弹 性 力 学 基 础

（修 订 本）

下　册

重 庆 大 学
南京航空学院　合 编

重 庆 大 学 承 印

一九八三年八月

下册目录

第十三章　能量原理及其变分解法

第十四章　弹性力学问题的有限单元法

第九章　复变函数解平面问题

从前两章的讨论知道。弹性力学平面问题的求解，在常体力情况下，可归结为满足双调和方程 $\nabla^2\nabla^2\varphi=0$ 的应力函数 φ 的寻求，并使之满足全部边界条件。这本是实变函数中的问题，但因实变可由共轭复变函数的线性组合而得到，这就提供了利用复变函数的特性更方便的解决实变函数中某些问题的可能。例如解析函数的实部和虚部。均为共轭调和函数。能满足调和方程。当然也满足双调和方程。特别是一个调和函数，经过保角变换后，仍是调和函数。这在实际问题中有着广泛的应用。

§9—1　复变函数的基础知识

首先简要叙述一下复变函数的有关内容，作为学习本章的预备知识。

一、复变数与复变函数

以两个实变数 x 和 y 构成如下形式的数：

$$Z=x+iy \tag{9—1a}$$

称为复变数（简称复数）。其中：$i=\sqrt{-1}$ 称为虚单位：x 称为 Z 的实部，记作 $x=R_eZ$；y 称为 Z 的虚部。记作 $y=I_mZ$。因而复数 Z 也可写成如下形式：

$$Z=R_eZ+iI_mZ \tag{9—1b}$$

又将实部相同而虚部正负号相反的两个复数为共轭复数。与 Z 共轭的复数记作 $\overline{Z}$。即

$$\overline{Z}=x-iy=R_eZ-iI_mZ \tag{9—2}$$

两共轭复数的和与差与其实部之间具有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}Z+\overline{Z}&=2x,\\ Z-\overline{Z}&=i2y,\end{aligned}\right\}\quad\text{或}\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(Z+\overline{Z}),\\ y&=-\frac{i}{2}(Z-\overline{Z})\end{aligned}\right\} \tag{9—3}$$

由于 i 超出了实数系的范围，所以复数的相等及其代数运算法则，都必须重新定义。

两个复数相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等。一个复数等于0，必须且只须它的实部和虚部同时等于0。同样，当两个复数相加、减时，应使其实部和虚部分别相加、减。至于复数的乘、除，只须注意到$i^2=-1$，可仍按实数的乘、除法则进行。例如：

$$\left.\begin{aligned} Z\cdot\overline{Z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 \\ \frac{\overline{Z}}{Z} &= \frac{\overline{Z}^2}{Z\cdot\overline{Z}} = \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2-y^2-i2xy}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad (9—4)$$

复变数与复平面上的点具有一一对应的关系（图 9—1）。利用直角坐标与极坐标的关系：

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta。$$

复数 Z 和 $\overline{Z}$ 可以表示为

$$\left.\begin{aligned} Z &= x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \overline{Z} &= x-iy = r(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}\right\}$$

（9—5a）

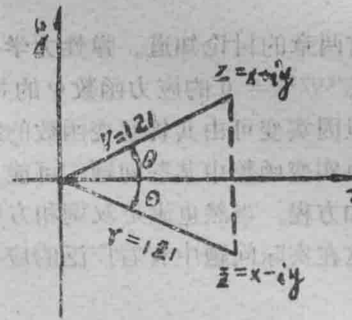

图　9—1

再利用欧拉公式：$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$，又可将上式表示为

$$Z = re^{i\theta}, \qquad \overline{Z} = re^{-i\theta}。 \qquad (9—5b)$$

式（9—5b）中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 称为 Z 的模，而 $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 称为 Z 的幅角。

复变数 Z 的函数 $f(Z)$ 称为复变函数。也可分为实部和虚部，即有

$$f(Z) = f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = R_e f(Z) + iI_m f(Z) \qquad (9—6)$$

与 $f(Z)$ 共轭的复数函数记作 $\overline{f(Z)}$，即

$$\overline{f(Z)} = \overline{f}(\overline{Z}) = \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = R_e f(Z) - iI_m f(Z) \qquad (9—7)$$

如果 $f(Z)$ 是用复幂级数给出的，如

$$f(Z) = A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + \cdots\cdots$$

式中 A_0、A_1、A_2、…都是复常数，那么 $f(Z)$ 的共轭函数是

$$\overline{f(Z)} = \overline{f}(\overline{Z}) = \overline{A_0} + \overline{A_1}\,\overline{Z} + \overline{A_2}\,\overline{Z}^2 + \cdots\cdots$$

式中 $\overline{A_0}$、$\overline{A_1}$、$\overline{A_2}$、……分别表示 A_0、A_1、A_2、…的共轭复数。但记号 $\overline{f}(Z)$ 常用来表示下列函数：

$$\overline{f}(Z) = \overline{A_0} + \overline{A_1}Z + \overline{A_2}Z^2 + \cdots\cdots。$$

显而易见，不能把 $\overline{f}(Z)$ 和 $\overline{f(Z)}$ 混淆起来。

二、解析函数与柯西一黎曼条件

如果复变函数$f(Z)$在某一点及其邻域内处处可导，则称$f(Z)$在这一点解析。如果$f(Z)$在区域D内每一点解析，则称$f(Z)$是区域D内的解析函数。如果$f(Z)$在某一点不解析，则称此点为$f(Z)$的奇点。函数在区域D内解析与在区域D内可导是等价的。但是，函数在一点处可导和解析，却是两个不等价的概念。换句话说，函数在一点处可导，但不一定在该点处解析。例如

$$f(Z)=x^3+iy^3$$

当ΔZ以Δx方式趋于0，即$\Delta Z=\Delta x$时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2,$$

当ΔZ以另一方式$i\Delta y$趋于0，即$\Delta Z=i\Delta y$时，则有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(Z+\Delta Z)-f(Z)}{\Delta Z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i(y+\Delta y)^3-iy^3}{i\Delta y}=3y^2$$

可见，当ΔZ以不同方式趋于0时，上述极限并不趋于唯一确定值。只在$Z=0$处，其极限为0。这就是说，$f(Z)=x^3+iy^3$在$Z=0$处可导，但此处不解析。

现设$f(Z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$是解析函数，试求其对$x$、$y$的偏导数所应满足的条件。因为

$$Z=x+iy,\qquad \overline{Z}=x-iy$$

所以 $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial Z}{\partial y}=i,\quad \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial y}=-i$

并且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial Z}\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial Z},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial Z}\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial y}=i\dfrac{\partial f}{\partial Z}$

$$(9-8)$$

解析函数要求导数$\dfrac{\partial f}{\partial Z}$是唯一确定的，因而有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial x}$$

另一方面

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}\qquad (9-9)$$

代入上式，即得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}=i\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

比较实部和虚部，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\text{或}\quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial R_e f(Z)}{\partial x}=\frac{\partial I_m f(Z)}{\partial y}\\ \frac{\partial R_e f(Z)}{\partial y}=-\frac{\partial I_m f(Z)}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{9—10}$$

式(9—10)称为柯西—黎曼条件（或$C-R$条件），它是$f(Z)$在定义域D内解析的必要和充分条件。也是$f(Z)$在D内某一点可导的必要和充分条件。

由式(9—8)、(9—9)可得

$$f'(Z)=\frac{\partial f}{\partial Z}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}R_e f'(Z)=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}\\ I_m f'(Z)=\frac{\partial \psi}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{9—11}$$

根据解析函数的导数仍为解析函数这个性质可知，若$f(Z)$在域D内解析，则在D内，φ和ψ不仅存在一阶导数，而且存在所有高阶导数。

将式(9—10)中第一式对x(或y)求导，第二式对y(或x)求导，然后相加(或相减)，消去ψ(或φ)后，可得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0\quad\text{或}\quad\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0\tag{9—12}$$

这表明复解析函数的实部和虚部都能满足调和方程，因而都是调和函数。

不难证明调和函数之间具有下列关系：

1. 若$R_e f(Z)=\varphi(x,y)$是调和函数，则其本身必是双调和函数。

2. 若$R_e f(Z)=\varphi(x,\ y)$是调和函数，则$x\varphi(x,\ y)$，$y\varphi(x,\ y)$或$r^2\varphi(x,\ y)$都是双调和函数，其中$r=|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$。

3. 若$R_e f(Z)=\varphi(x,\ y)$和$R_e f_1(Z)=\varphi_1(x,\ y)$是两个调和函数，则其线性组合$x\varphi(x,\ y)+\varphi_1(x,\ y)$或$y\varphi(x,\ y)+\varphi_1(x,\ y)$也都是双调和函数。

三、复变函数的积分

1. 柯西——古萨定理（单连域闭路定理）设函数$f(Z)$在闭曲线C上及其所包围的单连域D内处处解析（图9—2），则$f(Z)$沿闭曲线C的积分等于0，即

$$\oint_c f(Z)dZ=0\tag{9—13}$$

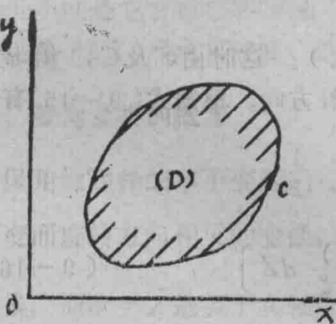

图 9—2

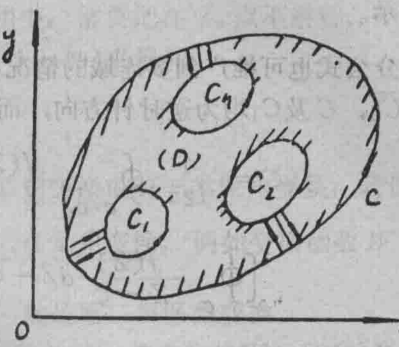

图 9—3

对于多连域（图 9—3）的情况，只须将内外边界曲线用割线联接之。就可将多连域变为单连域。这时，便由C及$\overline{C}_K$（$K=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）组成一复合闭路$\Gamma=C+\overline{C}_K$。C及C_K均为逆时针方向，而$\overline{C}_K$为顺时针方向。根据单连域闭路定理（9—13）有

$$\oint f(Z)dZ=\oint_{C} f(Z)dZ+\sum_{K=1}^{n}\oint_{\overline{C_k}} f(Z)dZ=0$$

即
$$\oint_{C} f(Z)dZ=\sum_{K=1}^{n}\oint_{C_k} f(Z)dZ \qquad (9—14)$$

这就是单连域闭路定理的推广，又称复合闭路定理。

2．柯西积分公式　　设函数$f(Z)$在闭合曲线C及其所包围的单连域D内处处解析，ξ为C内的任一点（图 9—4），则此点的函数值为

$$f(\xi)=\frac{1}{i2\pi}\oint_{C}\frac{f(Z)}{Z-\xi}dZ \qquad (9—15)$$

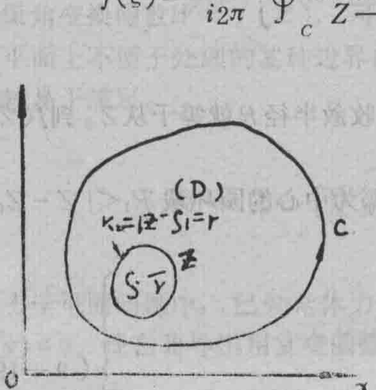

图 9—4

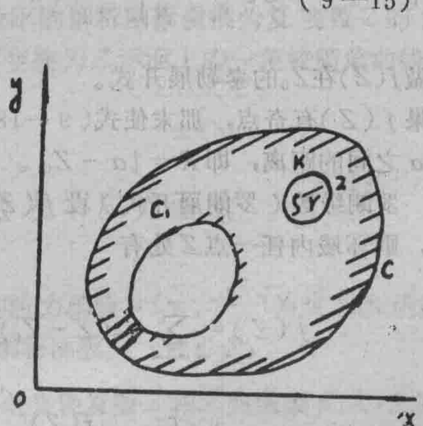

图 9—5

式（9—15）称为柯西积分公式。通过它，可以把一个解析函数在C内部的值用它在边界上的值来表示。

柯西积分公式也可推广到多连域的情况（图9—5）。这时由C及$\overline{C}_1$组成一复合闭路$\Gamma = C + \overline{C}_1$，$C$及$C_1$均为逆时针方向，而$\overline{C}_1$为顺时针方向。根据式（9—15）有

$$f(\xi)=\frac{1}{i2\pi}\oint_{C+\overline{C}_1}\frac{f(Z)}{Z-\xi}dZ=\frac{1}{i2\pi}\left[\oint_{C}\frac{f(Z)}{Z-\xi}dZ-\oint_{C_1}\frac{f(Z)}{Z-\xi}dZ\right] \qquad (9—16)$$

这是柯西积分公式的推广。

3．解析函数的高阶导数公式　设C为围绕ξ点任何一条正向简单闭曲线，函数$f(Z)$在C上及其所包围的单连域内处处解析，则其n阶导数为

$$f^{(n)}(\xi)=\frac{n!}{i2\pi}\oint_{C}\frac{f(Z)}{(Z-\xi)^{n+1}}dZ \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (9—17)$$

式（9—17）的结果，可借助于柯西积分公式（9—15）在积分号内对ξ进行n次求导而得。

四、复变函数的幂级数展开式

1．泰勒级数（泰勒展开式）　设函数$f(Z)$在以Z_0为园心的园周$|Z-Z_0|=R$内处处解析，则园内任一点Z处有

$$\left.\begin{aligned}&f(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(Z-Z_0)^n\\&\text{其中}\quad C_n=\frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\} \qquad (9—18)$$

这就叫做$f(Z)$在Z_0的泰勒展开式。

如果$f(Z)$有奇点，那末使式（9—18）成立的收敛半径R就等于从Z_0到$f(Z)$的最近一个奇点α之间的距离，即$R=|\alpha-Z_0|$。

2．罗朗级数（罗朗展开式）设$f(Z)$在以Z_0为中心的园环域$R_1<|Z-Z_0|<R_2$内处处解析，则环域内任一点Z处有

$$\left.\begin{aligned}&f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(Z-Z_0)^n\\&\text{其中}\quad C_n=\frac{1}{i2\pi}\oint_{C}\frac{f(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}dZ,\ (n=0,\pm1,\pm2\cdots)\end{aligned}\right\} \qquad (9—19)$$

这里的C为在园环域内绕环心Z_0的任何一条简单闭曲线。式(9—19)叫做罗朗展开式，它与泰勒展开式的不同是它含有负幂的项。在实际应用中，常要把在Z_0点不解析，但在Z_0的领域内解析的函数$f(Z)$展成幂级数，这时就用式(9—19)来展开。

五、保角变换的概念

凡具有保角性和伸缩率不变性的变换，称为保角变换或第一类保角变换，若仅保持角度的绝对值不变而旋转方向相反的变换，则称为第二类保角变换，例如变换函数$W=aZ$是第一类保角变换，而$W=\overline{Z}$是关于实轴的对称变换，就是第二类保角变换。

如果变换函数$W=f(Z)$在Z_0处解析，且$f(Z_0)\neq 0$，那末变换$W=f(Z)$在Z_0是保角的，而且$Arg f'(Z_0)$表示这个变换在Z_0处的转动角，$|f'(Z_0)|$表示伸缩率。

今后，保角变换（或保角映射）这个术语，就意味着利用解析函数$W=f(Z)$在$f'(Z)\neq 0$的条件下所作的变换。通过这个变换，可以证明在Z平面上原来夹角为α的两曲线C_1和C_2（图9—6a）变为W平面上的两曲线Γ_1和Γ_2（图9—6b），其夹角仍为α。

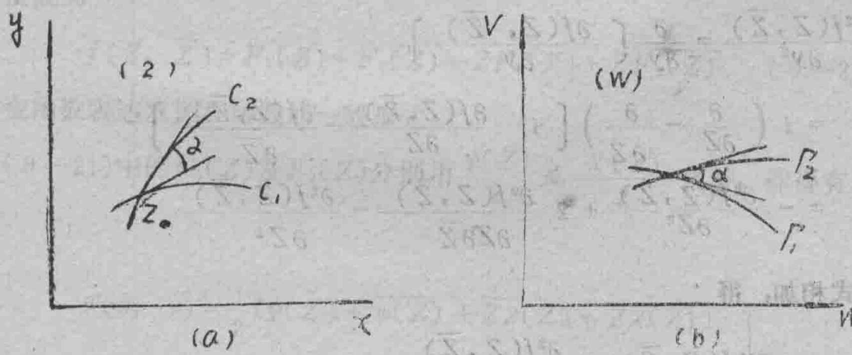

图 9—6

借助于保角变换函数$W=f(Z)$，可将复变数W的解析函数变换为复变数Z的解析函数。而在W平面上不便于处理的某种边界曲线，可变换为Z平面上的一条较简单曲线，从而使边界条件较易于满足。

§9—2 用复变函数表示应力函数

在弹性力学平面问题中，已知常体力情况下的应力函数$\varphi(x, y)$为双调和函数，即$\nabla^2\nabla^2\varphi(x,y)=0$。现在要导出用复变函数表达双调和函数的一般形式。

由式(9—3)可知。一实变函数$\varphi(x, y)$可由共轭复数Z和$\overline{Z}$的函数$f(Z,\overline{Z})$表出。为使$f(Z,\overline{Z})$满足调和方程及双调和方程，下面求其对x、y的有关各阶偏导数：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial x} &= \frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial \overline{Z}}\cdot\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial Z}+\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial \overline{Z}} \\
\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial y} &= \frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial \overline{Z}}\cdot\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y} \\
&= i\left(\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial Z}-\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial \overline{Z}}\right)
\end{aligned}
\right\}\qquad (a)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(Z,\ \overline{Z})}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial x}\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\right)\left[\frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial Z}+\frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial \overline{Z}}\right] \\
&= \frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z^2}+2\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z\partial \overline{Z}}+\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial \overline{Z}^2} \\
\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(Z,\ \overline{Z})}{\partial y}\right] \\
&= i\left(\frac{\partial}{\partial Z}-\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\right)\left[i\ \frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial Z}-\frac{\partial f(Z,\overline{Z})}{\partial \overline{Z}}\right] \\
&= -\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z^2}+2\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z\partial \overline{Z}}-\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial \overline{Z}^2}
\end{aligned}
\right\}\qquad (b)
$$

将(b)中二式相加，得

$$
\nabla^2 f(Z,\overline{Z}) = 4\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z\partial \overline{Z}} \qquad (c)
$$

这就是说，若$f(Z,\overline{Z})$满足调和方程，则必

$$
\frac{\partial^2 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z\partial \overline{Z}} = 0 \qquad (d)
$$

式(d)的通解是

$$
f(Z,\ \overline{Z}) = F_1(Z)+F_2(\overline{Z}) \qquad (e)
$$

式中的$F_1(Z)$和$F_2(\overline{Z})$分别是Z和$\overline{Z}$的解析函数。若要求$f(Z,\ \overline{Z})$为实变函数，则式(e)右边必须共轭，即

$$
F_2(\overline{Z}) = \overline{F_1(Z)}
$$

于是式(e)便成为

$$f(Z,\overline{Z})=F_1(Z)+\overline{F_1(Z)} \qquad (9-20)$$

再对式(c)两边施加∇^2运算。即得

$$\nabla^2[\nabla^2 f(Z,\ \overline{Z})]=4\frac{\partial^2}{\partial Z\partial\overline{Z}}\left[4\frac{\partial^2 f(Z,\ \overline{Z})}{\partial Z\partial\overline{Z}}\right]=16\frac{\partial^4 f(Z,\overline{Z})}{\partial Z^2\partial\overline{Z}^2}$$

这就是说，若$f(Z,\overline{Z})$满足双调和方程，则必

$$\frac{\partial^4 f(Z,\ \overline{Z})}{\partial Z^2\partial\overline{Z}^2}=0 \qquad (f)$$

式(f)的通解是

$$f(Z,\overline{Z})=F_1(Z)+F_2(\overline{Z})+\overline{Z}F_3(Z)+ZF_4(\overline{Z}) \qquad (g)$$

当要求$f(Z,\overline{Z})$为实变函数时，则式(g)右边必须是两两共轭，即

$$F_2(\overline{Z})=\overline{F_1(Z)} \qquad F_4(\overline{Z})=\overline{F_3(Z)}$$

于是式(g)便成为

$$f(Z,\ \overline{Z})=F_1(Z)+\overline{F_1(Z)}+\overline{Z}F_3(Z)+Z\overline{F_3(Z)} \qquad (9-21)$$

这就是用复变函数表达双调和函数的一般形式。

现将式(9—21)中的$F_1(Z)$及$F_3(Z)$分别用$\frac{\psi(Z)}{2}$及$\frac{\chi(Z)}{2}$代替，即得有名的古萨公式：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x,\ y)=\frac{1}{2}[\psi(Z)+\overline{\psi(Z)}+\overline{Z}\chi(Z)+Z\overline{\chi(Z)}]\\&\text{或者}\\&\varphi(x,\ y)=R_e[\psi(Z)+\overline{Z}\chi(Z)]\end{aligned}\right\}(9-22)$$

这就是用复变函数表达的应力函数。式中的$\psi(Z)$及$\chi(Z)$都是Z的解析函数，常称作**复应力函数**，并设

$$\left.\begin{aligned}\psi(Z)&=p+ip\\\chi(Z)&=p_1+iq_1\end{aligned}\right\}\ \text{或}\ \left.\begin{aligned}\overline{\psi(Z)}&=p-iq\\\overline{\chi(Z)}&=p_1-iq_1\end{aligned}\right\} \qquad (9-23)$$

§9—3 用复应力函数表示应力和位移及其边界条件

既已得到应力函数$\varphi(x,\ y)$的复数函数表达式(9—22)，下面就可用来表达平面问题中的应力分量、位移分量和相应的边界条件了。

一、复应力公式

在不计体力的情况下，应力分量与应力函数之间的关系是(7—25)，即

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$$

这样，首先要求式(9—22)中的φ对x、y的有关各阶偏导数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}=\frac{1}{2}[\psi'(Z)+\overline{\psi'(Z)}\\&\quad+\overline{Z}\chi'(Z)+Z\overline{\chi'(Z)}+\overline{\chi(Z)}+\chi(Z)]\\\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)=\frac{i}{2}[\psi'(Z)-\overline{\psi'(Z)}\\&\quad+\overline{Z}\chi'(Z)-Z\overline{\chi'(Z)}+\overline{\chi(Z)}-\chi(Z)]\end{aligned}\right\}\quad(9\text{—}24a)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)+\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)\\&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z\partial\overline{Z}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{Z}^2}=\frac{1}{2}[\psi''(Z)+\overline{\psi''(Z)}\\&\quad+\overline{Z}\chi''(Z)+Z\overline{\chi''(Z)}+2\chi'(Z)+2\overline{\chi'(Z)}]\\\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}&=i^2\left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)\right]\\&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z\partial\overline{Z}}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{Z}^2}=\frac{1}{2}[-\psi''(Z)-\overline{\psi''(Z)}\\&\quad-\overline{Z}\chi''(Z)-Z\overline{\chi''(Z)}+2\chi'(Z)+2\overline{\chi'(Z)}]\\\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}&=i\left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)-\frac{\partial}{\partial\overline{Z}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{Z}}\right)\right]\\&=i\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{Z}^2}\right]=\frac{i}{2}[\psi''(Z)-\overline{\psi''(Z)}\\&\quad+\overline{Z}\chi''(Z)-Z\overline{\chi''(Z)}]\end{aligned}\right\}\quad(9\text{—}24b)$$

为便于利用复解析函数的特有性质，现将上述各应力分量组成如下复应力形式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y+\sigma_x&=4\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z\partial\overline{Z}}=2[\chi'(Z)+\overline{\chi'(Z)}]=4R_e\chi'(Z)\\\sigma_y-\sigma_x+i2\tau_{xy}&=4\frac{\partial^2\varphi}{\partial Z^2}=2[\psi''(Z)+\overline{Z}\chi''(Z)]\end{aligned}\right\}\quad(9\text{—}25)$$

这就是复应力公式。当复应力函数$\psi(Z)$及$\chi(Z)$已确定时，即可由式(9—25)中第二式首

先分开实部和虚部，虚部是$2\tau_{xy}$，实部则是$\sigma_y-\sigma_x$，而后再和第一式联解，即得σ_y和σ_x。

二、复位移公式

以平面应力问题为例，在不计体力情况下，由式（7—7）、（7—15）和式（7—25），可以得到用应力函数表示的应变分量为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu\sigma_y]=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\\
&=\frac{1}{E}\left[\nabla^2\varphi-(1+\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu\sigma_x]=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]\\
&=\frac{1}{E}\left[\nabla^2\varphi-(1+\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]\\
\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{-2(1+\mu)}{E}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

为便于积分，可利用式（9—24b）、（9—8）、（9—23）将式（a）中的$\nabla^2\varphi$改写成下列不同形式：

$$\nabla^2\varphi=2[\chi'(Z)+\overline{\chi'(Z)}]=2\left[\frac{\partial\chi(Z)}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\chi(Z)}}{\partial x}\right]=4\frac{\partial p_1}{\partial x}=4\frac{\partial q_1}{\partial y}\tag{b}$$

将式（b）的不同形式分别代入（a）式中前二式，得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{E}\left[4\frac{\partial p_1}{\partial x}-(1+\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{E}\left[4\frac{\partial q_1}{\partial y}-(1+\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

将式（c）中二式分别对x、y积分，得位移分量：

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{1}{E}\left[4p_1-(1+\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+f_1(y)\\
v&=\frac{1}{E}\left[4q_1-(1+\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]+f_2(x)
\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

再将式（d）代入式（a）中第三式，得

$$\frac{4}{E}\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}+\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}+\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}=0\tag{e}$$

考虑到$C-R$条件（9—10），式（e）便成为

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}+\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}=0\tag{f}$$

由此可得

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}=-\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}=C$$

所以 $$f_1(y)=Cy+D,\qquad f_2(x)=-Cx+E \tag{9—26}$$

但式(9—26)在式(d)中不会产生任何应变，即式(9—26)是刚体位移，可以略去。于是式(d)便成为

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{E}\left[4p_1-(1+\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\\ v&=\frac{1}{E}\left[4q_1-(1+\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\end{aligned}\right\} \tag{9—27}$$

为利用复解析函数的特性，现将上述位移分量组成如下复位移形式：

$$u+iv=\frac{1}{E}\left[4(p_1+iq_1)-(1+\mu)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] \tag{g}$$

将式(9—23)中第二式及式(9—24a)代入式(g)，得

$$\begin{aligned}u+iv&=\frac{1}{E}\left[4\chi(Z)-2(1+\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{Z}}\right]\\ &=\frac{1}{E}\{[4\chi(Z)-(1+\mu)[\overline{\psi'(Z)}+\chi(Z)+Z\overline{\chi'(Z)}]\}\\ &=\frac{1}{E}\{(3-\mu)\chi(Z)-(1+\mu)[\overline{\psi'(Z)}+Z\overline{\chi'(Z)}]\}\\ &=\frac{1}{2G}\left[K\chi(Z)-\overline{\psi'(Z)}-Z\overline{\chi'(Z)}\right]\end{aligned} \tag{9—28}$$

式中

$$K=\frac{3-\mu}{1+\mu} \tag{9—29}$$

式(9—28)就是在平面应力问题中，用复应力函数表达的复位移公式。对于平面应变问题，只要用

$$\mu_1=\frac{\mu}{1-\mu}\qquad 或\qquad K=3-4\mu \tag{9—30}$$

分别代替式(9—29)中的μ或式(9—28)中的K即可。当复应力函数$\psi(Z)$及$\chi(Z)$已确定时，即可由式(9—28)求得位移。

式(9—25)和式(9—28)是由柯洛索夫首先得到的。

现在，反过来考虑一个问题。若弹性体中的应力或位移已经确定，那末复应力函数$\psi(Z)$及$\chi(Z)$是否完全确定？是否还具有某种任意选择性？

考虑到在式(9—25)及式(9—28)中，$\psi(Z)$的出现是$\psi'(Z)$和$\psi''(Z)$，因而在式(9

二、解析函数与柯西—黎曼条件

如果复变函数 $f(Z)$ 在某一点及其邻域内处处可导，则称 $f(Z)$ 在这一点解析。如果 $f(Z)$ 在区域 D 内每一点解析，则称 $f(Z)$ 是区域 D 内的解析函数。如果 $f(Z)$ 在某一点不解析，则称此点为 $f(Z)$ 的奇点。函数在区域 D 内解析与在区域 D 内可导是等价的。但是，函数在一点处可导和解析，却是两个不等价的概念。换句话说，函数在一点处可导，但不一定在该点处解析。例如

$$f(Z)=x^3+iy^3$$

当 ΔZ 以 Δx 方式趋于 0，即 $\Delta Z=\Delta x$ 时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2;$$

当 ΔZ 以另一方式 $i\Delta y$ 趋于 0，即 $\Delta Z=i\Delta y$ 时，则有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(Z+\Delta Z)-f(Z)}{\Delta Z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i(y+\Delta y)^3-iy^3}{i\Delta y}=3y^2$$

可见，当 ΔZ 以不同方式趋于 0 时，上述极限并不趋于唯一确定值。只在 $Z=0$ 处，其极限为 0。这就是说，$f(Z)=x^3+iy^3$ 在 $Z=0$ 处可导，但此处不解析。

现设 $f(Z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ 是解析函数，试求其对 x、y 的偏导数所应满足的条件。因为

$$Z=x+iy,\qquad \overline{Z}=x-iy$$

所以 $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial Z}{\partial y}=i,\quad \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial y}=-i$

并且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial Z}\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial Z},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial Z}\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial y}=i\dfrac{\partial f}{\partial Z}$

$$(9-8)$$

解析函数要求导数 $\dfrac{\partial f}{\partial Z}$ 是唯一确定的，因而有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial x}$$

另一方面

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}\qquad (9-9)$$

代入上式，即得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}=i\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$
\left.\begin{aligned}
X_N &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\
Y_N &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{ds} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{dx}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (n)
$$

为利用复解析函数的特性，现将上述边界面力分量组成如下复面力形式：

$$
X_N+iY_N=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)
$$

或

$$
(X_N+iY_N)ds=-id\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)
$$

从A点到B点积分，得

$$
\int_A^B(X_N+iY_N)ds=-i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B
$$

或

$$
[F_x+iF_y]_A^B=-i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B+i\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_A^B
$$

将式（9—24a）代入，即得

$$
\int_A^B(X_N+iY_N)ds=-i[\psi'(Z)+\chi(Z)+Z\chi'(Z)]_A^B \quad (o)
$$

式(o)的左边为AB边界上面力的主矢量；右边$[\ ]_A^B$表示Z沿AB边界由A到B时，括号中函数的增值。现设A为边界上任意选定的基点，B为边界上的任意点，那末以Z_A代入式(o)的右边括号中，必为一常数，记为

$$
\bar{\alpha}=\overline{\psi'(Z_A)}+\chi(Z_A)+Z_A\overline{\chi'(Z_A)}
$$

考虑到复应力函数具有一定的任意选择性（h）和（i），可知复常数α总可以在式（o）中被抵销，因而式（o）可简化为

$$
\int(X_N+iY)_N ds=-i[\overline{\psi'(Z)}+\chi(Z)\overline{Z\chi'(Z)}
$$

这说明：复变函数$-i[\overline{\psi'(Z)}+\chi(Z)+Z\overline{\chi'(Z)}]$在边界上任意一点$Z$的值。就等于基点与该点之间面力的合力（主矢量）。

此外，在边界AB上，面力对于坐标原点的合力矩是