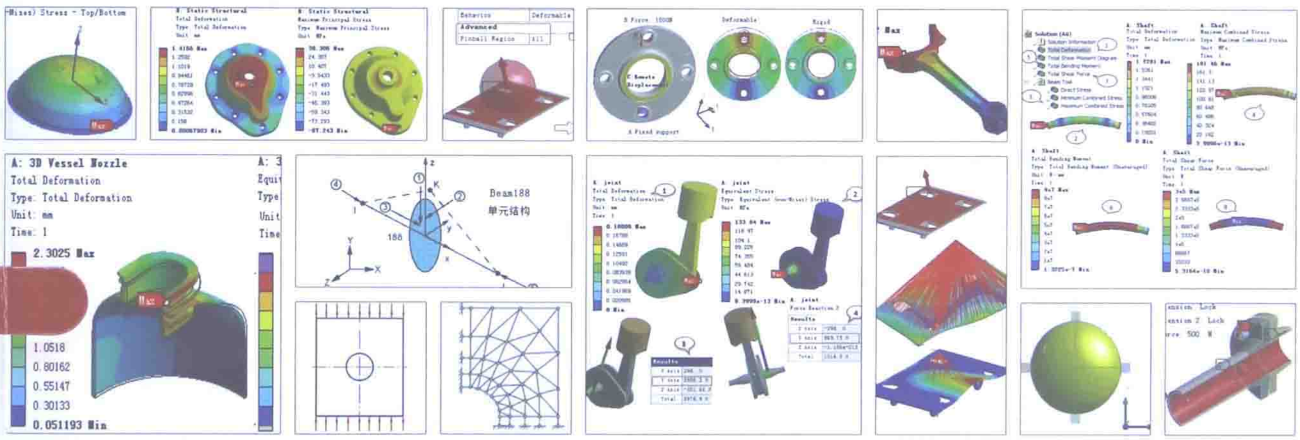
CAE分析大系

ANSYS Workbench 工程实例详解

◎ 许京荆 编著



完全图解有限元基础，一看就懂原理

融合理论与工程数值分析**实战**

ANSYS Workbench **N 年讲义**提炼

SimWe 论坛倾力推荐!

- 全部案例源文件
- 图书 + 微信订阅号 +SimWe 论坛 = 可沟通交流的生态系统教程

微信（iCAX）立体化阅读支持

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

CAE分析大系

ANSYS Workbench 工程实例详解

◎ 许京荆 编著

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

ANSYS Workbench工程实例详解 / 许京荆编著. -- 北京：人民邮电出版社，2015.5
（CAE分析大系）
ISBN 978-7-115-38386-0

Ⅰ. ①A… Ⅱ. ①许… Ⅲ. ①有限元分析—应用软件 Ⅳ. ①O241.82-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第046754号

内容提要

本书着眼于ANSYS软件的使用和实际工程应用，结合有限元分析方法和具体的软件操作过程，从工程仿真分析实例出发，详细介绍了ANSYS 15.0 Workbench有限元分析软件的功能和处理各种问题的方法与技巧。

为了方便读者理解并建立正确的有限元模型，书中提供了许多概念理解型案例，这些案例包含理论分析和有限元数值模拟的对比结果。同时书中解析了常见的工程案例，内容主要涉及结构线性、非线性静力分析，也包含部分热分析、电场分析及热-结构耦合场分析。本书提供的每个分析案例包括工程问题的简化、分析模型的建立、施加边界条件及求解，结果的评定期待接近于工程实际。

本书旨在为初学者提供机械工程中的CAE涉及的有限元方法的基础理论及实践知识，基于ANSYS 15.0 Workbench软件平台，让初学者学会使用商业化的有限元分析软件解决工程问题。本书依托统一的微信服务平台（iCAX）和SimWe论坛等，形成可交流的生态系统教程。随书资源包含全部案例的源文件，供读者学习使用。

◆ 编　　著　许京荆
责任编辑　杨　璐
责任印制　程彦红

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：19
字数：536千字　2015年5月第1版
印数：1－3 000册　2015年5月北京第1次印刷

定价：49.80元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第0021号

Preface
前言

目前，有限元方法（FEM）已成为预测及模拟复杂工程系统物理行为的主流趋势。商业化的有限元分析（FEA）程序已经获得了广泛认同，因此，在校本科生、研究生、科研工作者及工程设计人员既需要了解FEM的理论，又需要学会使用有限元分析应用程序。

ANSYS软件是融结构、流体、电场、磁场和声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。目前，ANSYS整个产品线包括结构分析（ANSYS Mechanical）系列、流体动力学（ANSYS CFD（FLUENT/CFX））系列、电子设计（ANSYS ANSOFT）系列，以及ANSYS Workbench和EKM等。作为现代产品设计中的高级CAE工具，ANSYS广泛应用于航空、航天、电子、车辆、船舶、交通、通信、建筑、电子、医疗、国防、石油和化工等众多行业。

ANSYS Workbench产品，以项目流程图的方式，将结构、流体和电磁等各种分析系统集成到统一平台中，进而实现不同软件之间的无缝链接。新版本ANSYS15.0 Workbench的操作简单，容易上手，处理复杂的工程模型更为方便，软件的分析功能和各项操作也都有了更多更好的提升和发展。

本书具体着眼于ANSYS软件的使用和实际工程应用，结合有限元分析方法和具体的软件操作过程，从工程仿真分析实例出发，详细介绍了ANSYS 15.0 Workbench有限元分析软件的功能和处理各种问题的使用技巧。

读者对象

本书的目的是为初学者提供机械工程中的CAE涉及的有限元方法的基础理论及实践知识，使读者学会使用商业化的有限元分析软件解决工程问题。

主要内容

第1章，介绍工程问题的数学物理方程及数值算法、相关的有限元基本分析技术及ANSYS 15.0 Workbench的简单应用案例；

第2章，介绍ANSYS 15.0 Workbench的基本功能及使用；

第3章，介绍ANSYS Workbench中的结构静力分析方法，以及考虑如何将实际的工程问题转换为不同的分析模型的求解技术；

第4章，重点描述在ANSYS Workbench中如何建立合理的有限元分析模型及其算例，涉及分析模型的建立、连接关系的处理、网格控制等关键影响因素；

第5章，讲述ANSYS Workbench在结构分析设计中的应用及分析案例。

为了方便读者理解并建立正确的有限元模型，书中提供了许多概念理解型案例，这些案例包含理论分析和有限元数值模拟的对比结果，同时书中也解析了常见的工程案例。书中内容主要涉及结构线性、非线性静力分析，也包含部分热分析、电场分析及热-结构耦合场分析。本书提供的每个分析案例包括工程问题的简化，分析模型的建立，施加边界条件及求解，结果的评定期待接近于工程实际。

资源使用说明

本书配套有全书的模型文件，分别按章节保存，读者直接在Workbench14及以更新版本软件中打开或者导入即可。

本书配套资源的下载地址为http://www.zhiliaobang.com，也可以通过扫描登录微信公众号：iCAX下载。

如果读者无法通过微信访问，也可以给我们发邮件：iCAX@dozan.cn。

致谢

本书由上海大学机电学院安全断裂分析研究室（ANSYS软件华东区技术支持及培训中心）的许京荆老师编著，上海空间电源研究所的陈萌炯也参与了部分内容的编写，在写作过程中得到了研究室同仁（吴益敏教授、王秀梅副研究员）、学生（刘威威、王正涛、陈雨、赵辉、袁坤等）及家人（张平、张奕）的大力支持与协助，在此深表谢意。

统一技术支持

如果读者在学习过程中遇到困难，可以通过立体化服务平台（微信公众服务号：iCAX）联系我们，我们会尽量帮助读者解答问题。此外，在这个平台上我们还会分享更多的相关资源。

由于本书内容涉及面广，书中不足之处在所难免，希望广大读者批评指正，也欢迎提出改进性建议。

许京荆

Contents
目录

第 1 章

有限元分析及ANSYS Workbench简单应用

1.1 引言

随着计算机辅助技术CAX（CAD/CAE/CAM/CAPP/PDM）的成熟及需求的变化，传统的产品研发、设计、制造、安装等随之也发生了根本性的改变。复杂的需求及过程需要与之适应的技术手段，这样，基于有限元法的计算机辅助工程技术（CAE）及其软件得以应运而生，已成为工程应用领域中创新研究、创新设计的重要工具。

本章的主要目的就是介绍有限元分析的基本方法及如何使用有限元分析软件ANSYS15.0 Workbench完成简单的分析案例，讨论的主要内容如下。

1. 工程问题的数学物理方程及数值算法。
2. 有限元分析技术的发展及应用。
3. 有限元分析的基本原理和相关术语。
4. 有限元分析的基本步骤。
5. 使用ANSYS15.0 Workbench分析简单案例。
6. 验证分析结果及理解工程问题。

1.2 工程问题的数学物理方程及数值算法

1.2.1 工程问题复杂的需求及过程

现代社会中，快速的交通工具、大型建筑物、大跨度的桥梁、大功率的发电机组、精密的机械设备等，这些产品面向高速化、大型化、大功率化、轻量化、精密化的趋向引发而来的机械工程问题日趋复杂，对工程设计人员提出了新的挑战。工程设计人员往往需要在设计阶段就要精确地考虑及预测出产品及工程的技术性能，不仅涉及结构分析的静力、动力问题，解决结构强度、刚度、稳定性、疲劳等失效问题，而且还涉及结构场、温度场、流场、电磁场等多场耦合的情况，都需要进行分析计算。

例如，随着对产品高速度的要求，短时间内的加速或减速将导致结构惯性力增加；随着产品结构（参见图1.2-1的运动机构）的柔度加大，结构更容易产生振动，而振动将降低结构的精度和寿命，因此产品动力设计中就要综合考虑这些影响因素；保温夹套蝶阀中（图1.2-2）关心温度分布、流体速度、压力分布对蝶阀性能参数的影响，就要进行热、流体、结构的耦合场分析；手机（图1.2-3）的设计中需要考虑传热、热应力、信号集成、芯片电源管理、高频分析、天线、触摸屏、信号干扰等多种工程难题。

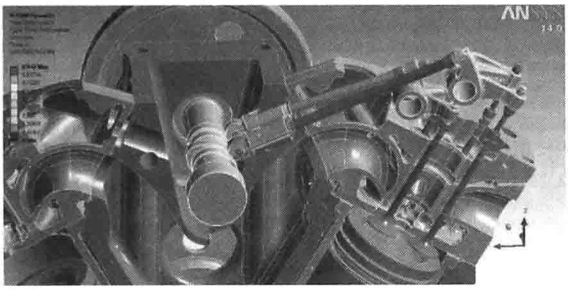


图1.2-1 运动机构

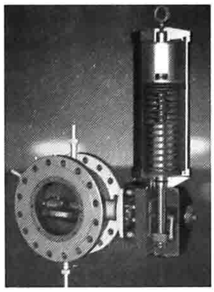


图1.2-2 保温蝶阀

图1.2-3 手机

1.2.2 工程问题的数学物理方程

对于解决实际的工程问题而言，一般都可以借助于物理定理，将其转换为相关的代数方程、微分方程或积分方程来描述，也就是说，工程问题可以转化为与之等价的数学物理方程。工程问题中常见的三种数学物理方程为波动方程、输运方程（扩散方程）和稳定场方程，其含义、控制微分方程及定解条件参见表1.2-1：

表1.2-1 三种数学物理方程描述

名称	概念	微分方程	初始条件	边界条件
波动方程（双曲线方程）	描述各种波动现象，如声波、光波和水波	$u_{tt}-a^2\Delta u=\begin{cases}0 & \text{无外源}\\ f(x,y,z,t) & \text{有外源}\end{cases}$	初始“位移”及初始“速度”	第一类、第二类、第三类
输运方程（抛物线方程）	反映输运过程，如质量输运、瞬态传热	$u_t-a^2\Delta u=\begin{cases}0 & \text{无外源}\\ f(x,y,z,t) & \text{有外源}\end{cases}$	物理量在初始时刻的值	第一类、第二类、第三类
稳定场方程（椭圆方程）	反映稳定场，如静力平衡、稳态传热	$\Delta u=\begin{cases}0 & \text{无外源(Laplace，拉普拉斯)}\\ f(x,y,z,t) & \text{有外源(Poisson，泊松)}\end{cases}$	无	第一类、第二类、第三类
其中：u为因变量；自变量t为时间，x，y，z为空间坐标	$u_{tt}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$\Delta u=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$，$t>0, x, y, z\in\mathbf{R}$ 第一类边界条件：$u(x,y,z,t)_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t)$ 第二类边界条件：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t)$ 第三类边界条件：$\left.\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right\|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t)$			

工程问题中的控制微分方程组有相应的物理边界条件和/或初值条件，控制方程通常由其基本方程和平衡方程给出，平衡方程往往代表了微元体的质量、力或能量的平衡。给定一组条件，求解微分方程组就可以得到系统的解析解。

下面以稳定场方程中的一维弹性问题（图1.2-4）为例加以说明：

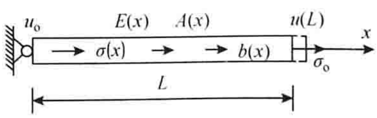


图1.2-4 一维弹性直杆

- 平衡方程：

假设轴向方向为x，在法向应力σx和轴向体积力$b(x)$的作用下，截面积为$A(x)$的直杆上的微元体力平衡问题可以表示为一维微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}(\sigma(x)\cdot A(x))}{\mathrm{d}x}+b(x)\cdot A(x)=0 \tag{1.2.1}$$

- 基本方程：

根据Hooke（胡克）定律，x处截面的应力$\sigma(x)$与应变$\varepsilon(x)$为线弹性关系，比例系数为直杆材料的弹性模量$E(x)$，则材料本构方程表示为：

$$\sigma(x)=E(x)\cdot\varepsilon(x) \tag{1.2.2}$$

应变$\varepsilon(x)$与轴向位移$u(x)$的几何方程表示为：

$$\varepsilon(x)=\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.3}$$

由式（1.2.1）~式（1.2.3）得到关于位移$u(x)$的二阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]+b(x)A(x)=0 \quad x\in(0,\,L) \tag{1.2.4}$$

- 定解条件：

一类边界条件（也称为几何边界/本质边界）为位移边界：

$$u(x)\Big|_{x=0}=u_0 \tag{1.2.5}$$

二类边界条件（也称为自然边界）为应力边界：

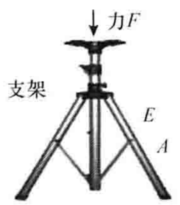
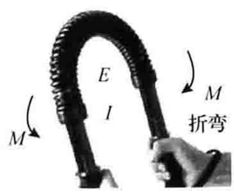
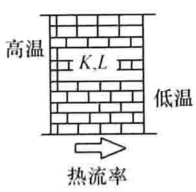
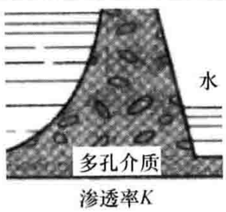
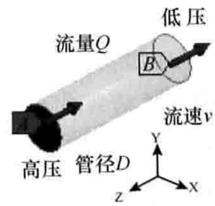
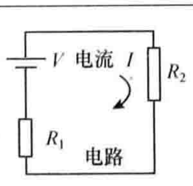
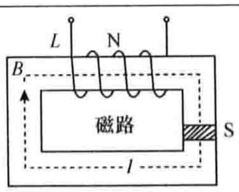
$$E(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L}=\sigma_0 \tag{1.2.6}$$

根据上述条件可以得到未知的位移函数$u(x)$的解。式（1.2.4）的参数中，确定的直杆参数包括材料参数和几何参数，材料参数为弹性模量$E(x)$，几何参数为截面积$A(x)$及直杆长度L；而使构件位移产生变化的扰动参数则是直杆的体积力$b(x)$及边界条件。

因此工程问题中，可将存在着影响系统行为的参数分为两组，一组反映系统的自然行为，为系统的自然属性，如弹性模量、热导率、黏度、面积、惯性矩等材料、几何特征；另一组参数会引起系统的扰动，如外力、力矩、温差、压差等。这样的区分主要是为了帮助理解在有限元分析模型中涉及的矩阵（如结构分析中的刚度矩阵和载荷矩阵）的位置及其作用。

为便于理解，表1.2-2给出部分工程物理问题的表征，表1.2-3给出稳定场边值问题中用一维控制微分方程表征的不同物理问题的例子。

表1.2-2 部分工程物理问题的表征

工程物理问题			
自然属性	弹性模量E，截面积A，长度L	弹性模量E，惯性矩I	剪切模量G，极惯性矩J，长度L
扰动	力F及约束条件	弯矩M及约束条件	扭矩T及约束条件
工程物理问题			
自然属性	热导率K，厚度L，面积A	渗透率k、几何特征	管径D，流体粘度η，长度L
扰动	热流率、温差、对流、辐射	压差/高差、补充流量	流量、压差
工程物理问题			

续表

自然属性	电阻的电阻率P，长度L，面积A	磁导率μ，长度L，截面积A	
扰动	电流I，电势差V	磁通量f，磁势NI	

表1.2-3　一维控制微分方程表征的不同物理问题的例子

一维控制微分方程（泊松方程）：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]+S(x)A(x)=0 \quad x\in(0,L)$

一类边界：$u(x)\big|_{x=0}=u_0$　　二类边界：$a(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=L}=g_0$

物理问题	因变量$u(x)$	$a(x)$	源$S(x)$	g_0
直杆的轴向变形	纵向位移$u(x)$	弹性模量$E[(x)]$	体积力$b(x)$	法向应力σ_0
一维定常热传导	温度$T(x)$	热导率$k(x)$	体积热源$q(x)$	热流密度q_0
位势流	流的高差$h(x)$	渗透率$k(x)$	体积流源$q(x)$	渗透流速v_0
一维管道流体	流体静压$P(x)$	黏度$\mu(x)$	体积流源$q(x)$	流速v_0
静电场	静电势$\phi(x)$	介电常数$\varepsilon(x)$	电荷密度$\rho(x)$	电通密度D_0
静磁场	磁势$\phi(x)$	磁导率$\mu(x)$	电荷密度$\rho(x)$	磁通密度B_0
稳态电流场	电势$V(x)$	电导率$\sigma(x)$/电阻率$\rho(x)$	-	电流密度J_0

1.2.3 控制微分方程的数值算法

虽然推导控制方程不是很困难，但得到精确的解析解的确仍是个棘手的问题，而近似求解的分析方法是一个有效的手段。

偏微分方程数值解的方法主要有限差分法、有限元方法、有限体积法，本质上都需要将求解对象细分为许多小的区域（单元）和节点，使用数值解法求解离散方程。有限差分法主要用于求解依赖于时间的问题（双曲线方程和抛物线方程），而有限元方法则侧重于稳定场题（椭圆型方程）；有限体积法可视作有限单元法和有限差分法的中间物。

有限差分法使用差分方程代替偏微分方程，从而得到一组联立的线性方程组；而有限元法使用积分方法建立系统的代数方程组，用一个连续函数近似描述每个单元的解。由于内部单元的边界连续，就可以通过单个解组装起来得到整个问题的解。

有限体积法是加权余量法中的子区域法，属于采用局部近似的离散方法；将计算区域划分为一系列不重复的控制体积，并使每个网格点周围有一个控制体积；将待解的微分方程对每一个控制体积积分，便得出一组离散方程。其中的未知数是网格点上的因变量的数值。为了求出控制体积的积分，必须假定值在网格点之间的变化规律。

有限单元法必须假定值在网格点之间的变化规律（即插值函数），并将其作为近似解。有限差分法只考虑网格点上的数值而不考虑值在网格点之间如何变化。有限体积法只寻求结点值，这与有限差分法相类似；但有限体积法在寻求控制体积的积分时，必须假定值在网格点之间的分布，这又与有限单元法相类似。在有限体积法中，插值函数只用于计算控制体积的积分，得出离散方程之后，便可忘掉插值函数；如果需要的话，可以对微分方程中不同的项采取不同的插值函数。三种方法对比参见表1.2-4.

表1.2-4　三种数值算法对比

名称	适用范围	典型应用软件
有限差分法	简单几何形状的流动与换热问题	Flow-3D、FlAC3D等
有限单元法	广泛适用几何及物理条件复杂的问题	ANSYS、NASTRAN、ABAQUS，ADINA、LS-DYNA等
有限体积法	流体流动及传热问题	STAR-CD、CFX、FLUENT等CFD软件

1.3 有限元分析技术的发展及应用

有限元法作为一种高效的数值计算方法，早期是以变分原理为基础发展起来的，广泛地用于“准调和方程”所描述的各类物理场中，众所周知的就是拉普拉斯方程和泊松方程。工程实际中遇到的：如热传导、多孔介质渗流、理想液体无旋流动、电势（磁势）分布，棱柱杆扭转、棱柱杆弯曲、轴承润滑等，都属于这类方程。现在则扩展到以任何微分方程所描述的各类物理场中。

其实，有限元方法中对于连续性问题，采用“有限分割、无限逼近”的思想自古有之，我国魏晋时期数学家刘徽1800年前撰写的《九章算术注》就给出了数学史上著名的“割圆术”计算圆周率。“割圆术”（图1.3-1），则是以“圆内接正多边形的周长”，来无限逼近“圆周长”。刘徽形容他的“割圆术”说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”。

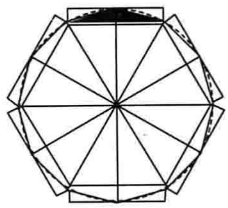


图1.3-1 刘徽割圆术示意图

现代有限元方法的起源可追溯到20世纪早期。1943年，美国数学家Courant首先提出了可以用有限个单元模拟无限点的物体，他也因此成为公认的应用有限元方法的第一人。

20世纪50年代计算机的出现，美国的工程师Turner、Clough首先采用Courant的观点解决了飞机机翼的强度问题。1960年，Clough在《有限元在飞机机翼强度分析中的应用》（*The finite element in plane stress analysis*）的论文中首次提出了有限元（Finite Element）术语，从而使有限元方法有了正式命名。1967年，Zienkiewicz和Cheung出版了第一本有关有限元分析的专著。1970年后，有限元方法应用于非线性和大变形问题。Oden于1972年出版第一本处理非线性连续体专著。

20世纪60年代我国中科院数学所计算数学家冯康，首先从数学角度出发，总结出一个可以归结为$\Delta u=0$（见表1.2-1）的工程物理问题，都可用有限元方法求解，在论文中提出了“有限单元”这样的名词。国内的贡献主要有：陈伯屏（结构矩阵方法）；钱伟长、胡海昌（广义变分原理）；冯康（有限单元法理论）。

现在，有限元分析已经成为数值计算的主流，结构、热、流体、电磁场中的稳态/瞬态、线性/非线性问题都可用有限元方法解决。国际上不但研发出多种通用有限元分析软件，如ANSYS、NASTRAN，ABQUS、ADINA、LS-DYNA等，而且涉及有限元分析的杂志也有几十种之多，有限元分析技术及其软件已经得到广泛应用（图1.3-2），主要特征可归纳如下。

- 深度：解决多种类复杂问题。
- 广度：涵盖多学科领域（结构、热、流体、电磁等）。
- 综合：多物理场耦合。
- 灵活：从简单到复杂，从单行到多核、并行处理。
- 适应性：CAD接口多、数据共享。

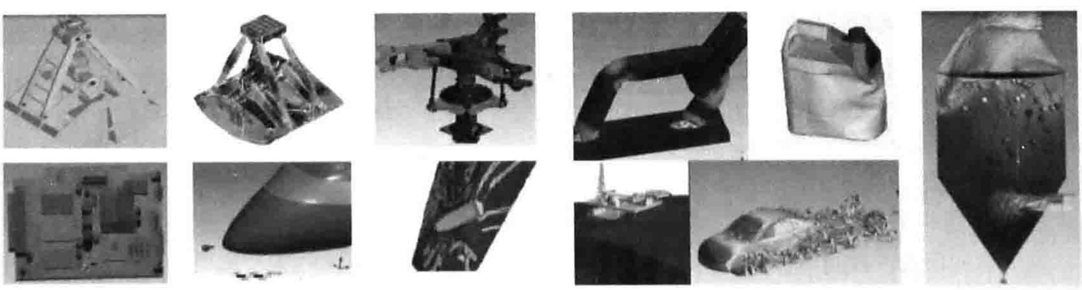


图1.3-2 有限元分析应用

1.4 有限元分析的基本原理及相关术语

1.4.1 有限元分析的基本原理

正如前所述，有限元方法作为求解数学物理问题的一种数值计算方法，用于求解具有边值及初值条件的微分方程所描述的各类物理场中，源于固体力学结构分析矩阵位移法的发展，利用数学近似的方法对真实物理系统进行模拟。利用简单而又相互作用的单元，用有限数量的未知量去逼近无限未知量的真实系统。

简单的二维弹性问题的有限元分析模型示例（图1.4-1）如下：

图左表示的是带圆孔的平板，在均匀压力作用下的应力集中问题。图右是利用结构的对称性，采用三节点三角形单元而离散后的有限元分析模型，各单元之间以节点相连。

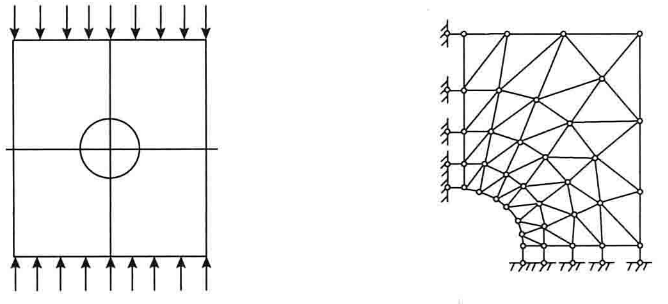


图1.4-1 平面应力问题的有限元分析模型

1.4.2 有限元分析的相关术语

1. 物理系统

步骤演示如图1.4-2所示。

自然界的一切物质都不是以孤立个体的形式单独存在的，它们均与周围事物发生着相互作用，并由于相互作用而形成各种联系。物理系统是在一定环境条件下（物理场），由相互作用着的若干要素（几何与载荷）所构成的有特定功能的整体。

2. 有限元模型

步骤演示如图1.4-2所示。

有限元模型是真实系统理想化的离散的数学抽象模型，由一些简单形状的单元组成，单元之间通过节点连接，并承受一定载荷。

3. 自由度

步骤演示如图1.4-2所示。

自由度用于描述一个物理场的响应特性，如结构场中的位移自由度，热场中的温度，电场中的电势，磁场中的磁势，流场中的压力、速度等。对于不同工程领域使用的有限元分析（FEA）采用的单元自由度及载荷参见表1.4-1。

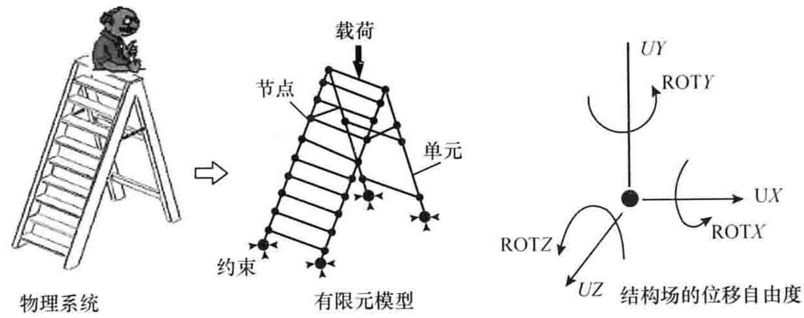


图1.4-2 真实物理系统、有限元模型及自由度

表1.4-1 不同物理场的FEA单元自由度及载荷

工程领域	结构场	热传导	声流体	位势流	通用流体	静电场	静磁场
自由度	位移	温度	压力	压力	速度	电势	磁势
载荷	结构力	热量	速度	速度	通量	电量	磁通量

4. 节点

步骤演示如图1.4-2所示。

节点是空间中的坐标位置，具有一定自由度和存在相互物理作用。节点自由度是随连接该节点单元类型变化的。

5. 单元

单元是一组节点自由度间相互作用的数值、矩阵描述（称为刚度或系数矩阵）。单元有线、面或实体二维或三维的单元等类型（见图1.4-3）。每个单元的特性是通过一些线性方程式来描述的。作为一个整体，单元形成了整体结构的数学模型，信息是通过单元之间的公共节点传递的。

每个单元指定一个单元编号及有具体数字序列的整体节点数（通常逆时针），参见图1.4-4。

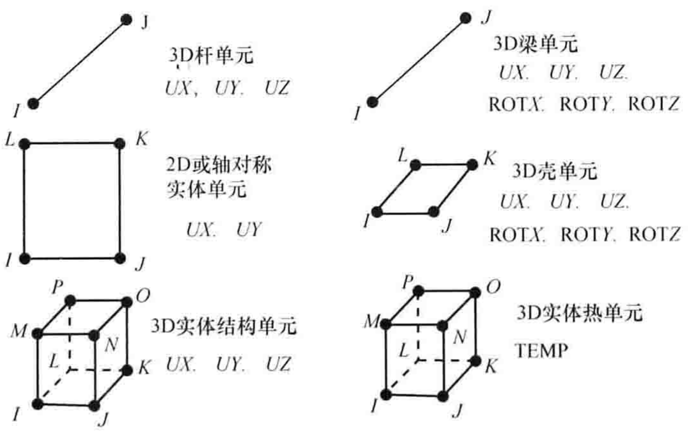


图1.4-3 不同低阶单元类型

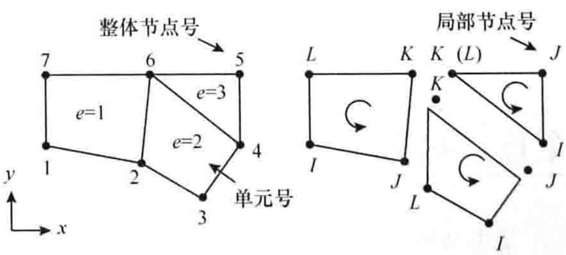


图1.4-4 离散域的单元及节点编号

6. 单元形函数

单元形函数是一种数学函数，规定了从节点自由度值到单元内所有点处自由度值的计算方法，这样通过有限元方法先求解节点处的自由度值，利用单元形函数，进而就可得任意位置的结果。

单元形函数的特点在于：提供了一种描述单元内部结果的“形状”；单元形函数描述的是给定单元的一种假定的特性。

单元形函数与真实工作特性吻合的好坏程度直接影响求解精度，示例如图1.4-5所示。单元形函数采用线性近似与二次近似的对比结果表明：线性近似的有限元分析模型（常称为“低阶单元模型”）往往需要更多的节点和单元才能获得好的求解精度，相比之下，二次近似的有限元分析模型（常称为“高阶单元模型”）获得理想结果所需的节点与单元都较少。

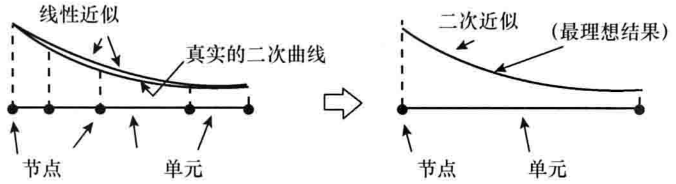


图1.4-5　单元形函数的线性近似与二次近似

1.5　有限元分析的基本步骤

一般而言，有多种方法用于推导有限元的公式，其中包括直接法、虚位移法、最小势能法、变分法、加权余量法等。

直接法是根据单元的物理意义，建立有关场变量表示的单元性质方程；加权余量法直接使用控制微分方程求解，如求解传热及流体力学问题，变分法依赖于变分计算，这种方法涉及与结构力学中势能有关的函数极值。

各种方法的基本步骤都大体相同，可表示为以下三个阶段。

1. 前处理

（1）建立求解域并将其离散为有限个单元。

（2）假设代表单元物理行为的单元形函数。

（3）对单元建立方程。

（4）将单元组成总体问题，构造总体刚度矩阵。

（5）应用边界条件、初值条件和载荷。

2. 求解

求解线性或非线性微分方程组，得到节点解， 如得到不同节点的位移或温度值。

3. 后处理

（1）获得其他导出量，如结构场中应力、应变，温度场中的热通量等。

（2）验证结果及理解问题。

1.6　有限元分析计算实例——直杆拉伸的轴向变形

直接法用于求解相对简单的问题，但对于解释FEA的概念非常有用。下面采用直接法，以求解直杆拉伸的轴向变形为例，给出有限元位移法分析的解算过程。

1.6.1　问题描述

如图1.6-1所示拉杆一端固定，另一端受外力P=10kN，拉杆长度L=400mm，横截面积A=10×10mm^2，材料为Q235，弹性模量E=2×10^{11}Pa，屈服应力250MPa，需计算轴向变形及应力。

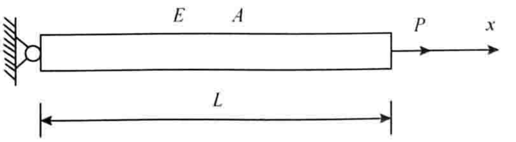


图1.6-1　拉杆模型

1.6.2 微分方程的解析解

该模型为1D线弹性问题，体积力为$b(x)=0$，微分方程由（1.2.4）可写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EA\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]=0 \quad x\in(0,L) \tag{1.6.1}$$

边界条件：

位移边界为：

$$u(x)\big|_{x=0}=0 \tag{1.6.2}$$

应力边界为：

$$E\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L}=\frac{P}{A} \tag{1.6.3}$$

方程解为：

应力：

$$\sigma(x)=\frac{P}{A}; \tag{1.6.4}$$

应变：

$$\varepsilon(x)=\frac{P}{EA}; \tag{1.6.5}$$

位移：

$$u(x)=\frac{P}{EA}x \tag{1.6.6}$$

将数值代入得到常值应力$\sigma(x)$=100MPa，常值应变$\varepsilon(x)$=0.0005，位移函数$u(x)=0.0005x$，最大位移$u(L)$=0.2mm。

1.6.3 微分方程的有限元数值解

1. 离散单元

将杆件离散为具有两个节点的单元，节点处有轴向节点力f_1，f_2，产生x方向的位移u_1，u_2，如图1.6-2所示。

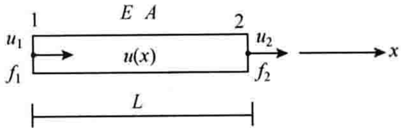


图1.6-2　具有两个节点的杆单元

2. 节点1的力平衡方程

由于受到节点力的作用，杆单元1点处变形$\Delta u_1=u_1-u_2$，作用在1点轴向力f_1可表示为：

$$f_1=EA\frac{\Delta u_1}{\Delta x}=EA\frac{u_1-u_2}{L} \tag{1.6.7}$$

3. 节点2的力平衡方程

同理，作用在2点轴向力f_2可表示为：

$$f_2=EA\frac{\Delta u_2}{\Delta x}=EA\frac{u_2-u_1}{L} \tag{1.6.8}$$

4. 单元刚度方程

合并式（1.6.7）与（1.6.8），导出矩阵方程如下：

$$\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L}\\ -\frac{EA}{A} & \frac{EA}{A}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\end{Bmatrix}\text{或}K^{(e)}u^{(e)}=F^{(e)} \tag{1.6.9}$$

这里，$u^{(e)}$为未知的节点位移矢量，$K^{(e)}$为单元刚度矩阵，$F^{(e)}$为单元节点力矢量，上标e表示单元号。