



工业和信息化部“十二五”规划教材

21世纪高等院校电气工程与自动化规划教材

21 century institutions of higher learning materials of Electrical Engineering and Automation Planning

**E**ngineering Electromagnetic Fields

# 工程电磁场

许丽萍 薛锐 主编

高燕琴 侯利洁 刘天野 温廷敦 编著



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS



工业和信息化部“十二五”规划教材

21世纪高等院校电气工程与自动化规划教材

21 century institutions of higher learning materials of Electrical Engineering and Automation Planning

Engineering Electromagnetic Fields

# 工程电磁场

许丽萍 薛锐 主编

高燕琴 侯利洁 刘天野 温廷敦 编著

人民邮电出版社

北京

## 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场 / 许丽萍 薛锐主编 ; 高燕琴等编著

— 北京 : 人民邮电出版社, 2014. 12

21世纪高等院校电气工程与自动化规划教材

ISBN 978-7-115-36788-4

I. ①工… II. ①许… ②高… III. ①电磁场—高等学校—教材 IV. ①0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第208485号

## 内 容 提 要

本书是工业和信息化部“十二五”规划教材。

全书体现了面向工程的电磁场内容体系,系统地介绍了工程电磁场的基本理论及相关应用。主要包括矢量分析与场论基础、静电场、恒定电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、电磁场边值问题的基本解法、电磁场的能量及能量转换与守恒定律、平面电磁波的传播以及电路参数计算原理、电气工程中典型的电磁场问题等。书中配置了大量例题,便于读者练习和加深理解。

本书可作为普通高等学校电气工程及其自动化和其他与电磁场相关专业的本科生教材,也可供相关专业研究生、教师或其他人员参考。



- 
- ◆ 主 编 许丽萍 薛 锐
  - 编 著 高燕琴 侯利洁 刘天野 温廷敦
  - 责任编辑 邹文波
  - 责任印制 沈 蓉 彭志环
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号  
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
北京昌平百善印刷厂印刷
  - ◆ 开本: 787×1092 1/16  
印张: 19.25 2014 年 12 月第 1 版  
字数: 482 千字 2014 年 12 月北京第 1 次印刷
- 

定价: 45.00 元

读者服务热线: (010)81055256 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

## 前 言

自麦克斯韦在前人研究工作的基础上，提出了涡旋电场和位移电流两个基本假说，总结出电磁现象的基本规律，建立了完整的电磁场理论体系，揭示了光、电、磁现象的内在联系及统一性，并预言了电磁波的存在之后，直接导致了以电力的广泛应用为显著特点的第二次工业革命，使人类进入了电气化时代。此后，以麦克斯韦电磁场理论为指导，现代电力工业、电工、有线及无线通信、雷达、波导、微波等民用或军用技术得到了快速的发展。即使在信息化时代的今天，与信息技术相关的研究领域，麦克斯韦电磁场理论仍然起着主导作用。为了满足信息化时代对人才的需求，在高校的相关专业，不管是理科的专业（如物理学、应用物理学等），还是工科的专业（如电子信息类、电子工程类、电气工程类、通信、测试计量技术及仪器等），都开设了与电磁场理论相关的课程。虽然课程名称有所不同（如电动力学、电磁场与电磁波、工程电磁场，有的直接就叫做电磁场理论），但其主要内容基本上就是麦克斯韦方程组加边界条件及工程应用。

从2006年开始，中北大学在电气工程及其自动化专业开设“工程电磁场”课程。多年来，一直使用由王泽忠、全玉生、卢斌先编著的高等院校电气工程系列教材《工程电磁场》。目前，采用的是普通高等教育“十一五”国家规划教材，即《工程电磁场（第2版）》。

在讲授《工程电磁场》课程的过程中，教师们发现由王泽忠、全玉生、卢斌先编著的、清华大学出版社出版的高等院校电气工程系列教材《工程电磁场》，内涵丰富，既有深度，也有广度，是一本质量相当高的教学参考书。但对普通高校而言，学生理解掌握有一定的难度。

编者作为物理系的教师，在讲授物理学专业课程“电动力学”的基础上，有幸参与了与工程应用联系较紧的课程“工程电磁场”的讲授工作。因此，在教学过程中，希望能将数学、物理、工程应用融会贯通，在理工融合方面有所作为，也希望工科院校的学生在关注工程应用背景的同时，深刻理解物理学思想，接受相对严密的逻辑推理的训练，更多地注重理论对实践的指导作用，拥有较扎实的理论功底，为以后从事相关研究工作打好基础。

编者在多年教学累积的基础上，结合自己的知识结构与体验，以及教学工作的需要，2013年成功申报工业和信息化部“十二五”规划教材《工程电磁场》。

本书体现了面向工程的电磁场内容体系。第1章矢量分析与场论基础是全书的数学基础。第2章~第4章分别从库仑定律、电荷守恒定律、安培定律出发，系统地介绍静电场、恒定电场、恒定磁场的基本方程，并将其表述为边值问题。第5章从涡旋电场和位移电流假设出发，总结得到时变电磁场满足的基本规律——麦克斯韦方程组；利用动态位，讨论达朗贝尔方程及单元辐射子的辐射。第6章介绍电磁场边值问题的基本解法，如镜像法、电轴法、直

接积分法、分离变量法、模拟电荷法等。第7章~第9章分别讨论电磁场的能量及能量转换与守恒定律、平面电磁波和电路参数计算原理。第10章介绍电气工程中典型的电磁场问题,包括变压器的磁场、电机的磁场、绝缘子的电场、三相输电线路的工频电磁环境以及三相输电线路的电容和电感参数。

在本书编写过程中,我们注重处理与物理学中电磁学相衔接的内容,力求物理概念清晰,通俗易懂;注重理工融合,贴近工程应用背景,相关例题和习题尽量来源于实际工程应用,有助于增加学生的学习兴趣。全书条理清晰,论证严谨,结构合理,突出理工融合,注重与后续课程内容的衔接,注重知识的系统性、继承性与实践性。

本书由承担中北大学电气工程及其自动化专业“工程电磁场”课程的教师共同编著完成。其中,薛锐编写第1章及第3章,侯利洁编写第2章及第9章,高燕琴编写第4章及第7章,许丽萍编写第5章及第6章,温廷敦编写第7章,刘天野编写第10章。全书完成后,也请其他讲授相关课程的教授仔细审阅了全稿,并提出很多宝贵意见,进一步提高了本书的质量。编写中也参考了国内其他同类教材,编者谨在此一并表示衷心的感谢。

本书可以作为大学本科电子信息类、电气工程类、电气工程类、通信等专业学生的教学参考书,也可供从事电气工程、电波传播、射频技术、微波技术、电磁兼容技术的科研和工程技术人员参考。

由于编者水平有限,书中难免存在错误和不当之处,敬请批评指正。请将意见或建议发到以下邮箱: [lpXu@sina.com](mailto:lpXu@sina.com)。

编者

2014年11月

# 目 录

第 1 章 矢量分析与场论基础	1
1.1 标量与矢量	1
1.1.1 标量与矢量	1
1.1.2 矢量在直角坐标系中的表示	1
1.2 矢量的代数运算	2
1.2.1 矢量的加减法	2
1.2.2 矢量的乘法	3
1.3 标量场与矢量场	4
1.3.1 标量场的等值面方程	4
1.3.2 矢量场的矢量线方程	5
1.3.3 源点与场点	6
1.4 标量场的梯度	7
1.4.1 方向导数	7
1.4.2 标量场的梯度	7
1.5 矢量场的散度	11
1.5.1 矢量场的通量	11
1.5.2 散度定理	12
1.5.3 矢量场的散度	12
1.6 矢量场的旋度	15
1.6.1 矢量场的环量	15
1.6.2 斯托克斯定理	15
1.6.3 矢量场的旋度	16
1.6.4 无旋场与无散场	21
1.7 格林定理与亥姆霍兹定理	21
1.7.1 标量格林定理	21
1.7.2 矢量格林定理	22
1.7.3 亥姆霍兹定理	22
1.8 三种常用坐标系	23
1.8.1 度量系数	24
1.8.2 哈密顿算符 $\nabla$ 、梯度、散度、旋度及拉普拉斯算符 $\nabla^2$ 在正交曲线坐标系下的一般表达式	24
1.8.3 直角坐标系	24
1.8.4 柱坐标系	25
1.8.5 球坐标系	26
习题	27

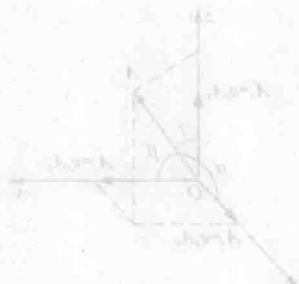
第 2 章 静电场	29
2.1 库仑定律与电场强度	29
2.1.1 电荷与电荷分布	29
2.1.2 库仑定律	30
2.1.3 电场强度	31
2.2 静电场的有散性——高斯定理	34
2.2.1 高斯定理的微分形式——静电场的散度	34
2.2.2 高斯定理的积分形式——高斯通量定理	35
2.3 静电场的无旋性——环路定理	36
2.3.1 电位的引入	36
2.3.2 环路定理	37
2.3.3 电位及电场强度	38
2.3.4 电场线和等位面	38
2.4 电偶极子	43
2.4.1 电偶极子的电位与电场	44
2.4.2 电偶极子的场图	44
2.5 静电场中的导体和电介质	45
2.5.1 静电场中的导体	45
2.5.2 静电场中的电介质——介质的极化	46
2.5.3 介质极化形成的电偶极子产生的电位与电场	48
2.6 电位移矢量 $D$ 及用 $D$ 表示的相关定理	49
2.6.1 电介质中的高斯定理	49
2.6.2 介电常数	50
2.7 静电场基本方程与分界面条件	53
2.7.1 静电场的基本方程	53
2.7.2 介质的分界面条件	53
2.8 边值问题	57
2.8.1 泛定方程——泊松方程与拉普拉斯方程	58
2.8.2 定解条件——边界条件	58
2.8.3 静电场的唯一性定理	59
习题	60

第3章 恒定电场	64	4.3.3 矢量磁位的计算公式	91
3.1 导电介质中的电流强度和 电流密度	64	4.4 磁偶极子与磁介质中的磁场	95
3.1.1 电流强度	64	4.4.1 磁偶极子	95
3.1.2 电流密度	65	4.4.2 介质的磁化	96
3.1.3 电流密度与电场强度的 关系——欧姆定律的 微分形式	66	4.4.3 用磁场强度表示的安培环路 定理与标量磁位	98
3.2 电动势与局外场强	68	4.5 恒定磁场的基本方程与分界面 条件	101
3.2.1 局外场	68	4.5.1 恒定磁场的基本方程	102
3.2.2 电动势	68	4.5.2 恒定磁场的分界面条件	103
3.3 恒定电场的基本方程	69	4.6 恒定磁场的边值问题与唯一性 定理和磁路	108
3.3.1 恒定电场的电流连续性 方程	69	4.6.1 矢量磁位 $A$ 的边值问题	108
3.3.2 恒定电场的基本方程	69	4.6.2 标量磁位 $\varphi_m$ 的边值问题	108
3.3.3 导电介质中的自由电荷 分布	70	4.6.3 恒定磁场的唯一性定理	109
3.3.4 恒定电场的求解	70	4.6.4 磁路	109
3.4 导电介质的分界面衔接条件	72	习题	111
3.4.1 不同导电介质分界面衔接 条件	72	第5章 时变电磁场与麦克斯韦 方程组	115
3.4.2 介质分界面的两种特殊情况	74	5.1 概述	115
3.4.3 导电介质分面积累自由 电荷	75	5.2 电磁感应定律	117
3.5 恒定电流场的边值问题	77	5.2.1 电磁感应定律	117
3.5.1 恒定电流场的基本方程	77	5.2.2 动生电动势——发电机 电动势	117
3.5.2 外边界面上的边界条件	78	5.2.3 感生电动势与感生电场	117
3.6 恒定电场与静电场比拟	78	5.2.4 电磁感应定律的微分形式	118
3.7 跨步电压	80	5.3 全电流定律	121
习题	81	5.3.1 电荷守恒定律的微分形式—— 时变场的电流连续性方程	121
第4章 恒定电流的磁场	82	5.3.2 位移电流假说	122
4.1 磁感应强度	82	5.3.3 麦克斯韦——安培环路 定理	122
4.1.1 安培定律与磁感应强度	82	5.4 麦克斯韦方程组	125
4.1.2 毕奥-萨伐尔定律	83	5.4.1 普遍情况下的高斯定理	125
4.1.3 磁感线	84	5.4.2 麦克斯韦方程组	126
4.1.4 洛仑兹力	85	5.4.3 电磁场边值关系	129
4.2 磁通连续性定理与安培环路 定理	87	5.5 电磁场动态位方程及其解	133
4.2.1 磁通连续性定理	87	5.5.1 矢量动态位 $A$ 及标量 动态位 $\varphi$	133
4.2.2 安培环路定理	87	5.5.2 达朗贝尔方程	133
4.3 矢量磁位	90	5.5.3 达朗贝尔方程的解	135
4.3.1 矢量磁位的引入	90	5.5.4 时谐场的达朗贝尔方程及 其解	137
4.3.2 矢量磁位的散度与库仑规范	91		

5.6 电磁振荡与电磁辐射	138	7.3 恒定磁场的能量	204
5.6.1 电磁振荡	138	7.3.1 用场源及位函数表示恒定 磁场能量	204
5.6.2 天线的形成	139	7.3.2 用场量表示恒定磁场能量	205
5.6.3 电偶极子辐射场的一般 表达式	140	7.4 时变电磁场的能量及能量守恒与 转换定律	208
5.6.4 电偶极子辐射的近区场和 远区场	142	7.4.1 场和电荷系统的能量守恒和 转化定律	208
5.7 准静态电磁场的边值问题	146	7.4.2 电磁场的能量密度和 能流密度	210
5.7.1 准静态电磁场	146	7.4.3 坡印亭定理	211
5.7.2 准静态电(流)场的 边值问题	146	7.4.4 单元偶极子的辐射功率和 辐射电阻	213
5.7.3 准静态磁场(涡旋场)的 边值问题	147	7.5 电磁场能量与电磁力的虚位 移法	216
习题	148	7.5.1 虚位移法概述	216
<b>第6章 电磁场边值问题的基本解法</b>	151	7.5.2 能量守恒定律与广义电场力的 虚位移法	217
6.1 直接积分法	151	7.5.3 能量守恒定律与广义磁场力的 虚位移法	220
6.1.1 直角坐标系	151	习题	223
6.1.2 圆柱坐标系	153	<b>第8章 均匀平面电磁波的传播</b>	225
6.1.3 球坐标系	157	8.1 理想介质中的均匀平面电磁波	225
6.2 分离变量法	159	8.1.1 理想介质中的波动方程	226
6.2.1 直角坐标系	160	8.1.2 理想介质中均匀平面电磁波的 波动方程	226
6.2.2 圆柱坐标系	165	8.1.3 理想介质中时谐均匀平面 电磁波的波动方程与传播 规律	227
6.2.3 球坐标系	171	8.2 导电介质中的时谐均匀平面 电磁波	232
6.3 镜像法	180	8.2.1 导电介质中的自由电荷	232
6.3.1 镜像法原理	180	8.2.2 导电介质中时谐均匀平面 电磁波的波动方程	233
6.3.2 静电场的镜像法	180	8.2.3 时谐均匀平面电磁波的 波动方程与传播规律	234
6.3.3 恒定磁场的镜像法	190	8.2.4 低损耗介质中时谐电磁波的 参数	235
6.4 模拟电荷法	192	8.2.5 良导体中时谐电磁波的 参数	236
6.4.1 模拟电荷法的计算原理	192	8.3 电磁波的极化	239
6.4.2 模拟电荷法实施	193	8.3.1 直线极化波	240
习题	194	8.3.2 圆极化波	241
<b>第7章 电磁场的能量与能量守恒       定律</b>	196		
7.1 静电场的能量	196		
7.1.1 用场源及位函数表示静电场 能量	196		
7.1.2 用场量表示静电场能量	197		
7.1.3 点电荷系统的能量	198		
7.2 焦耳定律——恒定电场的 能量	203		
7.2.1 导电介质中的能量损耗—— 焦耳定律的微分形式	203		
7.2.2 焦耳定律的积分形式	204		



8.3.3 椭圆极化波	241	第 10 章 电气工程中典型的电磁场	275
8.4 导体中与时变场相关的效应	243	问题	275
8.4.1 薄导体平板中的涡流	243	10.1 时变电磁问题的“场”与“路”	275
8.4.2 集肤效应	246	分析方法	275
8.4.3 邻近效应	246	10.1.1 集总电路条件	275
8.4.4 电磁屏蔽	247	10.1.2 输电线路电路模型	276
习题	248	10.2 电力系统电晕	277
第 9 章 电路参数及计算	250	10.3 三相架空输电线电容参数的	280
9.1 电导与电阻	250	计算	280
9.1.1 电导与电阻	250	10.3.1 三相架空输电线路的电容	280
9.1.2 接地电阻	253	10.3.2 分裂导线的电容	282
9.2 电感	254	10.3.3 三相架空输电线路的零序	283
9.2.1 多回路系统的电感	255	电容	283
9.2.2 自感	255	10.4 三相架空输电线电感参数	285
9.2.3 互感	257	计算	285
9.2.4 由矢量磁位 $A$ 计算互感与自感	258	10.4.1 多导体系统电感计算的	285
一般公式——诺以曼公式	258	一般公式	285
9.2.5 电感系数表示的磁场能量	259	10.4.2 三相输电线路的电感	287
9.3 电容	263	10.4.3 分裂导线三相架空输电线路的	289
9.3.1 两导体系统的电容	263	电感	289
9.3.2 多导体系统的电容与部分	264	10.4.4 三相架空输电线路的	291
电容	264	零序电感	291
9.4 交流阻抗参数	269	附录 1 主要符号说明	293
9.4.1 复功率	269	附录 2 常用常量	295
9.4.2 复数形式的坡印亭定理	269	附录 3 常用公式	296
9.4.3 交流电路参数	271	参考文献	299
习题	272		



# 第 1 章 矢量分析与场论基础

工程电磁场着重研究电磁现象及其场的基本规律，其中所涉及的一些物理量，如电场强度、磁场强度等的描述都与空间坐标或方向有关，通常使用矢量来描述。为了后面各章学习的方便，本章主要介绍分析矢量场时所需要的一些矢量代数和场论的相关知识。首先介绍标量、矢量、标量场、矢量场等基本概念以及矢量的基本运算；然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度、旋度等重要概念及其运算规律，在此基础上介绍几个重要定理，即散度定理、斯托克斯定理、格林定理、亥姆霍兹定理；最后给出几种不同的坐标系以及在不同坐标系中各种矢量运算的表达式。

## 1.1 标量与矢量

### 1.1.1 标量与矢量

物理学中的物理量一般分为两类，其中仅有大小，没有方向的量叫做标量，如长度、面积、时间、温度、电压、电流、能量等。另一类既有大小，又有方向的物理量叫做矢量，如位移、力、速度、电场强度、磁感应强度等。

在本教材中，矢量的符号采用印刷体的形式即场量符号加粗表示，如  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 。在书写时，通常在表示矢量的字母上方加半个箭头表示，如  $\vec{F}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 。

矢量的表示方法主要有两种，一种为代数表示，另一种为几何表示。代数上，矢量  $\mathbf{A}$  的大小用  $|\mathbf{A}|$  表示，称为矢量  $\mathbf{A}$  的模，记做  $|\mathbf{A}| = A$ 。矢量的方向可以用单位矢量表示，单位矢量是模为 1 的矢量，用  $\mathbf{e}$  表示。因此任一矢量可以用它的模和单位矢量表示，如矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{e} = A \mathbf{e} \quad (1-1-1)$$

几何上，矢量可以用一有向线段表示，线段的长度代表矢量的大小，线段的方向即为矢量的方向，如图 1-1-1 所示。

大小和方向不随空间变化的矢量称为常矢量。

### 1.1.2 矢量在直角坐标系中的表示

在直角坐标系中，若把代表矢量  $\mathbf{A}$  的有向线段放在坐标系的原点，矢量还可以用它在坐

图 1-1-1 矢量的几何表示

标系上的投影来表示,如图 1-1-2 所示。

对于直角坐标系,它的三个坐标轴方向的单位矢量分别为  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$ , 矢量  $A$  可分解为沿三个坐标轴分量的矢量和的形式,即

$$A = A_x + A_y + A_z \quad (1-1-2)$$

其中各个分矢量可表示为

$$A_x = e_x A_x, \quad A_y = e_y A_y, \quad A_z = e_z A_z$$

矢量  $A$  表示为  $A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ , 由此可得该矢量的模为

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-1-3)$$

其单位矢量为

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{A}{|A|} = e_x \frac{A_x}{|A|} + e_y \frac{A_y}{|A|} + e_z \frac{A_z}{|A|} \\ &= e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \end{aligned} \quad (1-1-4)$$

式中,  $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$  称为矢量  $A$  的方向余弦,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  分别为矢量  $A$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴正向的夹角。

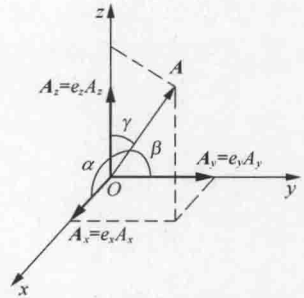


图 1-1-2 矢量在直角坐标系中的表示

## 1.2 矢量的代数运算

### 1.2.1 矢量的加减法

在几何上,两个矢量的加法和减法可以用平行四边形法则或三角形法则来表示,如图 1-2-1 和图 1-2-2 所示。

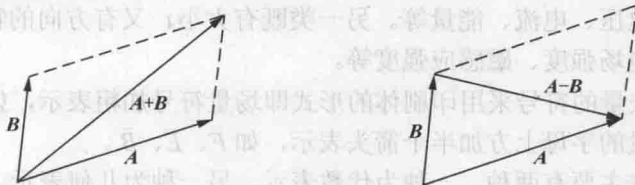


图 1-2-1 矢量加法和减法的平行四边形法则

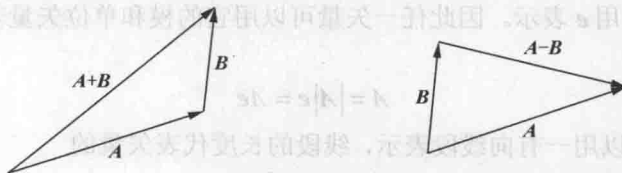


图 1-2-2 矢量加法和减法的三角形法则

矢量的加法和减法还可以用分量式表示。

设  $A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ ,  $B = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$ , 则

$$A \pm B = e_x (A_x \pm B_x) + e_y (A_y \pm B_y) + e_z (A_z \pm B_z) \quad (1-2-1)$$

即两矢量之和（之差）的直角坐标分量等于两矢量对应坐标分量的和（或差）。矢量的加法满足交换律和结合律，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1-2-2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (1-2-3)$$

## 1.2.2 矢量的乘法

### 1. 标量与矢量相乘

标量与矢量相乘只改变矢量大小，不改变方向。标量  $k$  乘矢量  $\mathbf{A}$ ，结果如下

$$k\mathbf{A} = e_x kA_x + e_y kA_y + e_z kA_z = ke_A |\mathbf{A}| \quad (1-2-4)$$

### 2. 矢量的标量积

两个矢量的标量积（或点积）定义为这两个矢量的模以及这两个矢量之间夹角的余弦三者的乘积，即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-2-5)$$

式中， $\theta_{AB}$  是两矢量间的夹角。

两个矢量的标量积结果是标量，

当  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  时， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ；

当  $\mathbf{A} // \mathbf{B}$  时， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$ 。

矢量的标量积具有以下性质：

(1) 符合交换律和分配律

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

(2) 直角坐标系中，3个坐标轴单位矢量  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$  的标量积满足如下关系：

$$e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0$$

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$$

### 3. 矢量的矢量积

两个矢量的矢量积（或叉积）的模等于这两个矢量的模以及这两个矢量之间夹角的正弦三者的乘积，而方向垂直于两矢量所构成的平面，其指向按“右手法则”来确定。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_n AB \sin \theta_{AB} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-2-6)$$

$$= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

两个矢量的矢量积为矢量，

当  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  时， $\theta_{AB} = 90^\circ$ ， $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_n AB$ ；

当  $\mathbf{A} // \mathbf{B}$  时， $\theta_{AB} = 0^\circ$ ， $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

矢量的矢量积具有以下性质：

(1) 当两矢量  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  作矢量积运算时，由于矢量积的结果为矢量，当两矢量前后交换次序时，两矢量的矢量积不符合交

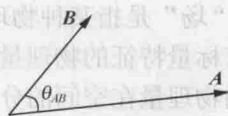


图 1-2-3 两个矢量的标量积

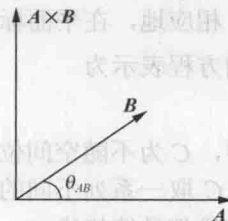


图 1-2-4 两个矢量的矢量积

换律, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

但是矢量积满足分配律

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

(2) 直角坐标系中, 3 个坐标轴单位矢量  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$  的矢量积满足如下关系

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

#### 4. 矢量的混合运算

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-2-7)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-2-8)$$

### 1.3 标量场与矢量场

“场”是指某种物理量在空间的分布, 按照物理量性质的不同, 场也可以分为以下两类: 具有标量特征的物理量在空间的分布是**标量场**, 如温度场、电位场、高度场等; 具有矢量特征的物理量在空间的分布是**矢量场**, 如重力场、电场、磁场等。

场所对应的物理量除了与空间分布有关, 还有可能随时间变化, 因此, 一个标量场和一个矢量场可分别用坐标和时间的标量及矢量函数表示, 具体形式为  $u(x, y, z, t)$ 、 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ 。不随时间变化的场称为静态场, 静态标量场和静态矢量场分别表示为  $u(x, y, z)$ 、 $\mathbf{A}(x, y, z)$ , 如静电场表示为  $\mathbf{E}(x, y, z)$ ; 随时间变化的场称为时变场, 时变标量场和时变矢量场分别表示为  $u(x, y, z, t)$ 、 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ 。

#### 1.3.1 标量场的等值面方程

在标量场中, 为了形象直观地描述物理量在空间的分布状态, 引入等值面和等值线的概念, 等值面是标量场取同一数值的点在空间形成的曲面。

等值面的方程为

$$u(x, y, z) = C \quad (1-3-1)$$

式中,  $C$  为不随空间位置变化的常数。

$C$  取一系列不同的值, 就得到一系列不同的等值面, 形成等值面族, 从而直观地描绘出标量场空间分布状态。标量场的等值面充满场所在的整个空间, 且标量场的等值面互不相交。如电磁场中的电位场就是一个标量场, 由电位相同的点所组成的等值面叫作等电位面(等势面)。

相应地, 在平面标量场  $u(x, y)$  中, 具有相同数值的点就构成了该标量场的等值线。等值线的方程表示为

$$u(x, y) = C \quad (1-3-2)$$

式中,  $C$  为不随空间位置变化的常数。

$C$  取一系列不同的值, 就得到一系列不同的等值线, 如气象图上的等压线, 地形图上的等高线都是等值线。

## 1.3.2 矢量场的矢量线方程

标量场可以用等值面来描述, 相应的矢量场可以用矢量线来描述它的空间分布状态。矢量线是这样一簇曲线, 其上每一点的切线方向代表了该点矢量场的方向, 线密度表示矢量场的大小, 如: 静电场中的电场线, 磁场中的磁感线。

根据矢量线的定义, 可以容易得到矢量线方程。矢量线上任一点的切向长度元矢量  $d\mathbf{l}$  与该点的矢量场  $\mathbf{A}$  的方向平行, 即

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1-3-3)$$

其中  $d\mathbf{l}$  和  $\mathbf{A}$  可以用分量形式表示为

$$d\mathbf{l} = e_x dx + e_y dy + e_z dz, \quad \mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$$

代入式 (1-3-3) 得

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ dx & dy & dz \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (dyA_z - A_y dz)e_x + (dzA_x - A_z dx)e_y + (dxA_y - dyA_x)e_z = \mathbf{0}$$

由上式可得

$$\begin{cases} dyA_z - A_y dz = 0 \\ dzA_x - A_z dx = 0 \\ dxA_y - dyA_x = 0 \end{cases}$$

求解得到矢量线方程的标量形式

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1-3-4)$$

因此矢量线方程为  $d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  或  $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$ , 通过求解这两个方程就可以绘出矢量线。

**例 1-3-1** 求下列标量场的等值线以及等值面。

(1)  $u = xy$

(2)  $u = z - \sqrt{x^2 + y^2}$

解 (1) 等值线方程可表示为  $u = xy = C$  (其中  $C$  为常数)

则等值线为  $y = \frac{C}{x}$ , 为双曲线族。

(2) 等值面方程为  $u = z - \sqrt{x^2 + y^2} = C$ , 解得  $x^2 + y^2 = (z - C)^2$

因此等值面为顶点在  $(0, 0, C)$  的圆锥面族 (其中  $C$  为常数)。

**例 1-3-2** 点电荷  $q$  位于坐标原点, 其周围空间为真空, 求电场强度  $\mathbf{E}$  的矢量线。

解 空间中任一点处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

其中  $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$  为场中任一点的位矢。

利用式 (1-3-4) 计算矢量线所满足的方程

$$\frac{dx}{\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}} = \frac{dy}{\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}} = \frac{dz}{\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{cases} \quad (1-3-1)$$

对  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$  两边积分可得

$$\ln x = \ln y + C \quad \text{其中 } C \text{ 为常数}$$

再对上式两边取  $e$  指数, 得

$$e^{\ln x} = e^{\ln y} e^C$$

化简得到

$$0 = y = C_1 x$$

其中  $C_1 = e^{-C}$

同理可得  $z = C_2 y$

求解得到电场强度  $E$  的矢量线方程为

$$\begin{cases} y = C_1 x \\ z = C_2 y \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

从上面的结果可以看出, 矢量线的形状为从坐标原点出发的一系列射线, 在静电场中称为电场线。

### 1.3.3 源点与场点

一般来说, 场是由场源产生的, 场源所在的空间位置称为源点, 图 1-3-1 中源点  $P'$  用坐标  $(x', y', z')$  表示, 也可以用位置矢量  $\mathbf{r}'$  表示。

空间位置上除了定义场源量以外, 还可以定义场量, 因此把空间分布的物理量所在的空间位置称为场点。图 1-3-1 中场点  $P$  用坐标  $(x, y, z)$  表示, 也可以用位置矢量  $\mathbf{r}$  表示。

源点到场点的距离矢量:  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , 矢量  $\mathbf{R}$  对应的单位矢量  $\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 。

在整个工程电磁场的学习过程中,  $\mathbf{R}$  是非常重要的量, 这个量联系着源点与场点, 决定着场量与场源之间的空间关系。对于  $\mathbf{R}$  的相关运算将在本章后面的内容中做详细的讨论。

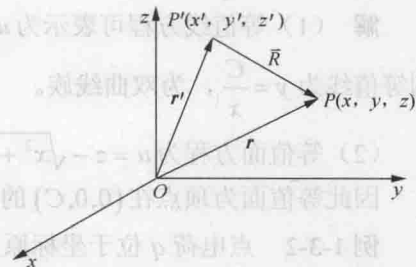


图 1-3-1 场点及源点

## 1.4 标量场的梯度

标量场的等值面和等值线给出的是物理量在场中整体的分布情况,要想知道标量场中每一点的物理量沿各个方向的变化规律,还需引入标量场的方向导数和梯度的概念。

### 1.4.1 方向导数

如图 1-4-1 所示,标量函数  $u(x, y, z)$  在空间  $P$  点处沿任意方向对空间的变化率与所取  $l$  的方向有关,在不同方向上  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$  的值不同。

因此标量场  $u(x, y, z)$  在  $P$  点沿  $l$  方向的方向导数  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$  定

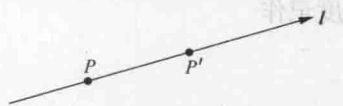


图 1-4-1 方向导数

义为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(P') - u(P)}{\Delta l} \quad (1-4-1)$$

其中,  $\Delta l$  为  $P$  和  $P'$  之间的距离。

从上面的定义可知,标量场在某点的方向导数表示标量场在该点沿某一方向上的变化率。标量场中,在一个给定点处沿不同方向的方向导数一般是不同的。

当  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P > 0$  时,  $u$  沿  $l$  方向是增加的;

当  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P < 0$  时,  $u$  沿  $l$  方向是减小的。

在直角坐标系中,方向导数有如下关系:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-4-2)$$

若线微分元  $dl$  的方向余弦为  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ , 即  $\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial l}$ ,  $\cos \beta = \frac{\partial y}{\partial l}$ ,  $\cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial l}$ ,

方向导数变为下面的形式

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-4-3)$$

### 1.4.2 标量场的梯度

方向导数给出了标量场  $u(x, y, z)$  在给定点处沿某个方向的变化率情况,但是沿哪个方向的变化率最大,最大变化率又是多少,这是实际中经常需要探讨的问题。为了解决这个问题,下面从方向导数出发来分析。

定义矢量场

$$\mathbf{G} = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-4-4)$$

利用上式,方向导数  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$  可以表示为



$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l \quad (1-4-5)$$

式中,  $\mathbf{e}_l$  是矢量  $l$  的单位矢量, 且  $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma$ 。

上式表明  $\mathbf{G}$  在  $l$  方向的投影正好等于标量场  $u(x, y, z)$  在该方向上的方向导数, 当  $l$  与  $\mathbf{G}$  方向一致时, 方向导数取得最大值, 即  $|\mathbf{G}| = \frac{\partial u}{\partial l}$ 。由此可见, 矢量  $\mathbf{G}$  的方向就是  $u(x, y, z)$  变化率最大的方向, 其模为最大变化率的数值, 矢量  $\mathbf{G}$  称为标量场  $u$  的梯度。因此, 标量场在某点梯度的大小等于该点的最大方向导数, 梯度的方向为该点具有最大方向导数的方向。梯度记作

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z = \mathbf{G} \quad (1-4-6)$$

在矢量分析中, 经常用到哈密顿算符  $\nabla$ , 在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-4-7)$$

算符  $\nabla$  具有矢量和微分的双重性质, 又称为矢量微分算符。

因此, 标量场  $u$  的梯度可表示为

$$\text{gradu} = \nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-4-8)$$

梯度具有如下性质:

(1) 标量场的梯度是矢量, 其方向垂直于通过该点的等值面, 并指向标量函数变化最快的方向。

(2) 标量场沿  $l$  方向的方向导数等于梯度在该方向上的投影, 即

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \mathbf{e}_l \quad (1-4-9)$$

标量场的梯度函数建立了标量场与矢量场的联系, 这一联系使得某一类矢量场可以通过标量函数来研究, 或者标量场也可以通过矢量场来研究。

下面给出一些常用的梯度运算公式:

$$\nabla C = 0 \quad (1-4-10)$$

$$\nabla C u = C \nabla u \quad (1-4-11)$$

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1-4-12)$$

$$\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1-4-13)$$

$$\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \nabla u - u \nabla v) \quad (1-4-14)$$

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u \quad (1-4-15)$$

式中  $C$  为常数,  $u, v$  为坐标变量函数。

**例 1-4-1** 设  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  为源点  $(x', y', z')$  到场点  $(x, y, z)$  的距离,  $\mathbf{R}$  的方向规定为从源点指向场点。证明下列结果:

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \nabla' R = -\frac{\mathbf{R}}{R} = -\nabla R, \quad \nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$$