还给本书提出了许多宝贵意见, 在此表示感谢. 限于作者水平, 难免有疏漏之处, 恳请读者批评指正.

编　者

2014 年 2 月

目　　录

第1章　行　列　式

【知识结构图】

- 行列式
  - 定义
    - Ⅰ: 第1行元素与其代数余子式乘积之和
    - Ⅱ: 不同行不同列元素乘积的代数和
  - 性质
    - 转置: 行列互换,行列式的值不变
    - 换行(列): 互换两行(列),行列式的值变号
    - 数乘: 某行(列)有公因子,可把公因子提到行列式外面
推论: 两行(列)元素成比例,行列式的值为零
    - 倍加: 某行(列)的倍 k 加到另一行(列)相应元素上，行列式的值不变
    - 拆项: 某行(列) 的元素均为两项之和，行列式可拆为两个行列式之和
  - 展开定理
    - 某行(列)的元素与其代数余子式乘积之和等于该行列式;
某行(列)元素与另一行(列)元素代数余子式乘积之和为零
  - 应用
    - Cramer法则
      - n个方程n个未知量的方程组若系数行列式不为零,则该方程组有唯一解
    - 特征值与特征向量

【基本要求】

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行 (列) 展开定理计算行列式.
3. 会用克拉默 (Cramer) 法则.

1.1　重要结论及公式

1.1.1　特殊行列式

1. 上 (下) 三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 副对角行列式.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ \lambda_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & \cdots & \lambda_2 & \\ \vdots & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

3. $n(n>1)$ 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

4. 分块行列式..

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|,$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{km}\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{km}|A|\,|B|.$$

这里 $|A|$ 是 k 阶行列式, $|B|$ 是 m 阶行列式.

1.1.2　展开定理

1. 行列式可对某行 (列) 展开, 即行列式等于某行 (列) 的元素与其代数余子式乘积之和, 即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = D \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

2. 行列式某行 (列) 的元素与另外一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和为 0, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

1.1.3 Cramer 法则

1. 若非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数行列式 $D\neq 0$, 则方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$, 其中 D_j 为用常数项替代 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 所构成的行列式.

等价说法: 若非齐次线性方程组无解或不止一个解, 则其系数行列式为 0.

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 有非零解, 当且仅当其系数行列式为 0.

等价说法: 齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是系数行列式 $D\neq 0$.

1.2 概 念 点 拨

1.2.1 关于行列式的定义

行列式的定义有多种, 本书的主教材是用递归的方法通过降阶给出行列式的定义, 其实就是将行列式按行 (或列) 展开. 这样定义较传统定义不那么抽象, 容易理解, 而且直接给出了行列式的一种计算方法.

1. 排列及其逆序数.

把 n 个不同的数排成一列, 称为这 n 个数的**排列,** 记作 $j_1j_2\cdots j_n$. 在一个排列中, 如果两个数的先后顺序与规定的顺序 (如从小到大的顺序) 不同时, 称这两个数构成一个**逆序**. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**, 记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

2. n 阶行列式的传统定义.

$$D=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 ($n!$ 项) 求和, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

1.2.2 行列式与行列式的值有区别吗

没有区别, 说 "计算行列式" 与 "求行列式的值" 意义相同. 行列式就是一个数, 以 2 阶行列式为例, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, 等式左边的表达式称为**2 阶行列式**, 它只是一种记法, 为了方便记忆而已, 如我们还可以记为 $\det(a_{ij})_{2\times 2}$ 或 D_2 等, 其实质是通过某种运算得到的等式右边的实数 $ad-bc$, 此实数又称为这个 2 阶行列式的值. 说两个行列式相等是指它们的值相等. "行列式" 与 "行列式的值" 是一回事.

1.2.3 余子式、代数余子式与元素有关吗

在 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中划去元素 a_{ij} 所在的行和列后形成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记作 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

元素 a_{ij} 的余子式及代数余子式只与该元素的位置有关, 而与该元素是什么无关. 如行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 与行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 的第一行元素的余子式、代数余子式完全相同. 在有些问题的计算或证明中会用到这一点, 如要证对任意 n 阶行列式当 $i\neq j$ 时, $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$. 由于第 j 行元素代数余子式只与该行元素的位置有关, 与该行元素的数值无关, 所以可以将上式左边看成 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

(注意第 j 行元素和第 i 行元素相同) 按照第 j 行元素的展开式, 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=0.$$

1.3 典型例题解析

1.3.1 题型一：行列式的计算

解题思路：如果行列式的某行 (列) 有多个零元, 可以按定义展开降阶; 对于低阶的只含数字的行列式一般利用行列式性质化为上 (下) 三角行列式; 对于含有字母的行列式可以拆行 (列)、提取公因子等; 有时可用已知的公式、结果、特殊行列式. 注意对含有字母的行列式在运算过程中不能出现字母的倒数. 对 n 阶行列式还常用递推法.

1. 利用 n 阶行列式的传统定义.

例 1 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 注意到该行列式中只有 n 个非零元, 且位于不同行不同列, 根据行列式的传统定义: 行列式的每一项都是来自不同行不同列元素的乘积, 所以

$$D_n=(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,2,1,n)}a_{1,n-1}a_{1,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

2. 降阶法 (即按某行或列展开).

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 列展开

$$\begin{aligned} D_n=&x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\ =&x^n+(-1)^{n+1}y^n. \end{aligned}$$

注　当行列式的某行 (列) 有较多零元时, 可以按行 (列) 展开降阶.

3. 利用行列式性质.

例 3　计算下面的行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解　(1) 方法 1:

$$原式 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{vmatrix} = 57.$$

注　对于只含数字的行列式, 总可以通过行 (列) 互换使左上角元素 $a_{11} \neq 0$, 然后将第 1 行的倍数加到下面各行, 使第 1 列的其他元素都化为 0. 以此类推把每行的第 1 个非零元所在列下面的元素都化为 0, 行列式就化成为上三角行列式. 此法普遍适用.

方法 2:

$$原式 \xlongequal[r_2+2r_3]{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & 5 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 11 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 57.$$

注　如果熟悉了行列式的性质, 可以不必调整 $a_{11} \neq 0$, 只要使某行 (列) 出现足够多的零元, 然后展开降阶即可.

(2) 方法 1: $原式 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix} = 160.$$

方法 2：观察到每行元素之和都相等，所以把第 2, 3, 4 列都加到第 1 列并提取公因子得

$$
\text{原式} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160.
$$

注 观察行列式特点，巧妙利用行列式性质可有效地计算行列式.

例 4 证明下列恒等式：

(1) $$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (\text{假定} a,b,c \neq 0).$$

证 (1) 根据行列式特点，将第一列拆开并提取公因子得

$$
\text{原式} = a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}
$$

$$
= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};
$$

(2) $$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

注 类似上例的题目，看似证明实际上还是计算行列式. 尤其对于含有字母的行列式更要先观察其特点再去计算. 将行列式拆成若干行列式之和也是一种计算行列式的常用方法，这时要注意一个 n 阶行列式如果每行 (或列) 都拆开，则该行列式应拆成 2^n 个行列式之和.

请读者思考: (2) 中如果没有假定 $a,b,c\neq 0$, 还能这样解吗? 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ 的值又是多少呢?

例 5　计算 n 阶行列式

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix};$$

$$(2)\ D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

解　(1) 依次将第 i 行乘 (-1) 加到第 $i+1$ 行 $(i=n-1,n-2,\cdots,1)$, 再将第 $2,3,\cdots,n$ 列全加到第 1 列, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

将此 $n-1$ 阶行列式的第 1 行乘 (-1) 加到其余各行后, 再将第 $1,2,\cdots,n-2$ 列全加到第 $n-1$ 列, 得 (其中未写出的元素是 0)

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & n \\ -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & -1 \\ & & \iddots & \\ & -n & & \\ -n & & & \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-2}(-1)=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}.$$