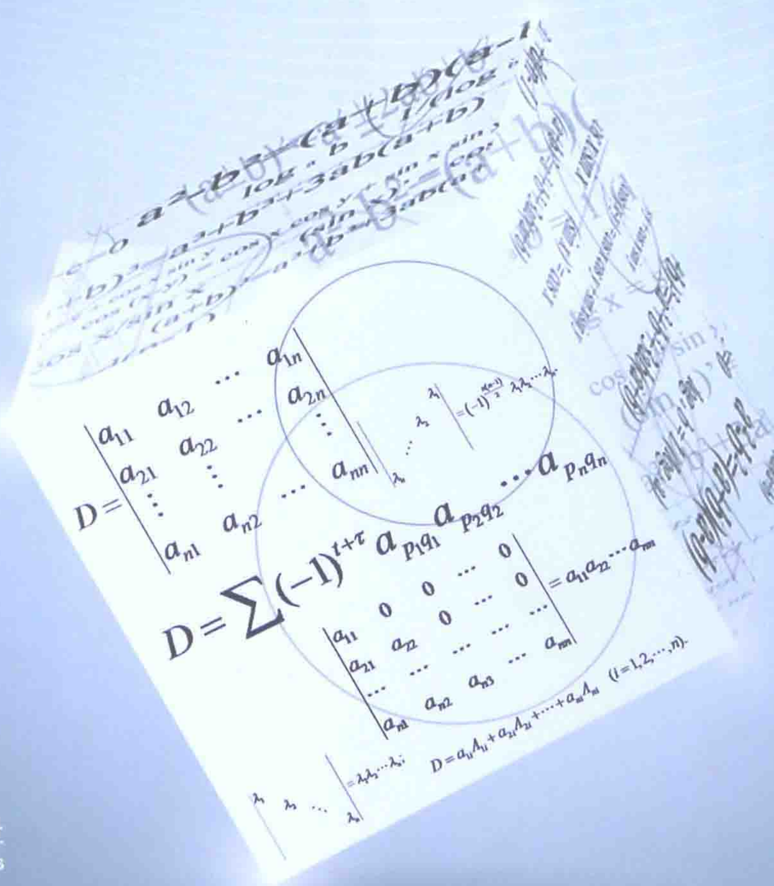
# 线性代数

## 随堂解惑与考研指导

李世群 / 主编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 线性代数随堂解惑
# 与考研指导

主　审　刘金旺
主　编　李世群
副主编　丁爱霞 刘东海 陈建华 李德琼

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数随堂解惑与考研指导 / 李世群主编. — 南京 : 东南大学出版社,2015.4

ISBN 978 - 7 - 5641 - 5581 - 0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 053198 号

**线性代数随堂解惑与考研指导**

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 东南大学出版社 |
| 出 版 人 | 江建中 |
| 社　　址 | 南京市四牌楼 2 号 |
| 邮　　编 | 210096 |

| | |
|---|---|
| 经　　销 | 全国各地新华书店 |
| 印　　刷 | 南京玉河印刷厂 |
| 开　　本 | 787 mm×1092 mm　1/16 |
| 印　　张 | 8.75 |
| 字　　数 | 224 千字 |
| 书　　号 | 978 - 7 - 5641 - 5581 - 0 |
| 版　　次 | 2015 年 4 月第 1 版 |
| 印　　次 | 2015 年 4 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 1—4000 册 |
| 定　　价 | 32.00 元 |

(本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025 - 83791830)

# 前 言

线性代数是一门以行列式和矩阵为工具、以初等变换为主要变换方法、以线性方程组为落脚点的课程。但初学者不仅对线性代数中的概念不知道其产生背景，而且容易混淆一些概念，尤其是对于所给出的一些结论到底有何用处感到迷惑，该书的编写目的在于帮助广大读者解开线性代数学习中的困惑。

该书不是简单地总结归纳每章的重点及一些解题方法，而是有其独特之处：(1) 给出了各章知识的产生背景与应用，使我们不再觉得所学知识是凭空产生的；(2) 该书的编写教师根据自己多年线性代数教学实践，总结出在线性代数学习中容易出错的地方，并分析其出错原因；(3) 在一些关键之处给出了“特别提醒”，使读者可以抓住问题的本质；(4) 对于一些重要定理和性质，给出了应用指导，帮助读者了解这些定理可用在何处；(5) 给出了部分考研题及解答。

因此，该书可以帮助读者解答学习中的疑惑，理清条理，把握核心，突破难点，提高自主学习的兴趣和效率，使线性代数的学习变得轻松而有趣，从而达到事半功倍之效。本书不仅可以为广大学生学习线性代数提供指导，而且对于高等代数的学习也有帮助，也可作为广大教师的教学参考用书，还能帮助准备考研的同学再上一个台阶。

**编者**

**2015.4**

# 目 录





此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

# 第一章 行列式

## 一、知识背景及应用

### §1.1 知识背景

行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的. 它是解“方程的个数等于未知数的个数的某些线性方程组”的有力工具之一，也是其他某些问题的主要研究工具.

如对于一个含有两个未知数、两个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases}$$

人们发现用消元法解上面的线性方程组，即将①乘以 $a_{22}$ 减去②乘以 $a_{12}$，则可消掉 $x_2$，

得到 $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, x_2=\dfrac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

将上式的分母用记号表示 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

其分子分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{11}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

这就是二阶行列式.

### §1.2 应用

行列式是研究线性代数的一个重要工具，如后面要学习的矩阵理论、线性方程组理论、向量组与秩问题及求特征值问题等，都离不开行列式. 时至今日，行列式理论的应用还渗透到多重积分中的变量替换、解行星运动的微分方程组、将二次型化简为标准型、运筹学中线性规划和图与网络理论等诸多学科和问题中.

#### §1.2.1 行列式在求解线性方程组中的应用

对于方程的个数等于未知数的个数的线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\quad\ \ \vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1}$$

只要系数行列式 $D\neq0$，就有唯一解，且解可以通过行列式求出(见克莱姆法则).

### §1.2.2 行列式在求逆矩阵中的应用(见第二章)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆(非奇异矩阵)的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，且当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

### §1.2.3 行列式在多项式理论中的应用

**例** 证明一个 $n$ 次多项式至多有 $n$ 个互异根.

**证明**：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 有 $(n+1)$ 个互异的根 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，则有 $f(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_nx_i^n(1\leqslant i\leqslant n+1)$，即

$$\begin{cases}a_0+a_1x_1\quad+a_2x_1^2\quad+\cdots+a_nx_1^n=0\\a_0+a_1x_2\quad+a_2x_2^2\quad+\cdots+a_nx_2^n=0\\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\quad\ \vdots\qquad\vdots\\a_0+a_1x_{n+1}+a_2x_{n+1}^2+\cdots+a_nx_{n+1}^n=0\end{cases}$$

由于 $x_i\neq x_j(i\neq j)$，所以这个关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的齐次线性方程组的系数矩阵行列式为

$$\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_{n+1}&x_{n+1}^2&\cdots&x_{n+1}^n\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(x_i-x_j)\neq0$$

故而线性方程组只有零解，即 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，矛盾！这表明 $f(x)$ 至多有 $n$ 个互异根.

### §1.2.4 行列式在高等数学中的应用

**例** 证明拉格朗日中值定理.

设函数 $f$ 满足条件：

(1) $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f$ 在开区间 $(a,b)$ 内可导，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

**证明**：构造行列式辅助函数来证明定理，设

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix}$$

因为 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且有 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，故由罗尔定理可得至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ 1 & f'(\xi) & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b-a & f(b)-f(a) & 0 \\ 1 & f'(\xi) & 0 \end{vmatrix}=0.$$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

§1.2.5　行列式在几何中的应用

(1) 过不同两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 的平面直线 $L$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

(2) 过不共线三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面 $\pi$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

笔记



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 二、知识框架

## §2.1　排列的逆序数

定义　在一个排列$(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$中，若数$i_t>i_s$，则称这两个数构成一个逆序．一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数，且将排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

应用：排列的逆序数是为行列式的项的符号确定做准备的．

逆序数的计算方法

原则：计算排列中每个元素的前面比它大的数码的个数之和．

方法一：从左到右法．从左到右逐个计算排列中每个元素前面比它大的数码的个数，再将这些数码个数求和．

方法二：从小到大法．数码从小到大，逐个计算出排列中每个元素前面比它大的数码的个数，再求这些个数之和．

方法三：从左到右，计算每个$j_i$后面比$j_i$小的数码的个数，再对个数求和．

例如，计算$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n-2)(2n)$的逆序数．

用从左到右法，观察前面部分：$135\cdots(2n-1)$都是从小到大排列，即每个数码前面都没有与之形成逆序的，而2前面有$(n-1)$个(即$3,5,\cdots,(2n-1)$)数，这$(n-1)$个数与它逆序，4前面有$(n-2)$个与之逆序，…，$(2n-2)$前面有1个与之逆序(即$(2n-1)$)，所以该排列的逆序数$\tau=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n-1)/2$．

## §2.2　排列的性质

(1) 对换一个排列中的任意两个元素，排列改变奇偶性．

(2) 任一个排列都可以经过对换变成标准排列，且将奇排列对换成标准排列时，其对换次数为奇数；将偶排列对换成标准排列时，其对换次数为偶数．

## §2.3　行列式

定义　(1) 由$n^2$个数组成的$n$阶行列式等于所有取自不同行不同列的$n$个元素的乘积的代数和$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作$\det(a_{ij})$，数$a_{ij}$称为行列式$\det(a_{ij})$的元素．其中$p_1p_2\cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个全排列，$\tau$为这个排列的逆序数．

(2) $n$阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{t+\tau}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

其中$p_1p_2\cdots p_n$，$q_1q_2\cdots q_n$是两个$n$级排列，$t$为行指标排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数，$\tau$为列指标排列$q_1q_2\cdots q_n$的逆序数．

(3) $n$ 阶行列式还可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 $t$ 为行指标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

以上三个定义是等价的.

**注意:**

(1) 我们可以按三种不同的选取方式选取元素作为行列式的项:

a. 每项元素的行下标按自然顺序时,列取遍 $n$ 元排列;

b. 每项元素的列下标按自然顺序时,行取遍 $n$ 元排列;

c. 每项元素的列下标按任意一个固定顺序 $p_1p_2\cdots p_n$,行下标按任意顺序取遍任 $n$ 元排列.

(2) 每一个乘积项前面的符号确定原则:根据每项元素行指标排列的逆序数加上列指标排列的逆序数的总和的奇偶性决定此乘积项取"—"或"+".

(3) 一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

**特别提醒:**

(1) $n$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

(2) 在 $n$ 阶行列式的 $n!$ 项中,每项都是位于"不同行、不同列"的 $n$ 个元素的乘积,从项的元素的下标来看,就是行下标按某个固定排列,列下标取遍所有 $n$ 元排列(既不重复也不遗漏),或列下标按某个固定顺序不变,而行下标取遍所有 $n$ 元排列;

(3) $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$. 当行和列都不按自然顺序排列时,其项的符号要由行的逆序数和列的逆序数共同确定符号,即 $a_{i_1j_1'}a_{i_2j_2'}\cdots a_{i_nj_n'}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$

(4) 用定义计算行列式一般只适用于零元素较多的行列式.(一般只剩下最多 3 项非 0 元素项)

## §2.3.1 几种特殊的行列式

(1) 主对角线以上的元素全为 0(即 $i<j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式(即下三角形行列式)及主对角线以下的元素全为 0(即 $i>j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式(即上三角形行列式)都等于主对角线上各元素的乘积.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,对角线上的元素以外,其他元素全为零(即 $i\neq j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式(称为对角行列式)等于主对角线上元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(3) 一个 $n$ 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$(称 $D_n$ 为反对称行列式),当 $n$ 为奇数时,则该行列式为零.

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j), (n\geqslant 2)$$

注意范德蒙行列式必须同时满足下面条件:

①第一行全是 1;

②第二行任意取元素;

③从第三行起,后一行的元素都在前一行的基础上,相应的指数增加 1.

### §2.3.2　代数余子式

定义　在 $n$ 阶行列式中,把元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 $a_{ij}$ 的余子式,记作 $M_{ij}$. 将 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 $a_{ij}$ 的代数余子式. 这是一个非常重要的概念.

**特别提醒**:(1) 一个元素 $a_{ij}$ 的代数余子式与该元素本身没什么关系,只与该元素的位置有关. 如 $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 中,将该行列式中 1 行 1 列元素 $a$ 换成 $b$,其代数余子式都是 $A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

(2) 求元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}$ 时,要特别注意余子式 $M_{ij}$ 前面的符号 $(-1)^{i+j}$.

### §2.3.3　行列式的性质

下面的性质 2,3,5,6 是将行列式变形的依据.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 $D^T$ 称为行列式 $D$ 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.(在行列式的计算中,行与列具有等同的地位)

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

由性质 2,行列式的两行(列)互换偶数次不变号,互换奇数次变号.

推论 1　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 $k$,等于用数 $k$ 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

应用 1:推论 2 常用到行列式的计算中,当某行(列)的元素比较大且又有公因子 $d$ 时,可将该公因子 $d$ 提到行列式外面,使其元素变小,从而简化计算.例如:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 200 & 400 & 500 \\ -1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

应用 2:将分数化整,即:当行列式某行(列)有分数时,为了计算简便,往往将该行提出 $\frac{1}{k}$,其中 $k$ 为该行分母的最小公倍数.例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 12 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D$ 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.如

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

应用:该性质常用到行列式的计算中将某些元素化成 0,或者将某行(列)元素变小.例如:下面矩阵数字较大,可以将第 3 列乘以$-1$加到第 2 列,得:

$$
\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1\,014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 1\,014 & 1 & 443 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix}
$$

又如,要将行列式$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$的第 2 行 1 列元素 4 化为 0,可将第 1 行乘以$-2$加到第 2 行,得$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

### §2.3.4　重要结论

行列式展开定理:

定理 1　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$
D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)
$$

或

$$
D=a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}(i=1,2,\cdots,n).
$$

应用 1:用该定理来计算行列式,可达到降阶的目的,但是每一次只能降一阶.

应用 2:要计算行列式 $D$ 中某行(列)的代数余子式之和,由定理 1 知,就是要计算另一行列式 $D_1$,其中 $D_1$ 是将 $D$ 的某一行改变,其余行不变.

例如,设$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$,计算 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$,就是计算 $D_1$,而 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0$,$D_1$ 是将 $D$ 的第 2 行换成了$(1\quad 1\quad 1\quad 1)$.

**提别提醒:**

(1) 计算行列式时,以上性质中用得最多的是性质 6,我们常常用它将某些元素化成 0,往往运用性质 6 将行列式化为上三角(下三角),或将某行(列)一些元素化为 0 后,再



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com