中国矿业大学“211工程”三期创新人才培养项目资助

机械动力学

主编　刘初升　彭利平　李　珺

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

中国矿业大学“211 工程”三期创新人才培养项目资助

机械动力学

主编 刘初升 彭利平 李 珺

中国矿业大学出版社

内容提要

本书主要与编者多年的研究生机械动力学教学内容相配合，重点介绍了单自由度、双自由度、多自由度及连续体振动系统的建模与分析过程，辅之以振动数值方法的基本原理推导，最后对非线性振动、转子动力学和有限元思想进行了简单阐述。

本书主要供高等院校的理工科研究生及相关科技工作人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

机械动力学/刘初升，彭利平，李珺主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2013.9

ISBN 978-7-5646-2020-2

Ⅰ.①机… Ⅱ.①刘…②彭…③李… Ⅲ.①机械动力学—高等学校—教材 Ⅳ.①TH113

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第204467号

书　　名　机械动力学
主　　编　刘初升　彭利平　李　珺
责任编辑　张　岩　何晓明
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 21.75　**字数** 543 千字
版次印次　2013年9月第1版　2013年9月第1次印刷
定　　价　32.00元

序　言

力学是一门应用性很强的重要基础科学。动力学作为力学的一个分支，常用来研究运动物体的特性。大多数动力学问题来源于工程实际问题，从工程中提炼出动力学问题及其模型，然后运用并发展各种方法加以研究和解决。机械动力学是机械设计与制造、自动化控制、运行、检测诊断与维护等的基础。随着现代科技的发展，一些重大技术装备计划，如航空航天、先进制造装备（高档数控机床、集成电路制造装备）、先进动力装备（先进燃气轮机）、高速轨道交通及深海平台等，其高效、可靠与安全性需要机械动力学学科理论和方法来保障。

本书主要与编者多年的研究生机械动力学教学内容相配合，重点介绍了单自由度、双自由度、多自由度及连续体振动系统的建模与分析过程，辅之以振动数值方法的基本原理推导，最后对非线性振动、转子动力学和有限元思想进行了简单阐述。书中精选的较多新颖例题主要引自参考文献中的习题，编者给出了详细的计算步骤，这样可以让读者在已有的机械动力学读本的基础上，有更多的习题去了解基本概念与知识点。在第五章中，对抽象的振动分析数值方法进行了总结，并绘制了应用此类方法的基本流程图，使读者能更直观地了解方法的应用步骤。对于某些例题的不同种数学解法，在准确性方面进行了比较与说明。考虑到书中计算或原理解释的需要，添加了四个附录作为书中内容的补充。另外，书中尽可能地列举了各种振动系统在工程中的应用，并介绍了小阻尼近似这一工程概念。

本书主要是针对高等院校的理工科研究生及相关科技工作人员所编写。读者需要有高等数学、矩阵论和线性代数、数值分析方法及理论力学、材料力学的基础知识。

在本书编写过程中，编者的研究生在本书的文字录入、插图绘制、例题计算和程序编写等方面做了很多的工作，这里一并表示感谢。

机械动力学学科涉及面广、知识体系庞大，而本书主要侧重于机械振动理论，对其他类型的系统动力学未进行相关详细介绍，请读者参阅相关教材或专著。此外，由于作者精力有限和专业知识的局限，书中难免会有错误或不妥之处，恳请广大同行和读者批评指正。

我们会非常感激读者将对本书的意见或建议发送至邮箱 plpbeckham@163.com，同时，书中一些例子的Matlab程序编写也可以通过该邮箱进行交流。

编　者

2012年9月于矿大南湖校区

目　录

第 1 章　振动理论基础

随着现代工程技术的发展及工程应用需求的提高，人们对机械产品动力学问题提出了更高的要求，如车辆要分析随机疲劳来确定其寿命，挖掘机要考虑动载荷与强度，大型结构设备需要从整体动态分析寻找提高动力强度的途径等。由于设备的动态工作状态，常规的静态设计和经验设计的方法已无法很好地实现上述要求。对于大多数工程动力学问题而言，可用振动理论加以解释和解决。

振动是一种往复运动。如树枝摇曳、秋千摆动、汽车颠簸等都是典型的振动现象。从最早的人类对振动现象本质的探索，伴随着物理与数学学科的发展，振动力学已形成了以物理概念为基础，以数学理论、计算方法和测试技术为工具，以解决工程中实际振动问题为主要目标的力学分支。

振动工程自形成以来就伴随着两个主要方向：如何有效地利用振动和如何避免或减少有害振动。振动的利用主要是通过能产生振动的机械设备，即振动机械来完成的。在工业、农业、国防及人类生活等方面，其主要用途包括输送给料、选分烘干、破碎清理、成型紧实、振捣打拔和检测诊断等。图 1-1 所示的选矿振动筛就是典型的振动利用设备。与之相对的振动的危害性方面，如地震能造成严重的自然灾害和巨大的经济损失；转子不平衡产生的振动是汽轮发电机组运行中最常见的故障；机器产生的振动会影响精密仪器的性能而使其加工精度降低，也会使紧固件松脱，加剧零部件的磨损；伴随振动产生的噪声也会影响工作人员的身体健康。

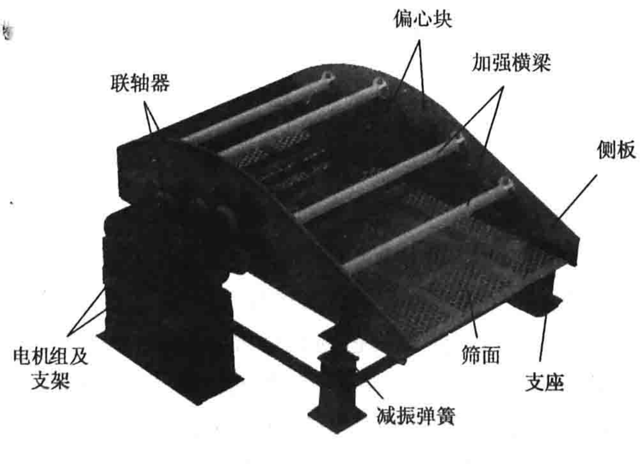

图 1-1　振动筛的三维模型

针对工程中机械系统的振动问题，其研究包括以下几方面的内容：

(1) 建立物理模型

物理模型的建立需要以现有的结构设计图为基础，要进行机械系统振动的研究，就应当确定与所研究问题有关的系统元件和外界因素，略去一些次要因素，将对象抽象为力学系统。这个系统应根据分析的需要，包含足够的但不冗余的元素来描述系统行为。

比如，对于利用强交变载荷引起的振动来实现物料分级、脱水等处理的振动筛设备，如图 1-1 所示。考察其空载下的受迫振动情况，可采用一些简化的物理模型来描述它：振动筛偏心轴所产生的激振合力若准确经过筛体质心（质心至左右减振弹簧的距离相等）且在竖直方向，则利用一个广义坐标[即图 1-2(a)中的 y 坐标]即可描述筛体的运动情况，这样的模型称为单自由度(1-DOF)模型。若激振器的合力准确经过质心，但是与竖直方向有偏角 α，筛体在交变力作用下沿这个力的方向振动，这时，模型为双自由度(2-DOF)系统，需要两个广义坐标[即图 1-2(b)中的 x 和 y 坐标]来确定筛体的瞬时位置。若激振器的合力不经过质心，甚至与竖直方向有偏角 α，筛体除了 x 和 y 方向上的平动外，还有围绕经过质心的轴的摆动 θ，这时，模型为三自由度(3-DOF)系统。由此可见，对于同一个研究对象，模型的建立是一个不断完善的过程，通过考虑更多的细节来对模型进行改善，使之尽可能接近实际情况。建模过程中，一些元件的力学行为属性的不同直接会导致下面数学模型本质的差异。例如，对于图 1-1 中振动筛的减振弹簧，工程中常采用金属螺旋弹簧和空气弹簧，前者的振动微分方程为线性方程，而后者则常常表现出非线性特性，因此处理的方式更为复杂。此外，若要考虑振动筛局部动力学特性，以加强横梁为例，则需要在原模型的基础上进行细化，系统构成将变为一个由多自由度和连续体相结合的复杂系统。

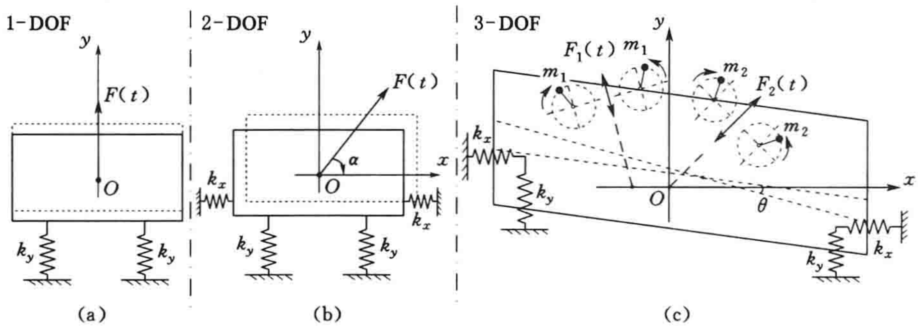

图 1-2　振动筛物理模型

(2) 建立数学模型

有了所研究系统的物理模型，就可应用某些物理定理对物理模型进行分析，以导出一个或几个描述系统特性的方程。建立数学模型的过程中常用的方法有牛顿运动定律、达朗贝尔原理以及能量守恒定律。通常，振动问题的数学模型表现为微分方程的形式。分离系统的某个质量块(单元)并对其施加主动作用力、反作用力和惯性力就能得到其受力分析图，类似地对每个质量块(单元)进行受力分析就能得到系统的运动微分方程。对于离散系统而言，振动微分方程通常是一个常微分方程(组)，如图 1-2(a)和图 1-2(b)所示的系统，其振动微分方程分别为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2k_yy=F(t)$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2k_xx=F(t)\cos\alpha \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2k_yy=F(t)\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

而对于一个连续体系统，通常是一个偏微分方程(组)，如弦的横向自由振动微分方程：

$$c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\quad(0<x<L)$$

方程的特性根据系统元件的力学行为属性可分为线性与非线性两类。线性方程处理简单，容易求解；而非线性方程有时能揭示线性方程不能体现的性质。

(3) 方程的求解

要了解系统所发生运动的特点和规律，就要对数学模型进行求解，以得到描述系统运动的数学表达式。通常，这种数学表达式是表示为时间函数的位移、速度或加速度表达式。表达式表明了系统运动与系统自身性质及外界作用的关系。对于运用基本的物理定律导出的运动微分方程，应用恰当的数学方法来求解这些微分方程。一般地，单自由度系统的运动方程属于常微分方程范畴，求解相对而言比较简单，而多自由度系统常用常微分方程组来表示，需利用矩阵方法和数值方法求解，对于连续体系统，偏微分方程涉及较多，主要利用数值方法。在方程的求解过程中，除了求解方程的精确解外，还可以利用许多数值算法来求解近似解。

(4) 结果的阐述

根据方程的解提供的规律和系统的工作要求及结构的特点，就可以进行结构设计或改进，以获得问题的最佳解决方案。

1.1　机械振动的运动学概念及分类

1.1.1　机械振动的概念

在工程领域，物体沿直线或曲线并经过其平衡位置所作的往复运动，称为机械振动(mechanical vibration)，机械振动属于振动力学。机器的振动通常用机械系统的位移(displacement) $x=x(t)$、速度(velocity) $\dot{x}=\dot{x}(t)=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和加速度(acceleration) $\ddot{x}=\ddot{x}(t)=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 随时间的变化来描述。

若每经过一定的时间后，振动体又回到原来状态并能重复这样的运动，则称为周期振动(periodic vibration)，如图1-3所示。用数学语言来说，如果运动的函数值 $x(t)$ 对于相隔常数 T 的不同时刻，具有相同的数值，可以用周期函数

$$x(t)=x(t+nT)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{1-1}$$

来表示，则这一运动是周期运动。方程中的 T 叫做系统的振动周期(period)，表示往复一次所需的时间间隔。周期的倒数，即：

$$f=\frac{1}{T}\tag{1-2}$$

定义为振动的频率(frequency)，单位为Hz或1/s。

与周期振动相对的，如机械系统受到冲击而产生的振动，旋转机械在启动过程中产生的振动，它们没有一定的周期，不能表达成式(1-1)的形式，称为非周期振动(aperiodic vibration),其振动曲线如图 1-4 所示。

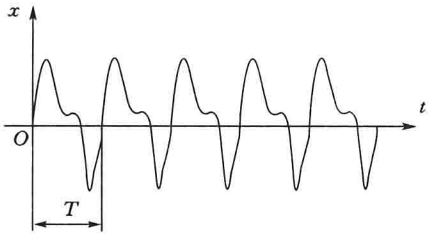

图 1-3 周期振动

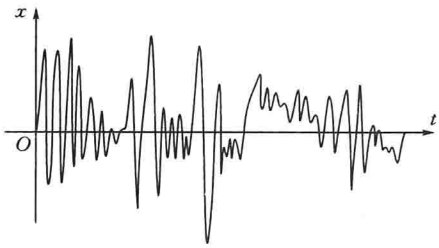

图 1-4 非周期振动

还有一类振动,如车辆在行走过程中的颠簸振动或大气湍流引起的飞机颤振,一般不能用确定的时间函数来表达,因此我们不可能预测某一时刻振动物理量的确定值。这种振动称为随机振动(random vibration),它要用概率统计的方法去研究。

1.1.2 机械振动的分类

为了便于分析讨论振动问题,有必要对振动加以分类。机械振动可根据不同的特征作如下分类:

(1) 按产生振动的原因分类

① 自由振动(free vibration):当系统的平衡被破坏,只靠其弹性恢复力来维持的振动。

② 受迫振动(forced vibration):亦称强迫振动,在外界激振力的持续作用下,系统被迫产生的振动。若激振力为简谐力,也简称为谐迫振动。

③ 自激振动(self-excited vibration):非线性系统具有非振荡性能源和反馈特性而引起稳定的周期振动。

(2) 按振动的规律分类

① 简谐振动(simple harmonic vibration):能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。

② 非简谐振动(non-simple harmonic vibration):不能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。

③ 随机振动(random vibration):不能用简单函数或这些简单函数的简单组合来表达其运动规律,而只能用统计方法来研究的非周期性振动。

(3) 按振动系统参数的特性分类

① 线性振动(liner vibration):系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移呈线性关系,能用常系数线性微分方程描述的振动。

② 非线性振动(non-liner vibration):系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质,只能用非线性微分方程描述的振动。

(4) 按振动系统的自由度数目分类

① 单自由系统(single-degree-of-freedom system, SDOF):确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置只需一个独立坐标。

② 多自由系统(multi-degree-of-freedom system, MDOF):确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置需多个独立坐标。

③ 连续体系统(continuous system):亦称无限多自由系统,系统主要由弹性体组成,如

弦、梁、杆、板等，其惯性、弹簧、阻尼是连续分布的，也称做分布参数系统。

(5) 按振动位移的特征分类

① 扭转振动(torsional vibration)：振动体(主要是弹性体)绕其纵轴线的扭转变形振动。

② 纵向振动(longitudinal vibration)：振动体(主要是弹性体)沿其纵轴线的伸缩变形振动。

③ 横向振动(bending vibration)：亦称弯曲振动，振动体(主要是弹性体)由于弯曲变形而产生的振动。

1.2 简谐振动

1.2.1 简谐振动及其特征

简谐振动是最简单的振动，也是最简单而又极其重要的一种周期振动，是系统的某个物理量(位移、速度、加速度)按时间的正弦(或余弦)函数规律变化的振动，如图1-5所示。其位移的数学表达式为：

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \tag{1-3}$$

式中 A 为振幅(amplitude)，表示物体振动的最大幅值；T 为周期，是从某一时刻运动状态开始再回到该状态时所经历的时间；$\omega t+\varphi$ 称为相位(phase)，决定物体在 t 时刻运动状态的重要物理量；$\omega=2\pi/T=2\pi f$ 称为圆频率或角频率(angular frequency)；φ 为初相位(initial phase)，决定了振动起始点的位置。

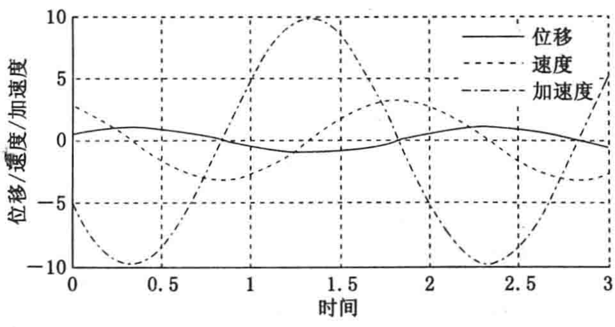

图1-5 简谐振动

按照定义，对简谐振动的位移表达式(1-3)式求一阶和二阶导数，即得简谐振动的速度和加速度表达式：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A\omega\cos(\omega t+\varphi)=A\omega\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1-4}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)=A\omega^2\sin(\omega t+\varphi+\pi) \tag{1-5}$$

比较式(1-3)、式(1-4)、式(1-5)，结合图1-5所示的简谐振动曲线，可以看出：

① 只要位移是简谐函数，则速度和加速度也是简谐函数，而且与位移具有相同的频率。

② 速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$,加速度的相位比位移超前 π。

③ $a=-\omega^2 x$,这就表明,简谐振动的加速度与位移恒成正比而方向相反,即加速度始终指向平衡位置,这就是简谐振动的运动学特征。

从数学分析中知道,任何周期函数,只要满足迪里赫莱条件,都可展开成为傅立叶级数的形式。也就是说,一般的周期运动总可以分解为一系列简谐振动的叠加。根据傅立叶级数,一个周期为 T 的函数 $x(t)$ 可以表示为三角函数的无穷级数:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{1-6}$$

式中 $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$, $a_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T [x(t)\cdot\cos n\omega t]\mathrm{d}t$, $b_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T [x(t)\cdot\sin n\omega t]\mathrm{d}t$。

对于非周期振动 $x(t)$,当满足条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{d}t < \infty$ 时,可用傅立叶积分来表示:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

式中

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-8}$$

$x(t)$ 和 $X(\omega)$ 构成傅立叶变换对,记为 $x(t)\Leftrightarrow X(\omega)$。借助于傅立叶变换,所有的周期和非周期的振动都可以表示为谐波振动的线性叠加。

例如,对于周期函数 $x(t)=A\dfrac{t}{T}$,它的傅立叶级数展开式为:

$$x(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 2\omega t+\cdots\right)$$

当 $A=1$, $\omega=\pi$ 时,原函数及其前四阶近似函数的两个周期内的曲线如图 1-6 所示。可以发现,阶数越高,对原周期函数的近似效果越好。

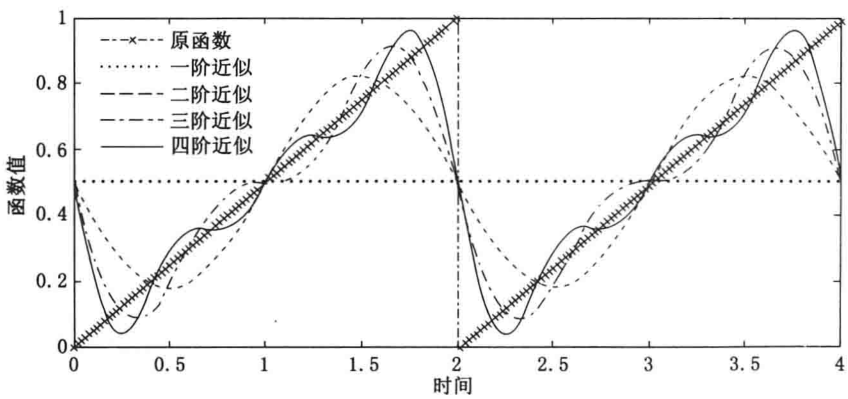

图 1-6 周期函数及其级数逼近

1.2.2 简谐振动的表示方法

(1) 矢量表示法

简谐振动可以用旋转矢量在坐标轴上的投影来表示。

如图 1-7(a)，从始点 O 作矢量$\overrightarrow{OP}$，其模为 A，以等角速度 ω 旋转，矢量的起始位置与水平轴的夹角为 φ_0。在任一瞬时矢量与水平轴的夹角为 $\omega t+\varphi_0$，则这一旋转矢量在竖直轴上的投影为：

$$y = A\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{1-9}$$

在水平轴上的投影为：

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{1-10}$$

由此可见，旋转矢量在垂直轴或水平轴的投影均可用来表示简谐振动，图 1-7(b)中的 $y-\omega t$为矢量绕始点 O 扫掠过程中，在竖直方向的投影随 ωt 同步变化而绘制的曲线，类似地，图 1-7(c)中的 $x-\omega t$ 为矢量绕始点 O 扫掠过程中，在水平方向的投影随 ωt 同步变化而绘制的曲线，两曲线也表明了分方向上的谐振特性。这一旋转矢量的模，就是简谐振动的振幅；旋转矢量的角速度就是简谐振动的圆频率；旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角就是简谐振动的相位角；而简谐振动的初相位角，则是 $t=0$ 时旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角。

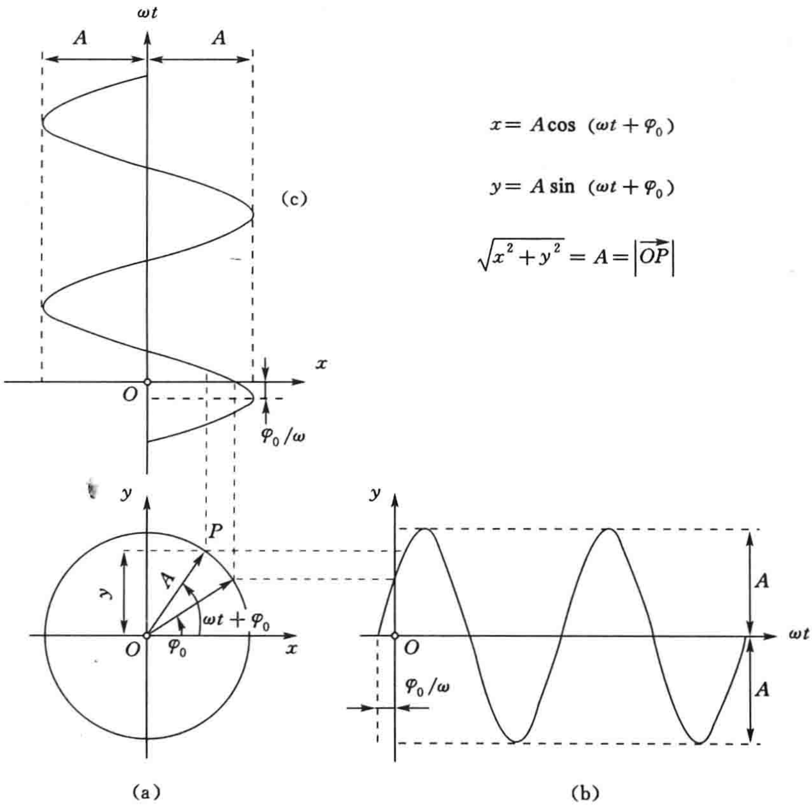

图 1-7　简谐振动的旋转矢量表示法

简谐振动的速度与加速度也可用旋转矢量来表示。因为速度和加速度也是时间 t 的正弦(或余弦)函数，其圆频率仍为 ω，并分别具有以下的最大值：

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A\omega \\ a_0 &= A\omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

故可用等速旋转的两个矢量 v_0 和 a_0 来表示。但速度矢量超前位移矢量 90°或 $T/4$，加速度矢量则超前位移矢量 180°或 $T/2$，如图 1-8 所示。

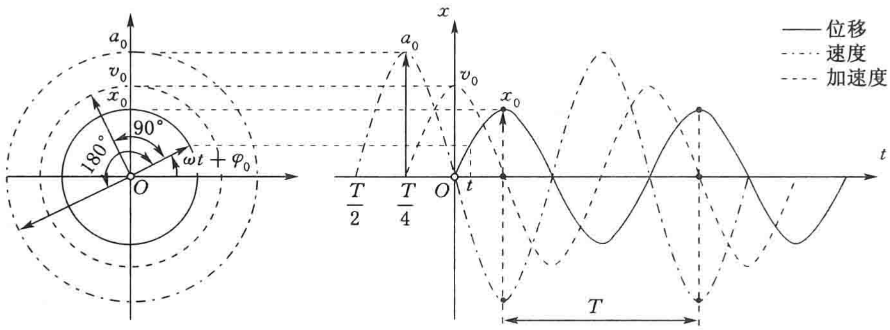

图 1-8　简谐振动的位移速度和加速度矢量

从图 1-8 中可以清楚地看出，所谓相位差(phase difference)是指两物理量达到最大值或最小值时间上的差异。若两个物理量同时达到最大值或最小值，则相位差 $\varphi=0°$，称为同相；若两个物理量一个达到最大值，另一个达到最小值，则相位差 $\varphi=180°$，称为反相。

(2) 复数表示法

复数可以用复数平面上的一个矢量来表示。如图 1-9 所示，长度为 A 的矢量 $\boldsymbol{Z}=\overrightarrow{OP}$ 在实数轴和虚数轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 和 $A\sin\theta$，故矢量 $\boldsymbol{Z}$ 就代表了下列复数：

$$\boldsymbol{Z}=A(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1-12}$$

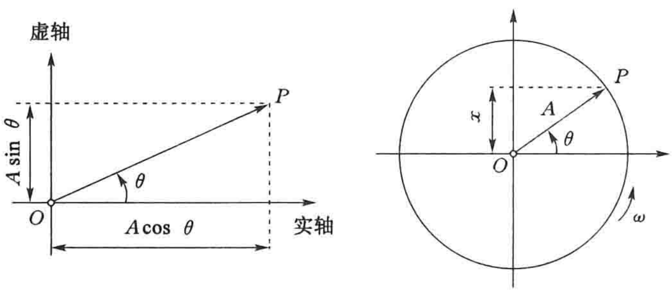

图 1-9　复数矢量法

而 $\overrightarrow{OP}$ 的长度就代表了这一复数的模 A，$\overrightarrow{OP}$ 与实数轴的夹角就是这一复数的复角 θ。

若使 $\overrightarrow{OP}$ 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转，就成为一个复数旋转矢量。它在任意瞬时的复角为 $\theta=\omega t$。根据欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，则前式(1-12)可改写成：

$$\boldsymbol{Z}=Ae^{i\theta}=Ae^{i\omega t} \tag{1-13}$$

如前所述，任意简谐振动都可以用一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影来表示。因此，同样可以用一个复数旋转矢量在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动。也就是说，可以用复数来表示简谐振动。即：

$$x=A\sin\omega t=\mathrm{Im}[\boldsymbol{Z}]=\mathrm{Im}[Ae^{i\omega t}]$$

式中　符号 Im 表示取复数的虚数部分；为了书写方便，今后对 $Ae^{i\omega t}$ 不作特别说明时，即表示取其虚数部分，这样可以省略符号 Im。

所以，简谐振动的复数表达式是：

$$x = Ae^{i\omega t} \tag{1-14}$$

初相位不为零时则上式应改写为：

$$x = Ae^{i(\omega t+\varphi)} = Ae^{i\varphi t} \cdot e^{i\omega t} = \widetilde{A}e^{i\omega t} \tag{1-15}$$

式中 $\widetilde{A}=Ae^{i\varphi t}$，称为复振幅。

同样，简谐振动的速度和加速度也可以用复数表示：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ai\omega e^{i\omega t} = A\omega e^{i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\\ \ddot{x} &= -A\omega^2 e^{i\omega t} = A\omega^2 e^{i(\omega t+\pi)}\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

将以上结果画在复平面上，可得到如图1-10所示的相互关系。可以看出，对复数 $Ae^{i\omega t}$ 每求导一次，则相当于在它前面乘上一个 $i\omega$，而每乘上一个 i，就相当于把这个复数旋转矢量逆针旋转 $90°$，即在复角上增加 $\pi/2$。

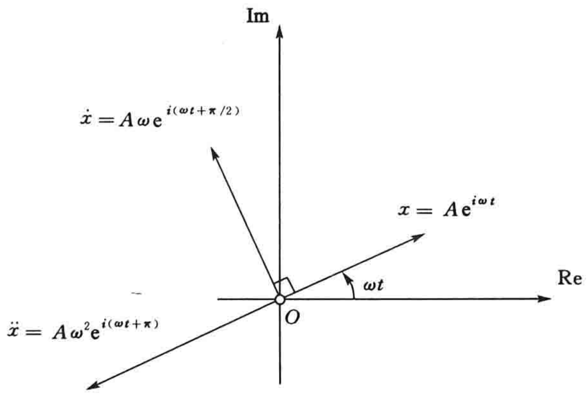

图1-10 简谐振动位移、速度和加速度在复平面上的相互关系

1.2.3 简谐振动的合成

(1) 同方向两个简谐振动的振动的合成

所谓同方向上的简谐振动，是指两个振动方向在同一条直线上。由于两个振动同时发生，最终表现出的振动形式就是它们的综合结果，它们又分为两个同频率振动的合成和两个不同频率的合成。

① 两个同频率振动的合成：

设两个振动分别为 $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ 和 $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$，它们的合成运动：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1-17}$$

将上式右边两项分别展开后使对应项相等，则有：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

由此可见，合成振动是一个与分振动同频率的简谐振动。若两分振动同相，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm2k\pi$（$k$ 为整数），则 $A=|A_1+A_2|$，两分振动相互加强；若两分振动反相，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$（$k$ 为整数），则 $A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱，如 $A_1=A_2$，则 $A=0$。

举例如下：

图 1-11(a)为分振动 $x_1=\sin(\pi t+\pi/6)$和 $x_2=2\sin(\pi t+2\pi/3)$的合成，相位相差0.5π，分振动相互减弱；图 1-11(b)为分振动 $x_1=\sin(\pi t+\pi/6)$和 $x_2=2\sin(\pi t+7\pi/6)$的合成，相位相差 π，分振动相互减弱；图 1-11(c)为分振动 $x_1=\sin(\pi t+\pi/6)$和 $x_2=\sin(\pi t+13\pi/6)$的合成，相位相差 2π，分振动相互增强。

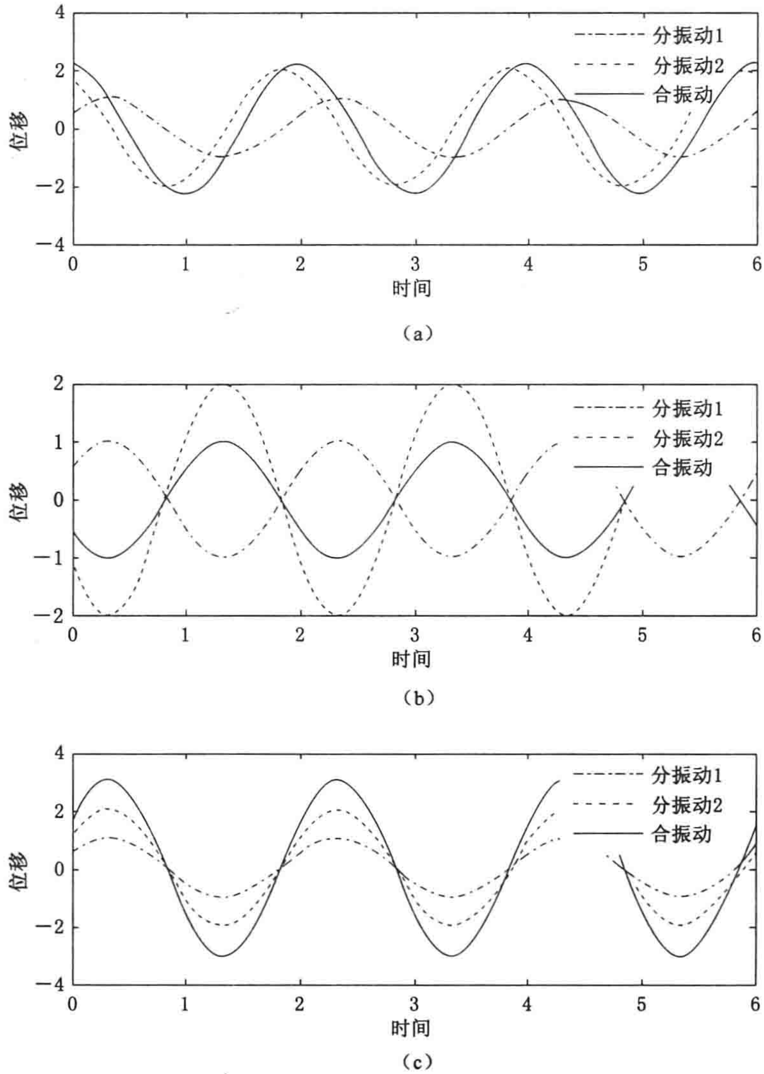

图 1-11　不同相位差下的分振动合成

② 两个不同频率振动的合成：

设两个同振幅的简谐振动分别为：$x_1(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$和 $x_2(t)=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$。它们的合成运动：

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ &= \frac{1}{2}A\left[e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)}+e^{-i(\omega_1 t+\varphi_1)}\right]+\frac{1}{2}A\left[e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}+e^{-i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right] \end{aligned} \tag{1-18}$$

定义 ω_{av} 和 φ_{av} 分别为平均频率和平均相位，Δ_ω 和 Δ_φ 分别为平均频率差和平均相位差：

$$\omega_{av}=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\varphi_{av}=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$\Delta_\omega=\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1),\Delta_\varphi=\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

则 $x(t)$ 中的绝对频率和绝对相位分别可以表示成：$\omega_1=\omega_{av}-\Delta_\omega$，$\omega_2=\omega_{av}+\Delta_\omega$，$\varphi_1=\varphi_{av}-\Delta_\varphi$ 和 $\varphi_2=\varphi_{av}+\Delta_\varphi$。代入式(1-18)经计算可以得到：

$$x(t)=\frac{1}{2}Ae^{i(\omega_{av}t+\varphi_{av})}\cdot\left[e^{-i(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)}+e^{i(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)}\right]+\frac{1}{2}Ae^{-i(\omega_{av}t+\varphi_{av})}\cdot\left[e^{i(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)}+e^{-i(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)}\right]$$

观察上式不难推出：

$$x(t)=2A\cos(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)\cos(\omega_{av}t+\varphi_{av}) \tag{1-19}$$

因为 $\omega_{av}>\Delta_\omega$，所以合成振动以频率 ω_{av}、振幅 $2A\cos(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)$ 作谐波式变化，而振幅又以频率 Δ_ω 作更缓慢地变化。通常把 $2A\cos(\Delta_\omega t+\Delta_\varphi)$ 称为包络函数。当 Δ_ω 很小，即 ω_1 与 ω_2 相接近时，合成振动信号即为拍振信号，这种振动现象称为拍振(beats vibration)。例如，图1-12显示了分振动 $x_1=5\cos(15t+\pi/2)$ 和 $x_2=5\cos(13t+\pi/3)$ 的合成运动，即为拍振。

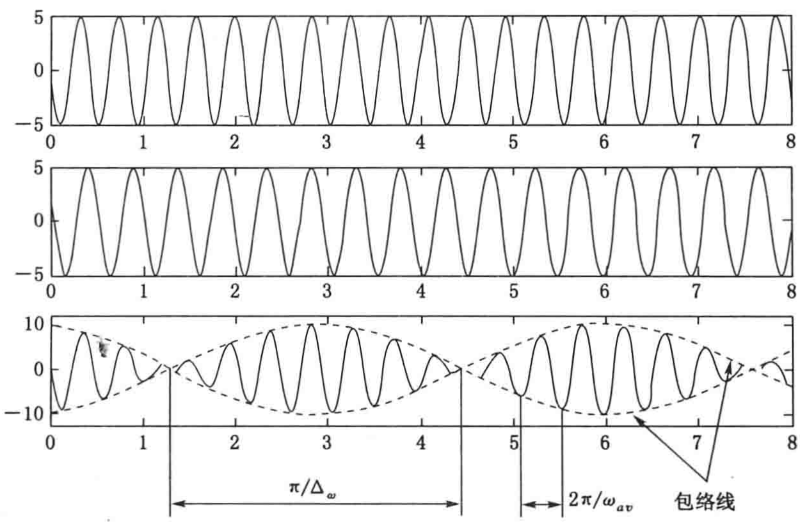

图1-12　拍振现象

拍振信号逐渐变大又趋于消失的这段时间间隔为 π/Δ_ω，叫做拍周期。每一个拍振信号都按频率 ω_{av} 振荡，因此两零点之间的间隔为 π/ω_{av}，而相继两个最大值或最小值之间的间隔近似为 $2\pi/\omega_{av}$。

一般地，对任意两个简谐振动：$x_1(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ 和 $x_2(t)=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$，设两个振动的初相位差为 θ，则在时间为 t 时，两个振动的相位差为：$\varphi=(\omega_1-\omega_2)t+\theta$，则合成后振幅为：

$$A=\sqrt{(A_1+A_2\cos\varphi)^2+(A_2\sin\varphi_2)^2}$$