大學用書

統計推論

第二冊

Dr. Jerome C. R. Li 原著

袁　丕　志　編譯

維新書局印行

大學用書

統　計　推　論

第二册

Dr. Jerome C. R. Li 原著

袁　丕　志編譯

統 計 推 論

目　　錄

第十八章　複因子實驗

第十九章　共變數分析

第二十章 複習二

第二十一章 自二項母全體抽樣

第二十二章　多項母全體之抽樣分配

第二十三章　幾種常用的變換

第二十四章 自由分配的統計方法

第二十五章 複習三

第二十六章 其他統計方法

第十八章

複因子實驗

（Factorial Experiment）

複因子實驗，乃同時研究數個因子的作用效果，本章所述之實驗設計乃是以前第十二與十四章所述單因子實驗的申引。

§18.1 複因子實驗之意義

（Description of Factorial Experiment）

複因子實驗之意義，可舉一實例加以說明。例如實驗兩種不同的肥料 A 與 B 及其不同用量之肥效，譬如 A 肥料每畝可施用 0，50，100 與 150 磅，B 肥料每畝可施用 0，100 與 200 磅，若將上述二個實驗加以合併，則可產生處理組合為 4×3 即 12 種，如表 18.1 所示，表

表 18.1

4×3 複因子實驗的處理組合

B \ A	0	50	100	150
0	1	4	7	10
100	2	5	8	11
200	3	6	9	12

中 1 至 12 乃表示 12 種不同的處理代號，不施肥料之第 1 處理為基本處理（供其他處理之對照），第 2 處理為不施用 A 肥料僅施用

B肥料100磅，第12處理則爲僅施用A肥料150磅與B肥料200磅，其他各處理依此類推。在這12種處理中，每一處理均有n個觀察值，卽實驗的作物產量是也，像此種實驗吾人稱之爲4×3複因子實驗，其中A因子有4種變級（leuels）及B因子有3種變級。

複因子實驗發展之初，原爲實驗作物對不同肥料及其不同施用量之反應。但現在則爲其他各種科學，作研究時所常採用之方法。例如食品加工廠，欲研究以罐裝桃子，所加的三種不同糖料與四種不同濃度之糖漿，對罐裝桃子之淨重的影響。則可將A因子的4種變級視爲四種不同濃度之糖漿，分別爲25%，30%，35%與40%，則第1處理爲濃度25%的蔗糖，第12處理爲濃度40%的麥芽糖。

通常一個複因子實驗，較一連續的單因子實驗之優點爲多，第一：假定表18.1中其12種處理之每一處理均含有10個觀察值，欲比較A因子的四種變級，則每一變級將含有30個觀察值，欲比較B因子的三種變級，則每一變級將含有40個觀察值，因此該一實驗之120個觀察值，每一個均可以作爲A因子之四種變級的比較，同樣亦可用於B因子之三種變級的比較。如此每一觀察值均可作爲研究兩個因子之用。故一個複因子實驗，可以達到兩個同樣大小的單因子實驗之目的，其結果卽爲節省勞力又節省材料。

第二：複因子實驗較連續單因子實驗的次一優點，乃爲連續的單因子實驗，無法覺察到兩個因子的交互影響。若一種作物產量（y）的增加，乃爲不施用B因子，而是隨施用A因子比率之不同而變動，但是並不知當每畝施用200磅B因子時，再施用不同比率A因子的影響。若吾人欲探知此種事實，則只有進行一種複因子的實驗，非將A因子與B因子同時加以研究不可。

第三：複因子實驗較連續單因子實驗的另一優點，乃是由複因子實

驗所得的結論，實用範圍比較更加廣泛，若其結論為作物的產量增加，乃是由於在不同的變級 B，施用不同比率A所致，則其實用的範圍，要比單獨由某一變級B所得結論更為廣泛，因此複因子實驗，可使所得結論的應用範圍更為普遍，關於複因子實驗之更詳細的討論，見R. A. Fisher's The Design of Experiments之第六章"The Factorial Design in Experimentation"。

雖然複因子實驗並不限於兩個因子的實驗，但在本章所討論者則將僅以兩個因子的實驗為限。茲為便於討論而使其應用之範圍更加普遍起見，令A與B代表兩個因子，並以a與b分別表示該兩個因子的變級，於是吾人所討論的複因子實驗，即構成一個含有n次重複的$a \times b$複因子實驗。處理之總數為$k = a \times b$，而觀察值的總數為kn或abn例如表18.1所示，即為一$a = 4$與$b = 3$之複因子實驗。

複因子實驗，既可為一完全隨機實驗，亦可為一隨機集區實驗。其變異數的分析原理，與第12，14章相同。但在複因子實驗的變異數分析中，其新增加的東西，乃是將處理SS分解為三部分，即A、B的主要效應與AB的交互效應是也。如同單一自由度之觀念，其詳細的計算步驟，則將於下節加以說明。

§18.2 總平方和分解之程序

(Mechanics of Partition of Sum of Squares)

茲以完全隨機實驗，設計兩次重複的4×3複因子實驗為例，說明總平方和，分解之程序，如表18.2a所示，亦即$a = 4$，$b = 3$與$n = 2$。因子A與B可視為兩種不同的肥料，變級1，2等等，可視為每種肥料施用不同的數量。其24個觀察值，如5，9等，可視為某種作物的產量，此處所用之符號與12章所用者相同，k為處理數目，由$a \times b$所

表 18.2 a

4 × 3 複因子實驗的資料

B \ A	1	2	3	4	合計 T_B	平均數 $\bar{y}_B$	B 效應 $\bar{y}_B-\bar{\bar{y}}$
1	5 9	4 4	1 3	2 4	32	4	−2
2	10 12	2 6	2 2	2 4	40	5	−1
3	12 12	9 11	3 7	8 10	72	9	3
合計 T_A	60	36	18	30	$G=144$		0
平均數 $\bar{y}_A$	10	6	3	5		$\bar{\bar{y}}=6$	
A 效應 $\bar{y}_A-\bar{\bar{y}}$	4	0	−3	−1	0		

代替。總平均數與處理平均數仍分別以 $\bar{\bar{y}}$ 與 $\bar{y}$ 表示之，而總和與處理合計，則仍分別以 G 與 T 表示之。($\bar{y}-\bar{\bar{y}}$)之離差，仍稱為處理效應，此外將再介紹幾個表示因子 A 與 B 的新符號，茲將各符號所表示的意義列示於下：

T_A — 表示屬於 A 因子某一變級之 $n\ b$ 個觀察值的合計。

T_B — 表示屬於 B 因子某一變級之 n a 個觀察值的合計。

$\bar{y}_A$ — 表示屬於 A 因子某一變級之 $n\ b$ 個觀察值的平均數。

$\bar{y}_B$ — 表示屬於 B 因子其一變級之 $n\ a$ 個觀察值的平均數。

$\bar{y}_A-\bar{\bar{y}}$ 表示 A 因子某一變級之效應。

$\bar{y}_B-\bar{\bar{y}}$ 表示 B 因子某一變級之效應。

以上各符號所表示的數字實例，如表 18.2a所示，由該表中可以看出

A因子效應之合計與B因子效應之合計均等於零，$ab=12$ 種處理效應，則如表 18.2b所示，這些效應的合計等於零，$nab=2\times4\times3=24$ 個觀察值，其每一觀察值，均可表爲⑴總平均數⑵A效應⑶B效應⑷AB交互效應與⑸誤差的合計；即

$$y=\bar{\bar{y}}+(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})+[(\bar{y}-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})]+(y-y) \quad (1)$$

上式爲代數恒等式，當化簡以後，即可得到 $y=y$，公式⑴右邊之第四項可視爲AB交互效應；即

$$AB\text{交互效應}=(\bar{y}-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})$$
$$=\bar{y}-\bar{y}_A-\bar{y}_B+\bar{\bar{y}} \quad (2)$$

例如，第一處理的效應是1（表 18.2b）；與其相對應的A效應與B效應分別爲 4 與 −2（表 18.2a），故該處理的交互效應爲 $1-4-(-2)=-1$，此處之交互效應乃是以數量表示之，至於其本質之意義則將於下節加以解釋，此 12 種處理交互效應項，列示於表 18.2c，由 18.2c所示，吾人可知，每一行與每一列的交互效應項之合計均爲零。

表 18.2b

各處理組的效應

B \ A	1	2	3	4	合　計
1	1	−2	−4	−3	−8
2	5	−2	−4	−3	−4
3	6	4	−1	3	12
合　計	12	0	−9	−3	0

表 18.2c

各處理組的交互效應

B \ A	1	2	3	4	合　計
1	－1	0	1	0	0
2	2	－1	0	－1	0
3	－1	1	－1	1	0
合　計	0	0	0	0	

全部 24 個觀察值，構成其每一觀察值的 5 部分〔公式(1)〕如表 18.2d 所示，任一觀察值之 5 部分的合計，均等於原觀察值；表 18.2d 中，第二欄之每一列的數字，均等於 3 至 7 欄各列數字之合計。

由表 18.2d 中可知總 SS 之分解，每一欄 24 個數字之平方總和，列示於該表各欄最後之一列，總 SS 是

$$\Sigma(y-\bar{y})^2=\Sigma y^2-G^2/24=1,192-864=328$$

等於 A SS，B SS，AB SS，與誤差（*Error*）SS 之合計，該一恒等式之代數證明與 § 12.1 相同，此處不再贅述。

§ 12.1 所述之處理 SS（T SS）等於 A SS，B SS 之合計，此12種處理效應，列示於表 18.2b。處理 SS 等於 12種處理效應之合計乘以 n，此處所述總平方和分解之程序，與 § 12.1 所述者甚爲相似，所增加者，乃爲將處理 SS 分解爲三部分卽 A SS，B SS，與 AB SS。

每一不同的 SS，乃爲衡量一種不同的離差。總 SS 乃衡量全部觀察值的離差，若全部觀察值均相等，則總 SS 將等於零。A SS 乃衡量 A 因子各變級間之離差。若 A 因子各變級之平均數相等，則 A SS

表 18.2d

觀察值之各組成部分

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
處理 A B	觀察值 y	總平均數 $\bar{\bar{y}}$	A 效應 $\bar{y}_A-\bar{\bar{y}}$	B 效應 $\bar{y}_B-\bar{\bar{y}}$	A B 交互效應 $\bar{y}-\bar{y}_A-\bar{y}_B+\bar{\bar{y}}$	誤差 $y-\bar{y}$
11	5 9	6 6	4 4	−2 −2	−1 −1	−2 2
12	10 12	6 6	4 4	−1 −1	2 2	−1 1
13	12 12	6 6	4 4	3 3	−1 −1	0 0
21	4 4	6 6	0 0	−2 −2	0 0	0 0
22	2 6	6 6	0 0	−1 −1	−1 −1	−2 2
23	9 11	6 6	0 0	3 3	1 1	−1 1
31	1 3	6 6	−3 −3	−2 −2	1 1	−1 1
32	2 2	6 6	−3 −3	−1 −1	0 0	0 0
33	3 7	6 6	−3 −3	3 3	−1 −1	−2 2
41	2 4	6 6	−1 −1	−2 −2	0 0	−1 1
42	2 4	6 6	−1 −1	−1 −1	−1 −1	−1 1
43	8 10	6 6	−1 −1	3 3	1 1	−1 1
平方之合計	1,192 Σy^2	864 $G^2/24$	156 $A\ SS$	112 $B\ SS$	24 $AB\ SS$	36 誤差 SS
自由度	24 nab	1 1	3 $a-1$	2 $b-1$	6 $(a-1)(b-1)$	12 $ab(n-1)$

將等於零，同樣的 B SS 乃衡量 B 因子各變級間之離差。誤差 SS 衡量同一處理之離差。若在 ab 兩種處理中每一處理之 n 個觀察值均相等，則誤差 SS 等於零。交互之 AB SS 則於下節加以說明。

各種不同 SS 的自由度，亦可由表 18.2d 看出，若所有的 nab 或24觀察值均已知，其平方總和卽可求得，因此，其自由度爲 nab 或 24（第二欄）。總平均數亦同樣乃由全部觀察值而求得（第三欄），當其中任一觀察值已知時；其餘的均可知道。因此 $nab\ \bar{\bar{y}}^2$ 或 G^2/nab 僅有一個自由度，總 SS 爲 $\Sigma y^2 - G^2/24$ 有（$nab-1$）個自由度。

A SS 之自由度的數目等於（$a-1$）或 3，此乃由於四種 A 效應的合計等於零之故也（表 18.2a），若其中之任意 3 種效應爲已知，則其餘的一種自然卽可知道，同樣的 B SS 之自由度的數目等於（$b-1$）或 2。

交互 AB SS 有（$a-1$）（$b-1$）或 6 個自由度，此可由表 18.2c 看出，每一行或每一列交互項的合計均等於零，若最後一行與最後一列之數字不知時，所有全部缺項的數字均可求得，因此，若（$a-1$）（$b-1$）項爲已知，則其餘的 a b 項可立卽求得。

誤差 SS 之自由度的數目是 ab（$n-1$）或 12，如第 12章之說明相同，ab（$n-1$）之數目乃是由 k（$n-1$）而得，因 $k=ab$ 之故也。

關於處理之自由度數目，希望能夠等於 A，B 與 AB 之合計，卽

$$ab-1=(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)$$

例如前擧之實例，確實如此，處理的自由度之數目爲 11，卽

$$12-1=3+2+6$$

總平方和分解之結果，以及其自由度的數目，玆摘要列示於表 18.2e。

表 18.2e

4 × 3 複因子實驗的變異數分析

離差來源	平方之總和 SS	自由度 DF	均　方 MS
A	156	3	52
B	112	2	56
AB	24	6	4
誤　差	36	12	3
合　計	328	23	

§18.3 交互效應

(Interaction)

因子 A 與 B 之交互效應，已於前節加以說明爲

$$(\bar{y}-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})-(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})$$

其意義吾人更可以無交互效應項之事實加以說明，卽當交互項之效應爲零時，或以公式表示之爲

$$(\bar{y}-\bar{\bar{y}})=(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})$$

亦卽

$$\bar{y}=\bar{\bar{y}}+(\bar{y}_A-\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_B-\bar{\bar{y}})\text{。}$$

由表 18.2a 所示之總平均數，A 效應與 B 效應，吾人可得一組處理平均數如表 18.3 所示，可知該表中任意兩列或兩行對應的平均數，維持同樣的差異，第一列的四個平均數爲

$$8 \qquad 4 \qquad 1 \qquad 3$$

第二列的四個平均數爲

$$9 \qquad 5 \qquad 2 \qquad 4$$

與其對應平均數的差量均爲 1；卽

$$9-8=5-4=2-1=4-3=1$$

表 18.3

無交互影響的處理平均數

B \ A	1	2	3	4	平均數
1	6+4−2= 8	6+0−2=4	6−3−2=1	6−1−2=3	4
2	6+4−1= 9	6+0−1=5	6−3−1=2	6−1−1=4	5
3	6+4+3=13	6+0+3=9	6−3+3=6	6−1+3=8	9
平均數	10	6	3	5	6

此種關係，對任意的兩列或兩行均成立。無交互效應之含意，可舉一實例加以說明。假定因子 A 的四種變級是 A 肥料之四種不同的數量。因子 B 的三種變級是 B 肥料之三種不同的數量，於是這 12 種處理的平均數即成爲平均的產量，因此平均數 8，4，1，3 與 9，5，2，4 構成一個常數差量 1 。此種情形可解釋爲不論 A 肥料的變級如何，B 肥料的第二種數量可使作物產量平均增加一個單位。

茲另舉一實例，更清楚的加以解釋，無交互效應的含意，假定因子 A 之四種變級，爲大學內之四個年級即大四、大三、大二、與大一，而 B 因子之三種變級爲三個不同的學校，三個學校之每一年級均有 n 個學生，這 12 種處理視爲某一次考試的平均成績，無交互效應之含意乃爲不論那一年級的學生，編號 2 之學校的學生成績，較編號爲 1 之學校的學生成績平均皆高一分。由此種條件觀之，可知任何差距之產生，皆爲存在於學校與學校之間，及年級與年級之間的交互效應，所致之故也。交互效應即爲測量這些差距的量數。若所有交互效應之各項均等於零時，則交互效應方等於零（表 18.2d 第 6 行）。

此處所討論有關交互效應之衡量，乃是以實際的資料來說明其意義

，至於交互效應在統計推論中的意義，則將於§ 18.5中加以討論。

§ 18.4 計算方法

(Computing Method)

關於總平方和之分解程序，業於§ 18.2中說明過，在該節內所舉三個例子，爲避免複雜的計算，僅採用含有一個數字的資料，其目的，乃特選爲了講解總 SS 分解爲不同部分之意義。而該一計算方法，在應用上，因計算過繁，故很少實用價值。本節則將介紹一種，在變異數分析上的簡捷計算法，其基本原理與§ 12.3及14.4所述者相同，此處不再重覆，換言之，本節主要目的，在說明如何將處理 SS 分解爲三部分，即 $A\ SS$，$B\ SS$ 與 $AB\ SS$。至於如何求得處理 SS，誤差 SS 與總 SS 早於§ 12.3完全隨機實驗一章內說明過，並且如何求得重複 SS，處理 SS，誤差 SS，與總 SS 亦早於§14.4隨機集區實驗一章內說明過，不論以上兩種實驗設計的任何一種之處理 SS，將其分爲三部

表 18.4a

複因子實驗各合計項之排列

B \ A	1	2	…	a	合 計
1	T_t				T_B
2					
⋮					
b					
合 計	T_A				G